Prof. Dr. P. v. d. Lippe

# Annahmeverletzungen im Regressionsmodell (Eingleichungsmodelle): Tests und Konsequenzen

(nach L. v. Auer "Einführung in die Ökonometrie")

Erste Spalte Nr. des Kapitels und der Annahme

| | Sachverhalt und Konsequenzen | Diagnose, Tests | Bemerkungen, Ergänzungen |
|---|---|---|---|
| 13<br><br>(A1) | **Fehlspezifikation**<br>unvollständiges Modell $y_t = \alpha' + \beta' x_{1t} + u'_t$<br>korrektes Modell $(\alpha, \beta_1, \beta_2, u_t)$<br>überladenes Modell $(\alpha'', \beta''_1, \beta''_2, \beta''_3, u''_t)$<br>$E(\hat{\beta}'_1) = \beta_1 + \beta_2 S_{12}/S_{11}$ verzerrt<br>$V(\hat{\beta}'_1) > V(\hat{\beta}_1)$ weil $\sigma^2$ auf der Basis von $u'$ statt u geschätzt. Auch überladenes Modell nicht effizient $V(\hat{\beta}''_1) > V(\hat{\beta}_1)$. | $R^2$ nur anwendbar, wenn<br>● gleicher Regressand y<br>● keine homogene Regression<br>● gleiche Anzahl von Regressoren<br>deshalb $\overline{R}^2 = R^2$adj (korrigiertes $R^2$)<br>$\overline{R}^2 = 1 - (1 - R^2)\frac{T-1}{T-K-1}$<br>Auf der Basis der logarithmierten Likelihood Funktion: Akaike Informationsmaß (AIC), Schwarz Kriterium (SIC). | Spezifikationsstrategien (stepwise regression)<br>● Steinmetz (= top down, Aussonderung, Rückwärts-Elimination) und problematischer<br>● Maurer (= bottom up, selektiver Aufbau, Vorwärts-Auswahl) auf der Basis von t- und F-Test sowie der partiellen Bestimmtheit (→ Zuahme von $R^2$ durch einen Regressor).<br>Beim Verfahren der stepwise regression sollte Neuaufnahme / Elimination nicht endgültig sein (muss beim nächsten Schritt revidierbar bleiben). |
| 14<br><br>(A2) | **Nichtlinearität**: wenn $H_0$ = linearer Zusammenhang mit **RESET-TEST** abgelehnt ist, kann man Modelle mit gleicher endogener Variable über $R^2$ vergleichen, sonst Box-Cox-Verfahren. Geschätzte Parameter des linearen Modells bei Vorliegen von Nichtlinearität natürlich irrelevant. | RESET: Testen der Koeffizienten $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ gegen Null bei<br>$y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \gamma_1 \hat{y}_t^2 + \gamma_2 \hat{y}_t^3 + \ldots$<br>Ablehnung von $H_0$ spricht für Nichtlinearität, es ist aber nicht klar von welcher Gestalt der Zusammenhang ist. | **Box-Cox-Transformationen**<br>$y_t \to y_t(\lambda) = (y_t^\lambda - 1)/\lambda$, $x_t \to x_t(\psi) = (x_t^\psi - 1)/\psi$<br>verschied. Kombinationen von Parameterwerten $\lambda$, $\psi$ erlauben es verschied. Modelle (Exponential-, semilogarithmisch etc.) als lineare Modelle darzustellen. Zarembkas Methode zum Vergleich eines Modells mit $y_t$ mit einem mit $\ln y_t$ als Regressand ist ein Spezialfall |
| 15<br><br>(A3) | Keine stabile Modellstruktur bei **Strukturbrüchen**. Man kann Modelle mit dummy Variablen modellieren (z.B. bei zwei Phasen I und II) im Modell der linearen Einfachregression $\alpha_{II} = \alpha_I + \gamma$ und $\beta_{II} = \beta_I + \delta$ (Modell mit abrupten Strukturbrüchen; daneben gibt es auch Modelle mit stetiger Parametervariation). | Kein Strukturbruch bei F-Test der $H_0 = \gamma = \delta = 0$ im Modell mit $\alpha_I$, $\alpha_{II}$ usw. Prognostischer (rekursiver) Chow Test bei verschied. Partitionen des Intervalls der Länge T in zwei Teile $T_I$ und $T_{II} = T - T_I$ (Feststellen wann Strukturbruch war, Spezialfall $T_{II} = 1$). | **Chow Test** oder Test eines Trendparameters $\lambda$ (etwa $\beta_t = \mu + \lambda t$) bei einem linear veränderlichen Parameter $\beta$ verlangen Modellierung d. Strukturbruchs. EViews bietet auch Grafik der kumulierten Summen bei rekursiv (mit wachsendem t) geschätzten Koeffizienten an: **CUSUM** (= cumulative sums of scaled recursive residuals plotted against time) und CUSUM of squares |

| | Sachverhalt und Konsequenzen | Diagnose, Tests | Bemerkungen, Ergänzungen |
|---|---|---|---|
| **16**<br><br>**(B1)** | $E(U_t) \neq 0$ bei unvollständigen Modellen (Fehlspezifikation) oder Messfehlern in y (Regressand) oder in x (Regressor). Zu unterscheiden: konstanter Messfehler $E(U_t) = \lambda$ (OLS weiter möglich) und variabler Messfehler. | Mehr Ergebnis systematischer statt zufälliger Fehler. Konstanter Messfehler bei y führt zur Verzerrung von $\alpha$, nicht von $\beta$. Bei konst. Messfehler in x wird $\alpha$ systematisch unterschätzt. Es ist schwierig, diese Art Annahmeverletzung zu diagnostizieren. | Anlass zur Verletzung von B1 kann auch geben: nichtlineare Modelle (verschiedene Annahmen über die Störgröße denkbar) oder gestutzte Verteilung der endogenen Variable y. Bei variablem Messfehler $E(U_t) = \lambda_t$. Alternativen zu OLS möglich (ML- oder Heckman-Schätzer). |
| **17**<br><br>**(B2)** | Drei Arten des Umgangs mit **Heteroskedastizität**<br>● Modellieren $\sigma_t^2$ in Abhängigkeit von $x_t$ oder $x_t^2$ und Variablentransformation $x_t \to x_t^*$, $y_t \to y_t^*$ (→ **GLS**) Transformationsmatrix **P**<br>● Partitionierung (Zerlegung des Beobachtungsintervalls in Teil-Zeitintervalle bzw. in Teilgesamtheiten nach der Größe von $x_t$) mit $\sigma_I^2$ und $\sigma_{II}^2$<br>● ARCH -, GARCH Modelle. | Modellieren von $\hat{u}_t$ mit $x_t$, $x_t^2$,…<br>→ **White Test**<br>→ **Breusch Pagan Test** dort auch $x_{t-1}$ usw. im Modell (= BP-Test in EViews)<br>Beim White Test wird Hilfsmodell $\hat{u}_t^2 = \gamma_0 + \gamma_1 x_{1t} + \gamma_2 x_{2t} + \gamma_3 x_{1t}^2 \ldots$ geschätzt und $H_0$: $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots 0$ getestet.<br>Auf Partitionierung beruht **Goldfeld-Quandt Test** ($H_0$: $\sigma_I^2 = \sigma_{II}^2$)<br>E-Views bietet White Test mit und ohne Interaktion (cross terms $\gamma_{jk}(y_{jt} y_{kt})$) an. | Heteroskedastizität wirkt sich wie Autokorrelation auf Effizienz (nicht Erwartungstreue) der Parameterschätzung aus. Schätzung mit der verallgemeinerten Methode der kleinsten Quadrate (VKQ = GLS) bzw. weil Parameter der Transformationsfunktion erst geschätzt werden müssen GVKQ (G = geschätzt).<br>Bei ARCH (autoregressive conditional heteroskedasticity) und GARCH (generalized…) wird die bedingte Varianz $\sigma_{u_t}^2 = \text{var}(u_t \mid u_{t-1}, u_{t-2}, \ldots)$ modelliert mit $\alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \ldots$, bei GARCH treten auch $\sigma_{u_{t-1}}^2, \sigma_{u_{t-2}}^2 \ldots$ als Regressoren auf. |
| **18**<br><br>**(B3)** | Geschätzte **Autokorrelation** $\hat{\rho} = \sum \hat{u}_{t-1}\hat{u}_t / \sum \hat{u}_{t-1}^2$. Folgt die Störgröße $u_t$ in $y_t = \alpha + \beta x_t + u_t$ einem AR(1) Prozess, dann ist $V(\hat{\beta}) > \sigma^2 / S_{xx}$ (Ineffizienz). Wäre $\rho$ bekannt, könnte man $y_t$ und $x_t$ entsprechend transformieren zu $y_t - \rho y_{t-1}$ und $x_t - \rho x_{t-1}$. Nur $V(\hat{\beta})$ verändert sich gegenüber OLS bei Anwendung des **Newey-West** Varianzschätzers (NW serial correlation consistent standard error estimator). Alternativer Schätzer von White. | **Durbin Watson Test** (DW) mit $d \approx 2(1-\hat{\rho})$.<br>Untere ($d_L$) und obere Schranke ($d_H$)<br>$H_1 = \rho > 0$ (positive Autokorrelation)<br>ist $d < d_L$ dann $H_0$ verwerfen,<br>bei $d_L \leq d < d_H$ keine Aussage<br>$H_1 = \rho < 0$ (negative Autokorrelation)<br>ist $d > 4 - d_L$ dann $H_0$ verwerfen,<br>ist $4 - d_H \leq d \leq 4 - d_L$ keine Aussage<br>Ist Art der Autokorrelation bekannt, kann Transformationsmatrix **P** bestimmt werden und man kann β-Koeffizienten mit GLS (=VKQ) schätzen. | DW nicht bei verzögert endogenen Regressoren, dann h-Test, (Prüfgröße h = $\left(1-\frac{1}{2}d\right)\sqrt{T/(1-V(\hat{\beta})}$ ~ N(0,1) unter $H_0$); entdeckt nur AR (1) Prozess; bekannt und beliebt, besser deshalb wohl **Breusch Godfrey Test** $e_t = \hat{u}_t = \rho_1 e_{t-1} + \ldots + \rho_p e_{t-p} + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \ldots + \varepsilon_t$ (in E-Views als BG(p) oder LM [Lagrange Multiplier] Test). $TR^2$ aus dieser Regression ist $\chi^2$-verteilt (ähnlich wie BP-Test). **Box Pierce** und Ljung Box Test beruhen auf Prüfgrößen in denen über quadrierte Autokorrelationskoeffizienten verschiedener Ordnung summiert wird und die $\chi^2$-verteilt sind. |

| | Sachverhalt und Konsequenzen | Diagnose, Tests | Bemerkungen, Ergänzungen |
|---|---|---|---|
| **19**<br><br>**(B4)** | Wenn die $u_t$ (t = 1,…, T) **nicht normalverteilt** sind, gelten die bisherigen Verteilungsannahmen für $\hat{\beta}_i$ und $\hat{\sigma}^2$ nicht mehr. | **Jarque Bera** (JB) Test beruht auf S (Symmetrie) und K (Kurtosis) der NV: es gilt dann S = 0, K = 3. Prüfgröße ~ $\chi^2_{(2)}$. | JB-Test bei E-Views auch unter Histogram Normality Test. Es ist ein "non-constructive" Test, h.h. wird $H_0$ verworfen erlaubt der Test keine Hinweise auf die Art der tatsächlich gegebenen Verteilung. |
| **20**<br><br>**(C1)** | Der Fall **stochastischer Regressoren** kann dazu führen, dass Schätzung von $\hat{\beta}$ (bzw. $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$ …) nicht mehr konsistent ist. Man braucht Annahmen über asymptot. Momente der Regressoren.<br>C1 ist oft verletzt bei verzögert endogener Variable als Regressor und allgemein in interdependenten Modellen (Haavelmo-Bias). Tests laufen auf Frage hinaus, ob Regressor(en) "exogen" ist (sind). | Kein Daten- sondern ein Modellproblem. Auf Vergleich des (inkonsistenten) OLS schätzers $\hat{\beta}$ mit dem konsistenten IV (Instrumentalvariablen) Schätzer $\hat{\beta}$ beruht der **Hausman-Spezifikationstest** und der Hausman-Wu- Test.<br>2sLS ist ein spezieller Fall der IV-Methode.<br>Aktuelle Problematisierungen der "Exogenität"[1] kritisiert bei Maddala. | Wenn Regressor(en) und Störgröße kontemporär<br>● unkorreliert sind: Schätzer nicht erwartungstreu aber noch konsistent<br>● korreliert: weder erwartungstreu noch konsistent<br>Havelmo Bias: in $C = \alpha + \beta Y + u$ und $Y = C + I$ kann u und Y nicht unkorreliert sein. Mit OLS geschätzter Parameter $\hat{\beta}$ ist nicht konsistent. Man muss $\beta$ als $\tilde{\beta}$ mit IV Methode schätzen, was[2] identisch ist mit ILS: $\tilde{\beta}$ zwar konsistent aber $V(\tilde{\beta}) > V(\hat{\beta})$. |
| **21**<br><br>**(C2)** | **Multikollinearität** führt zu ineffizienten aber noch erwartungstreuen Schätzungen. Auch t-Test der Regressoren nicht valide (oft nicht signifikante Regressoren, aber F-Test signifikant). | Ein Datenproblem. Maße der Multikollinearität basieren meist auf Interkorrelationen (zwischen den Regressoren), so etwa die Variance inflation factors (VIFs) oder die Konditionszahl (Eigenwerte von **X'X**) | Kein Problem bei Prognose oder wenn Varianzen von Regressoren groß und Varianz der Störgröße klein. **Ridge** Regression und principal component regression keine wirklichen Lösungen. Hilfreich: verarbeiten von a priori Kenntnissen, Vergrößerung der Datenbasis. |

[1] weak-, strong-, super exogeneity (zu unterscheiden von exogen im Sinne der üblichen Terminologie bei simultanen Modellen); strong exogeneity hängt eng zusammen mit Granger causality: Granger non-causality is necessary for strong exogeneity, however, Granger non-causality is neither necessary nor sufficient for exogeneity as understood in the usual simultaneous equations literature.

[2] bei exakter Identifizierbarkeit.