Teil II: Übungsaufgaben Deskriptive Statistik

Aufgaben zum Kapitel 1

Aufgabe 1.1

Welche der nachstehenden Massen sind Bestandsmassen und welche sind Bewegungsmassen?

Auftragseingänge, Anlagevermögen, Sozialprodukt, Nettoinvestition, landwirtschaftliche Nutzfläche, Ehescheidungen, Steuereinnahmen, Sparvolumen, Schulden, Neuverschuldung, Baufertigstellungen, Gutschriften auf ein Bankkonto, Geburten.

Aufgabe 1.2

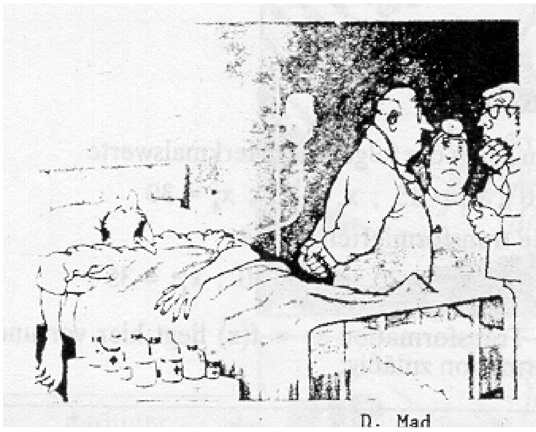
Das Merkmal "Art der Erkrankung" wird üblicherweise durch ärztliche Diagnose erhoben. Ist es:

a) quantitativ oder qualitativ?

b) häufbar oder nicht häufbar?

c) intensiv oder extensiv?

d) manifest oder latent?



Aufgabe 1.3

Die Pizzeria P (des Eigentümers P) hat zwei Lokale (L1 und L2), bei denen man Mittags- und Abendessen (M, A) einnehmen kann, wobei es jedoch jeweils nur die folgenden Gerichte gibt: Pizza, Spaghetti, Ravioli und Canneloni. Es ergab sich, dass von den 4764 Gästen der Pizzeria insgesamt 5000 Gerichte im letzten Monat (April) wie folgt bestellt wurden:

	L1		L2		
	M	A	M	A	insgesamt
Pizza	400	600	600	800	2400
Sonstige	700	1100	400	400	2600
Summe	1100	1700	1000	1200	5000

1. Wieviel Merkmale werden in dieser Statistik dargestellt, wie heißen sie und welche Merkmalsausprägungen werden in der Tabelle dargestellt?
2. Was (Masse, Einheit, Merkmal usw.) ist im Falle dieser Statistik
   a) die in der Statistik mitgezählte Pizza, die Herr Schulze am 16. April zum Abendessen im Lokal L1 gegessen hat?

   b) die Angabe "Pizza"?

   c) die Angabe des Eigentümers P der Pizzeria?

   d) die Zahl 5000?

   e) das Lokal L2?

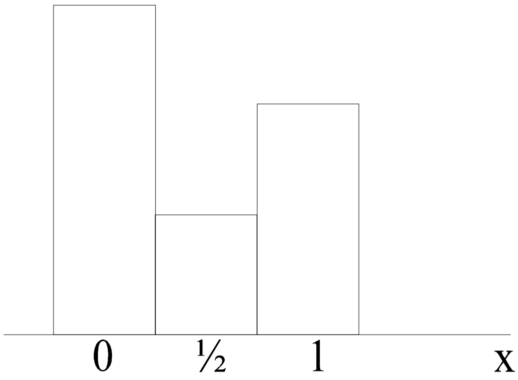
   f) die insgesamt 1700 + 1200 = 2900 Gerichte, die abends ausgegeben wurden?

g) die insgesamt 2800 Gerichte im Lokal L1?

h) der Monat April?

Aufgabe 1.4

Stultitia (= Torheit) und ihre Ziehmutter und Nymphe Apaedia (= Beschränktheit), Tochter des Pan und Schutzgöttin der Statistiker, haben zusammen eine Volkszählung im Olymp veranstaltet. Sie zählten dabei 39 Götter, 13 Halbgötter (deshalb x = ½) und 26 Nymphen (= niedrige Naturgötter) und ähnliche Dienstgrade. Gegen die graphische Darstellung ihrer Ergebnisse sind gewichtige Einwendungen zu erheben! Welche?



Aufgabe 1.5

Gegeben seien die folgenden Merkmalswerte

$x_1 = 10 \quad ; \quad x_2 = 15 \quad ; \quad x_3 = 25 \quad ; \quad x_4 = 30$

sowie die transformierten Werte

$x_1^* = 15 \quad ; \quad x_2^* = 20 \quad ; \quad x_3^* = 30 \quad ; \quad x_4^* = 35$

Welche Transformation $x^* = f(x)$ liegt hier vor und bei welcher Skalenart ist diese Art der Transformation zulässig:

Transformation (T)		Skalenniveau	
	monotone T	Nominalskala	
	lineare T	Ordinalskala	
	symmetrische T	Intervallskala	
	Intervalltransf.	Ratioskala	
	proportionale T	Absolutskala	

Aufgabe 1.6

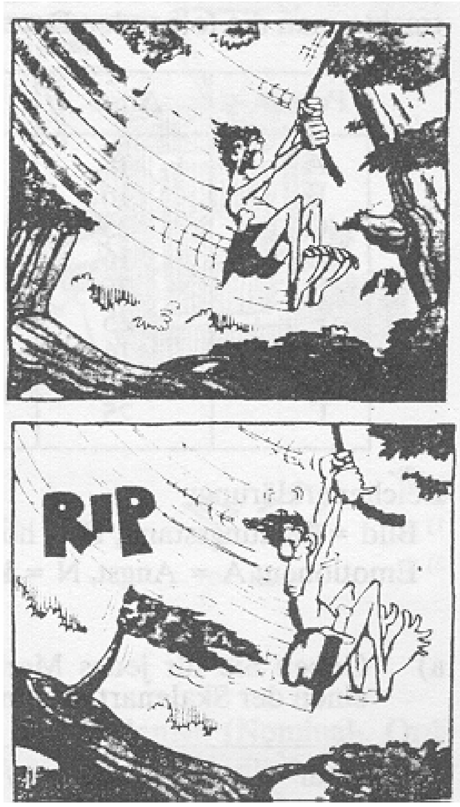
Welches Skalenniveau wird mindestens vorausgesetzt bei der Berechnung der nachfolgend genannten Mittelwerte?

N = Nominalskala
O = Ordinalskala
I = Intervallskala
R = Ratioskala
A = Absolutskala

Bitte Buchstabe in die freie Fläche eintragen

Modus	
Median	
arithmetisches Mittel	
geometrisches Mittel	

Aufgabe 1.7



Schauspieler S (Rollenfach: jugendlicher Naturbursche) ist auf Tarzan-Filme spezialisiert. Gelegentlich spielt er auch in Krimis und Heimatfilmen mit. Sein Produzent führte die folgende Statistik:

Art des Films	Anzahl der Filme	darunter mit S
Tarzan	10	9
Krimis	12	2
Heimatfilme	8	1
Sex-Filme	82	0
Summe	112	12

a) Kreuzen Sie jeweils an, ob eine der folgenden Methoden sinnvoll auf die Tabelle angewendet werden kann.

Berechnung bzw. Darstellung von	sinnvoll	sinnlos
1. arithm. Mittel	[ ]	[ ]
2. Modus (dichtester Wert)	[ ]	[ ]
3. Kreisdiagramm	[ ]	[ ]
4. Block-, Balkendiagramm	[ ]	[ ]

b) Für die Merkmale "Art des Films" (A) und "Anzahl der Filme" (Z) gilt (Richtiges ankreuzen)

das Merkmal ist	gilt für Z	gilt für A
1. stetig	[ ]	[ ]
2. diskret	[ ]	[ ]
3. nominalskaliert	[ ]	[ ]
4. metrischskaliert	[ ]	[ ]

Aufgabe 1.8

Statistiker mögen festgestellt haben, dass zahlreiche Menschen Emotionen gegenüber Statistik und Mathematik haben. Schon der Gedanke an diese Dinge versetzt sie derartig in Angst (A) und Schrecken, dass sie keines klaren Gedankens mehr fähig sind. Nur wenige Menschen reagieren ohne Angst (N). Die Emotion sei zudem nicht mit Alter (in vollendeten Jahren) oder Bildungsstand korreliert. Als Beweis für diese Behauptung betrachte man die folgenden Daten über neun Personen:

Person	Alter	Bild[1)]	Emotion[2)]
A	16	H	A
B	16	G	N
C	25	G	A
D	16	M	A
E	25	H	N
F	25	H	A
G	16	M	A
H	16	G	A
I	25	M	N

Zeichenerklärung:
1) Bild = Bildungsstand, H = hoch, M = mittel, G = gering
2) Emotionen: A = Angst, N = keine Angst,

a) Geben Sie für jedes Merkmal den Skalentyp an und bestimmen bzw. berechnen Sie einen der Skalenart angemessenen Mittelwert!

Merkmal	Skalentyp	Mittelwert
Alter		
Bildungsstand		
Emotion		

b) Die folgenden Begriffe Nr. 1 bis 5

1 Masse, 2 Merkmal, 3 Merkmalsausprägung, 4 Einheit, 5 Maßzahl

möge man den folgenden Worten aus dem Text der Aufgabe zuordnen, indem man die richtige Zahl in den dafür vorgesehenen freien Kasten einträgt:

Bildungsstand		mittleres Alter		Alter 25 Jahre	
Person F		Daten von 9 Pers.		Bildung gering (G)	

Aufgaben zum Kapitel 2

Aufgabe 2.1

Für Umzugsunternehmen und Hausratsversicherungen etc. entwickelte Diplom Kaufmann K aus E die folgende Klassifikation von Einrichtungsgegenständen:

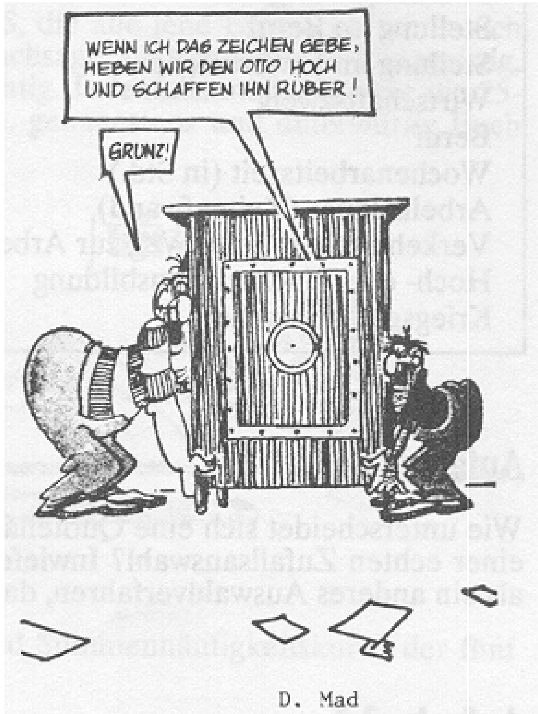
M_x = {Schwermöbel, Leichtmöbel, langlebige Gebrauchsgegenstände, kurzlebige Verbrauchsgüter}

Man ordne die folgenden Gegenstände aus dem Büro des Rechtsanwalts R diese Merkmalsausprägungen zu:

X = {Gesetzesbücher, Tisch, Stuhl, Telefon, Geldschrank, Papierkorb, Teppich, Scheckbuch, Bleistifte, Whisky - Flasche}

Erläutern Sie anhand dieses Beispiels die Begriffe Masse, Einheit, Merkmal und Merkmalsausprägung!

Welche Einwendungen lassen sich gegen die Klassifikation von K erheben? Ist sie vollständig und widerspruchsfrei?



Aufgabe 2.2

Nennen Sie beispielhaft einige Merkmalsausprägungen und den Skalentyp (Nominal-, Ordinal-, Intervall-, Ratioskala) bei der Messung der folgenden Merkmale (Merkmale der Volkszählungen) :

Alter, Familienstand, Staatsangehörigkeit, Beruf, Stellung im Beruf, Schulbildung, Stellung im Erwerbsleben, Wochenarbeitszeit.

Aufgabe 2.3

In der Volks- und Berufszählung vom 27.05.1970 wurden folgende Merkmale erhoben, für die der Skalentyp durch ein Buchstabensymbol anzugeben ist:

N = Nominalskala
O = Ordinalskala
I = Intervallskala
R = Ratioskala
A = Absolutskala

Merkmal	Skalentyp
Alter	
Familienstand	
Eheschließungsjahr	
Religionszugehörigkeit	
Staatsangehörigkeit	
Stellung im Beruf	
Stellung im Erwerbsleben	
Wirtschaftszweig	
Beruf	
Wochenarbeitszeit (in Std.)	
Arbeitsdauer (Zeitaufwand)	
Verkehrsmittel beim Weg zur Arbeit	
Hoch- oder Fachschulausbildung	
Kriegsgefangenschaft	

Aufgabe 2.4

Wie unterscheidet sich eine Quotenauswahl ("Repräsentativer Bevölkerungsquerschnitt") von einer echten Zufallsauswahl? Inwiefern ist eine echte Zufallsauswahl (= Stichprobe) "besser" als ein anderes Auswahlverfahren, das nicht vom Zufall bestimmt ist?

Aufgabe 2.5

Ein Betrieb hat zwei Zweigniederlassungen (A und B). Für die Anzahl der Beschäftigten, das Durchschnittseinkommen (E), Gewinn (G) und Kapital (K) gilt:

Beschäftigte	E	G	K
A $n_A = 400$	1560	300	2000
B $n_B = 300$	1720	800	2000

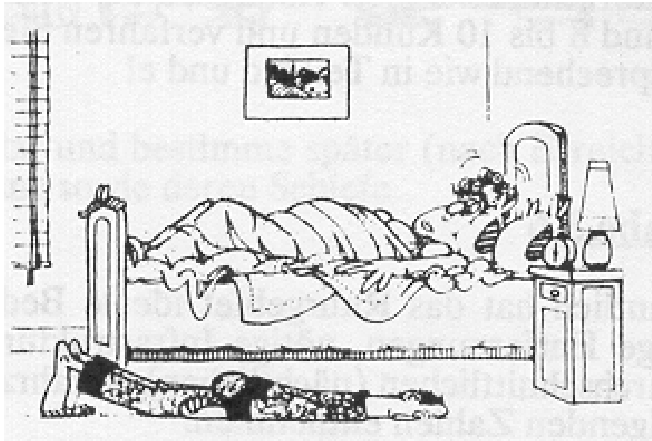
- Wie viele und welche Merkmale sind in dieser Tabelle dargestellt?
- Was sind die Merkmalsausprägungen?
- Welche Größen sind absolute Häufigkeiten und welche sind Merkmalssummen?
- Wie kann man welches Merkmal geeignet graphisch darstellen?
- Wie groß ist das Durchschnittseinkommen der Beschäftigten im Gesamtunternehmen?

Aufgaben zum Kapitel 3

<u>Aufgabe 3.1</u>

Diplom-Kaufmann K aus E heiratete eine Statistikerin S, die alle jene Eigenschaften in sich vereinigte, die man gemeinhin den bösen Statistikern nachsagt: S ist pedantisch, kleingeistig, humorlos und bei alle dem noch dominant und streitsüchtig. Jedenfalls musste K über die 25-tägige Hochzeitsreise, die die beiden in 6 Hotels führte, genauestens und unterwürfig Buch führen:

Güteklasse d. Hotels	Aufenthalts-dauer (Tage)
4 (****)	2
3 (***)	5
2 (**)	8
1 (*)	7
0 (kein Stern)	3



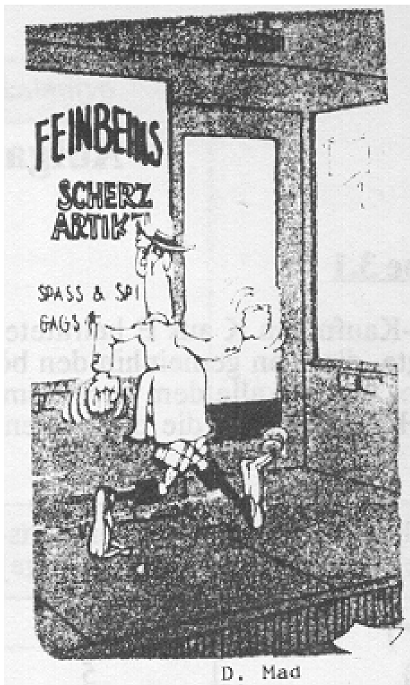
a) Zeichnen Sie die (relative) Häufigkeitsverteilung und Summenhäufigkeitskurve der fünf Güteklassen!

b) Was ist im Falle von a)
* die Zähleinheit (Erhebungseinheit)
* die Häufigkeit
* das Merkmal dieser Tabelle?

Zu bedenken sind Begriffe wie Güteklassen, Hotels, Sterne, Tage usw.

<u>Aufgabe 3.2</u>

Das Bruttoinlandsprodukt des Euro-Währungsgebiets gliederte sich 1997 wie folgt (in Mrd. ECU, Angaben des EZB-Monatsberichts Jan. 99): Privater Verbrauch 2.854, Staatsverbrauch 722, Investitionen 930, Saldo Ausfuhr abzügl. Einfuhr 146. Zeichnen Sie ein Kreisdiagramm.



<u>Aufgabe 3.3</u>

In den letzten 30 Tagen betrat jeweils pro Tag nur die folgende leider zu geringe Anzahl von Kunden das bedeutende Fachgeschäft F:

2, 4, 6, 4, 7, 7, 5, 4, 3, 5,
5, 8, 6, 3, 5, 2, 9, 4, 5, 6,
8, 3, 10, 5, 4, 3, 7, 4, 6, 4

a) Welches Skalenniveau hat die hier betrachtete Variable?

b) Geben Sie die absoluten, relativen und prozentualen Häufigkeiten an!

c) Erstellen Sie eine geordnete statistische Reihe!

d) Zeichnen Sie das Stabdiagramm!

e) Geben Sie die kumulierten absoluten, relativen und prozentualen Häufigkeiten an!

f) Bestimmen Sie die klassierte Verteilung mit den Klassen 0 bis 4 Kunden, über 4 bis 7 Kunden und über 7 bis 10 Kunden und verfahren Sie entsprechend wie in Teil b, d und e!

Aufgabe 3.4

Bekanntlich hat das Ruhrgebiet ideale Bedingungen für die Ausbreitung des Vampirismus (geringe Entfernungen, nötige Infrastruktur, Ballung der Bevölkerung). Aus einer Statistik der durchschnittlichen (nächtlichen) Anfahrzeit eines Vampirs zum nächsten Opfer kann man die folgenden Zahlen entnehmen:

Fahrzeit (Minuten)	Anzahl der Opfer
0 bis unter 5	100
5 bis unter 10	400
10 bis unter 20	300
20 bis unter 60	150
über eine Stunde	50

Stellen Sie diese Daten mit Angabe der relativen Häufigkeiten geeignet graphisch dar! Bestimmen Sie die Summenhäufigkeitskurve und zeichnen Sie diese!

Aufgabe 3.5

Die Zahl der in einem Einzelhandelsgeschäft zwischen 9 und 9.30 Uhr eintreffenden Kunden wurde an 20 Tagen (t = 1,...,20) registriert. Man erhielt folgende Einzelwerte für die Anzahl x der Kunden (darunter y Frauen):

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x	0	1	1	2	4	1	0	1	3	3	1	0	2	3	2	1	1	2	0	2
y	0	0	0	1	1	1	0	0	1	2	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1

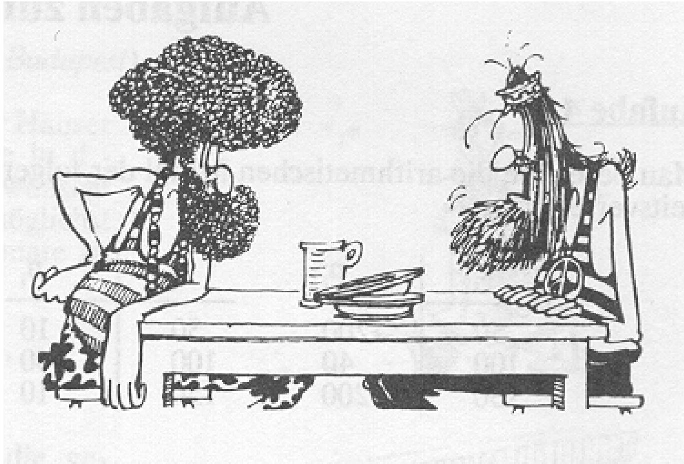
a) Stellen Sie die Daten als Zeitreihe graphisch dar.

b) Gruppieren Sie die Daten und ermitteln Sie die absoluten, relativen Häufigkeiten, sowie die kumulierten absoluten und relativen Häufigkeiten von x.

Aufgabe 3.6

In einem Studentenheim gäbe es ausschließlich Wohngemeinschaften für x_i = 2, 3, 4 und 6 Studenten mit den Häufigkeiten n_i:

x_i	n_i
2	40
3	30
4	25
6	5



Man stelle die Häufigkeitsverteilung graphisch dar und bestimme später (nach Erreichen von Kap. 5) Mittelwert und Varianz dieser Verteilung sowie deren Schiefe

Aufgabe 3.7

Bei der Fußballweltmeisterschaft 1986 in Mexiko wurden von den 24 teilnehmenden Mannschaften in der Vorrunde insgesamt 83 Tore geschossen. Jede Mannschaft absolvierte drei Spiele, wofür sich folgende Verteilung der Tore erstellen lässt (von...bis unter...):

Anzahl der Tore	0 - 2	2 - 4	4 - 6	6 - 10
absolute Häufigkeit	5	8	8	3

a) Das betrachtete Merkmal ist

	diskret		stetig		extensiv		häufbar

b) Stellen Sie die Häufigkeitsverteilung geeignet graphisch dar!

c) Wieviel Prozent der teilnehmenden Mannschaften haben sieben oder weniger, wie viel mehr als vier Tore geschossen?

d) Angenommen, Sie kennen die genaue Verteilung der Anzahl der Tore:

Anzahl der Tore	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
absolute Häufigkeit	1	4	5	3	4	4	1	0	0	2

Welche Veränderungen würden sich gegenüber der ursprünglichen Aufgabenstellung hinsichtlich
- der empirischen Verteilungsfunktion
- des arithmetischen Mittels
- des Medians ergeben?

Aufgaben zum Kapitel 4

Aufgabe 4.1

Man berechne die arithmetischen Mittel der folgenden Verteilungen und zeichne die Häufigkeitsverteilungen!

x_i	n_i
50	200
100	40
150	200

x_i	n_i
50	10
100	60
150	10

x_i	n_i
70	60
80	80
440	10

Aufgabe 4.2

Man berechne das arithmetische Mittel für

a) die Zahlenfolge 1, 3, 5, 6, 9, 9, 12, 13, 15, 17 und für die klassierte Verteilung (von...bis unter)

x_j	n_j
1 - 5	3
6 - 12	4
13 - 17	3

b) für die Zahlenfolge 1, 6, 6, 11, 1, 1, 6, 11, 6, 11 und die unklassierten Verteilung (gruppierte Daten)

x_i	n_i
1	3
6	4
11	3

Aufgabe 4.3

Sie kaufen an einem Stand zu 1 DM Apfelsinen (3 Stück zu 1 DM) und an einem anderen Stand ebenfalls für 1 DM, wobei Sie jedoch 5 Stück erhalten. Wie groß ist dann der Durchschnittspreis der Apfelsinen?

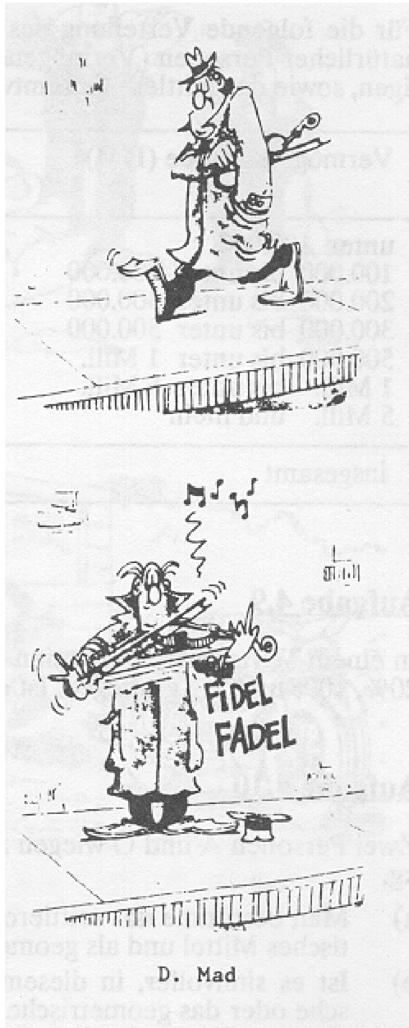
Aufgabe 4.4

Die 200 Beschäftigten einer Arbeitsstätte erhalten einen monatlichen Durchschnittslohn von 2.200 DM. Aufgrund einer Lohnverhandlung soll das Monatsgehalt jedes Beschäftigten um 10% angehoben werden, und es soll ein einmaliges Urlaubsgeld in Höhe von 120 DM gewährt werden. Wie groß ist das durchschnittliche Gehalt?

Aufgabe 4.5

(Der optimale Standort des Stehgeigers von Budapest)

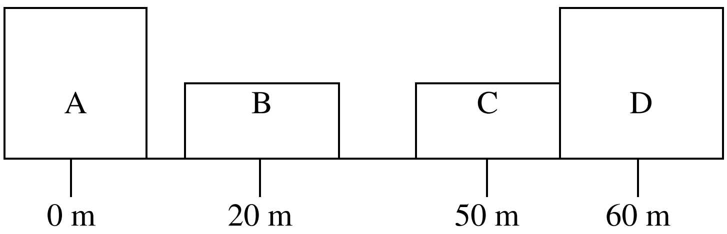
László Varga möchte den Bewohnern der Häuser A bis D der Bartók-Straße seine Sonate in d-moll op. 125 zu Gehör bringen. Dabei wünscht der Tonkünstler, dass alle 25 Familien möglichst gleich gut die Gelegenheit haben, die Sonate zu hören und zu würdigen.



An welcher Stelle sollte sich Varga stellen,

- um im "Schwerpunkt" zu stehen
- um von den potentiellen Hörern die geringst mögliche Entfernung zu haben

wenn die Straße wie folgt aussieht:



In den Häusern A und D wohnen jeweils 7 Familien, im Haus B 6 und im Haus C genau 5 Familien. Man erkläre auch anhand dieser Aufgabe, was mit der "Schwerpunkteigenschaft" des arithmetischen Mittels gemeint ist!

Aufgabe 4.6

Dem geisteskranken Diplom-Kaufmann K aus E sind von seinem früheren Studium nur noch Kenntnisse aus den oft als geisttötend empfundenen Fächern Buchhaltung und Statistik verblieben, wobei sich jedoch K häufig verrechnet. Er verbucht jeden Tag die Uhrzeitangaben im Radio in einem Staffelkonto, zählt die Zeitangaben zusammen und berechnet den Mittelwert. Danach zieht K von jeder Zeitangabe den Mittelwert ab und addiert die Ergebnisse. Wie kann man leicht feststellen, ob K sich verrechnet hat?

Aufgabe 4.7

Für die folgende Verteilung des Gesamtvermögens unbeschränkt vermögensteuerpflichtiger natürlicher Personen (Vermögensteuerstatistik 1983) ist eine graphische Darstellung anzufertigen, sowie das mittlere Gesamtvermögen zu berechnen.)

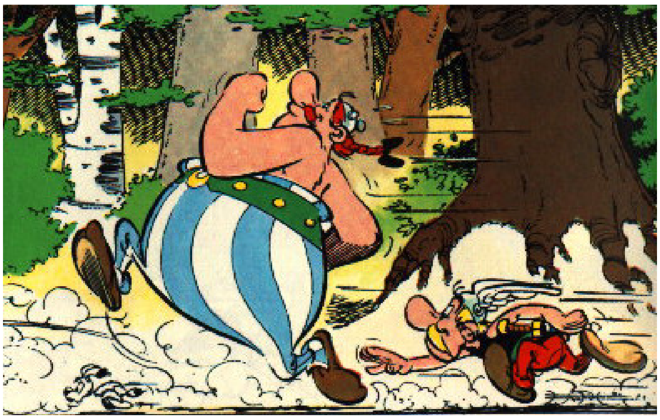
Vermögensgruppe (DM)	Steuer-pflichtige	Gesamtvermögen (Mill. DM)
unter 100.000	24.725	2.156
100.000 bis unter 200.000	136.557	20.919
200.000 bis unter 300.000	134.444	33.334
300.000 bis unter 500.000	163.020	63.092
500.000 bis unter 1 Mill.	126.625	87.010
1 Mill. bis unter 5 Mill.	72.576	134.846
5 Mill. und mehr	9.312	138.080
insgesamt	667.259	479.437

Aufgabe 4.8

In einem Wirtschaftszweig seien die Löhne und Gehälter in den letzten vier Jahren um 10%, 20%, 10% und 5% gestiegen. Ist es sinnvoll, hier das geometrische Mittel zu berechnen?

Aufgabe 4.9

Zwei Personen A und O wiegen $x_A = 35$ kg und $x_O = 140$ kg.



a) Man bestimme das mittlere Gewicht als arithmetisches Mittel und als geometrisches Mittel.

b) Ist es sinnvoller, in diesem Falle das arithmetische oder das geometrische Mittel zu berechnen? (Deuten Sie anschaulich die Rechenergebnisse!)

c) Warum ist das geometrische Mittel kleiner als das arithmetische Mittel? Wann wären beide Mittelwerte gleich groß?

Aufgabe 4.10

Auf einer Rennstrecke von 12 km Länge erreicht der Rennfahrer R verschiedene Durchschnittsgeschwindigkeiten und zwar in den drei Runden

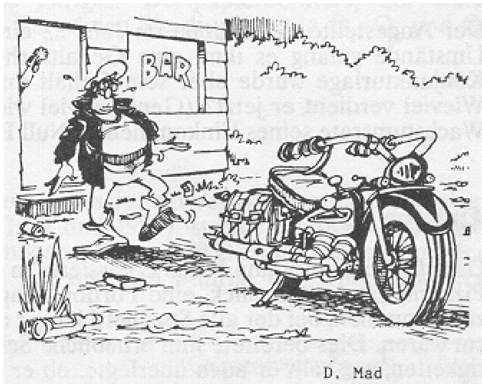
erste Runde	240 km/h
zweite Runde	200 km/h
dritte Runde	160 km/h

Die Gesamtfahrzeit für drei Runden (36 km) beträgt 11,1 Min (also 0,185 Std.). Wie groß ist die Durchschnittsgeschwindigkeit?

Aufgabe 4.11

Der statistisch wenig vorgebildete Bauunternehmer B beschäftigt zwei Betonarbeiter, die jeweils bestimmte Flächen F auszubetonieren haben. Der eine braucht für eine Fläche 3 Stunden, der andere 5 Stunden. B glaubt nun, dass sie zusammen im Durchschnitt jeweils 4 Stunden an einer Fläche F betonieren werden. Er irrt sich! Warum?

Aufgabe 4.12



Der Rocker R kam leider nie in den Genuss, eine Statistikvorlesung zu hören. Es gelingt ihm deshalb nicht das folgende Problem zu lösen:

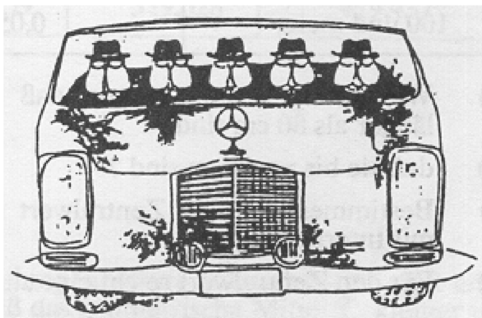
R möchte auf der Hin- und Rückfahrt zu seiner 4 km entfernten Stammkneipe eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 60 km/h fahren. Dabei traut er sich auf dem Rückweg nur eine Geschwindigkeit von 30 km/h zu. Muß er deshalb auf dem Hinweg 90 km/h fahren?

Aufgabe 4.13

Berechnen Sie den Zentralwert

a) im Falle der Reihe (n=7) 5, 8, 10, 12, 13, 16, 20
b) im Falle der Reihe (n=8) 5, 8, 10, 12, 13, 16, 20, 21

Aufgabe 4.14



Im fünfköpfigen Vorstand der X - AG sitzen verdiente Männer im Alter von 48, 53, 53, 55 und 62 Jahren. Man plant eine Geschäftsreise nach Bangkok. Das älteste Vorstandsmitglied kann jedoch leider nicht mitreisen, weil ihm sein Arzt wegen seines hohen Blutdrucks eindringlich von der weiten Reise abgeraten hat. Außerdem war seine Frau aufgrund ihrer in der Illustrierten gewonnenen Erkenntnisse dagegen. An seiner Stelle kann nun ein junger dynamischer Prokurist im Alter von 35 Jahren mitreisen.

Wie ändert sich der Zentralwert und das arithmetische Mittel der Altersverteilung der reisenden Geschäftsleute?

Aufgabe 4.15

Man berechne das arithmetische Mittel und den Zentralwert (mit Interpolation) der normalerweise geleisteten Wochenarbeitszeit in der BRD 1996 (Erwerbstätige in 1000)[1]!

Stunden	Männer	Frauen	gesamt
unter 21	283	2051	2334
21 bis unter 36	1556	2644	4200
36 bis unter 41	14486	8010	22496
41 und mehr	4036	1171	5207

[1] Quelle: StJB 1997

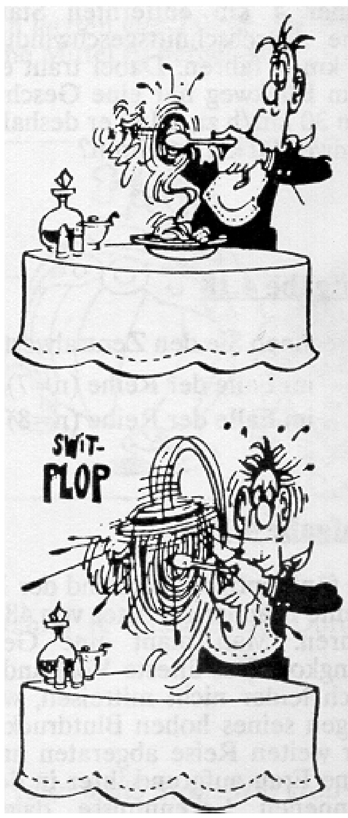
Geben Sie auch das 1. und 3. Quartil an! Bei der Berechnung des arithmetischen Mittels sind die Klassengrenzen mit 15 und 50 Stunden zu schließen.

Aufgabe 4.16

Der Angestellte A verdiene im Jahr .... ein Monatsgehalt von 1200 DM. Durch glückliche Umstände gelang es ihm, eine Gehaltserhöhung von 20% zu erhalten. Wegen schlechter Konjunkturlage wurde aber sein Gehalt im darauffolgenden Jahr wieder um 20% gekürzt. Wieviel verdient er jetzt? Wie groß ist die durchschnittliche Wachstumsrate seines Einkommens? (Null Prozent?)

Aufgabe 4.17

Dem Diplomkaufmann K aus E passierte in einer Pizzeria das Missgeschick, eine Portion Spaghetti zu bekommen, bei der alle Spaghetti länger als 80 cm waren. Dies bereitete ihm erhebliche Schwierigkeiten, weshalb er auch überlegte, ob er nicht doch besser Ravioli hätte essen sollen. Für die Häufigkeitsverteilung der Spaghettilänge in cm gilt:



Klasse x	h
unter 20	0,15
$20 < x \leq 40$	0,20
$40 < x \leq 60$	0,30
$60 < x \leq 80$	0,20
$80 < x \leq 100$	0,10
100 und mehr	0,05

a) Wie häufig kommt es vor, dass Spaghetti länger als 80 cm sind;

b) dass sie bis zu 60 cm sind?

c) Bestimmen Sie den Zentralwert (Median) mit Interpolation.

d) Für den Zentralwert reicht eine.............Skala der Daten aus.

Aufgabe 4.18

Gegeben sei folgende klassierte Verteilung (b_i = Klassenbreite)

x_i	n_i	h_i	H_i	b_i
0 - 20	10			
20 - 30	30			
30 - 60	20			
60 -100	40			
Σ				

der stündlich vertelefonierten Einheiten eines eifrigen Wertpapierberaters, der seine "Telefonitis" 100 Stunden lang aufzeichnen ließ. Berechnen Sie die Quartile Q_1, Q_2 und Q_3 anhand der Interpolations - Formel.

Aufgabe 4.19

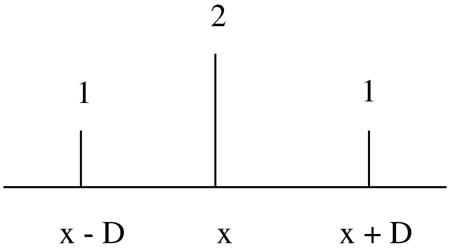
Für die folgende Verteilung des Gesamtvermögens unbeschränkt vermögensteuerpflichtiger natürlicher Personen (Vermögensteuerstatistik 1977 und 1983) ist eine graphische Darstellung anzufertigen, sowie das mittlere Gesamtvermögen 1977 und 1983 zu berechnen (mit den geschätzten Klassenmittelwerten [Klassenmitten m_k] und den wahren Klassenmittelwerten x_k).

Vermögensklasse	Steuerpflichtige		Gesamtvermögen[1)]	
von - bis unter -	1977	1983	1977	1983
< 100.000 DM	26.057	24.725	2.247	2.156
100 - 200.000	114.327	136.557	17.435	20.919
200 - 300.000	102.829	134.444	25.435	33.334
300 - 500.000	118.208	163.020	45.592	63.092
1/2 - 1 Mill.	87.145	126.625	59.841	87.010
1 - 5 Mill.	49.741	72.576	92.973	134.846
> 5 Mill. DM	5.753	9.312	76.105	138.080
insgesamt	504.060	667.259	319.628	479.437

1) in Mill. DM; Quelle: Stat. Jahrbuch 1982, S. 440 und 1989, S. 451

Aufgabe 4.20

a) Gegeben sei die untenstehende Häufigkeitsverteilung (absolute Häufigkeiten 1, 2, 1 und die Merkmalswerte x-D, x, x+D). Zeigen Sie, daß das geometrische Mittel $\bar{x}_G$ kleiner ist als $\bar{x}$, also $\bar{x}_G < \bar{x}$!



b) Berechnen Sie die Varianz für obige Häufigkeitsverteilung!

c) Ein Flugzeug fliege von A nach B bei Rückenwind mit einer Geschwindigkeit von 90+D Knoten (wegen des Rückenwindes ist es schneller als 90 Knoten, D>0). Auf dem Rückflug von B nach A hat es gegen den Wind zu fliegen, so dass es nur eine Geschwindigkeit von 90-D Knoten erreichen konnte (langsamer als 90 Knoten). Auf der Gesamtstrecke (hin und zurück) erreichte es eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 80 Knoten. Wie groß war die Geschwindigkeit des Gegenwinds (Windkomponente)?

Aufgabe 4.21

iplom-Kaufmann K aus E hat ein etwas ungewöhnliches Zahnleiden, weshalb er schon oft von den übrigen Ökonomen (die ja meist wenig feinfühlend sind) seines Betriebes geärgert wurde. Man übertrug ihm wegen der Arbeit mit dem Locher die Registratur. Aber auch bei dem ihm unterstellten Damen des Betriebs fiel es ihm schwer eine Autorität aufzubauen. Er nahm sich deshalb vor, mit statistischen Mitteln hart durchzugreifen:

Seine Mitarbeiterinnen A bis D brauchten sehr unterschiedlich lange um ein und dieselbe Arbeit durchzuführen:

Zeitbedarf (in Minuten): 15, 10, 20, 15

a) Welche Mittelwerte könnte man für die vier Zeitangaben berechnen, wenn es gilt, die in der Zeitangabe (Skala) enthaltende Information voll auszunutzen?

b) Welche Größenbeziehungen gelten unter den von Ihnen vorgeschlagenen Mittelwerten?

c) Vorgriff auf Kap. 5:
Zeigen Sie, dass die durchschnittliche absolut genommene Abweichung der Zeiten der vier Damen untereinander 5 Minuten beträgt! Wie heißt die hiermit errechnete Maßzahl?

Aufgabe 4.22

Beim Bau eines Flugplatzes spielt die "Flughafenbezugstemperatur" (aerodrome reference temperature ART) eine gewisse Rolle. Sie ist im Gesetz definiert als:

> "das monatliche Mittel der täglichen mittleren Temperatur - über 24 Stunden bei halbstündiger Messung - des heißesten Monat des Jahres plus ein Drittel des Unterschieds dieser Temperatur zu dem Mittel der täglichen Maximaltemperatur des gleichen Monats"

Interpretieren Sie diesen Gesetzestext und versuchen Sie den Sachverhalt in einer Formel auszudrücken!

Aufgabe 4.23

Das folgende Beispiel zeigt, dass man evtl. durch Unkenntnis einfachster statistischer Begriffe viel schwächer argumentiert, als es an sich möglich wäre:

> "1835 Mark im Monat aber war das durchschnittliche Nettoeinkommen der 22,8 Millionen Arbeitnehmer im vergangenen Jahr; das heißt, daß allein elf Millionen Arbeitnehmer wesentlich weniger verdient haben als 1800 Mark"
>
> *Herbert Ehrenberg (früherer Arbeitsminister): Unaufhaltsamer Marsch in die Depression, in: DER SPIEGEL, 27.12.1983*

a) Nehmen Sie Stellung zu dieser Schlussweise!

b) Angenommen (was der damaligen Realität etwa entsprach) x = 1800 und $s_x = 1600$ und die Schiefe betrage $SK_{P2} = 15/16 = 0{,}9375$ (Schiefemaß Gl. 5.64), dann verdienen 50 % der Arbeitnehmer weniger als .... DM.

Aufgaben zum Kapitel 5

Aufgabe 5.1

Elf Moskauer Frauen seien Ende des vorigen Jahrhunderts nach der Zahl ihrer Kinder befragt worden. Dabei ergab sich die folgende Reihe: 0, 9, 3, 2, 0, 1, 1, 1, 4, 6, 6. Wie ändert sich die Streuung, gemessen anhand

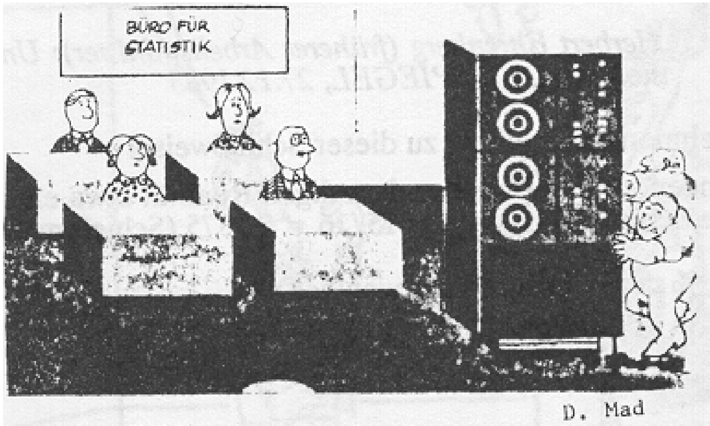
a) des mittleren Quartilsabstands
b) der Spannweite
c) der Varianz und Standardabweichung,

wenn anstelle der oben als elfte Frau genannten Frau (mit 6 Kindern) Feodora Wassilet befragt worden wäre, die seinerzeit 69 Kinder zur Welt brachte und schon mit 56 Jahren starb?

Aufgabe 5.2

In einer statistischen Behörde gilt die Anzahl der pro Tag zu den Akten gegangenen veröffentlichungsreifen Tabellen als Produktivitätsmaßstab. Man will nun die ersten 100 Tage des Einsatzes eines Computers mit 440 früheren Tagen vergleichen. Es ergaben sich folgende Verteilungen:

x_i	früher	jetzt
1	60	5
2	160	10
3	110	25
4	0	20
5	60	0
6	50	0
8	0	40

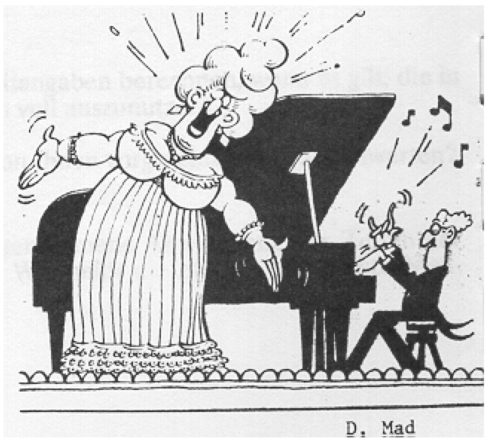


Es stellte sich heraus, dass sich die Produktivität durch den Computereinsatz etwas erhöhte. Wie steht es aber mit der Streuung? Man berechne zu diesem Zweck die durchschnittliche Abweichung um den Zentralwert (d_Z) und um das arithmetische Mittel (d_x^*)!

Aufgabe 5.3

Der Pianist P und die Sopranistin S besuchten auf ihrer Tournee die Zentren deutschen Kulturlebens. Ihre Konzerte waren jedoch sehr unterschiedlich besucht, nämlich in:

München	70 Besucher
Marburg	60 Besucher
Bottrop	20 Besucher
Essen	10 Besucher.



Man berechne Ginis Dispersionskoeffizient (Streuungsmaß)!

Aufgabe 5.4

a) Ist es möglich, dass d_x^* und d_Z ungefähr gleich sind, obgleich $\bar{x}$ und $Z = \tilde{x}_{0,5}$ sehr unterschiedlich sind? Wenn ja, warum gilt dann stets $d_x^* \leq d_x$?

b) Kann es sein, dass man mit d_x zwischen unterschiedlichen Graden der Streuung weniger differenzieren kann als mit d_x^* ?

Anmerkung zu b)

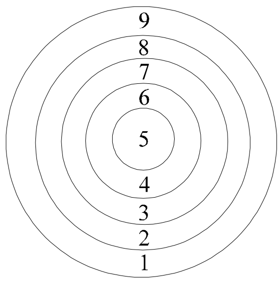
Man betrachte hierzu das folgende Beispiel von Notenverteilungen von vier Schülern (jeweils drei Klausuren):

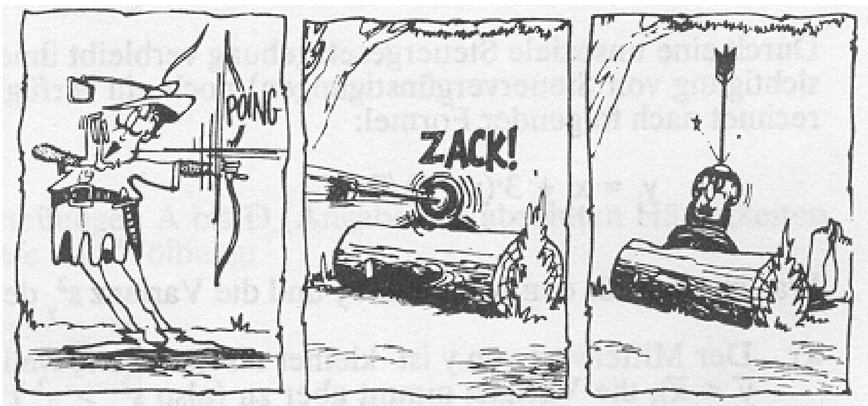
Schüler	Noten
A	3, 4, 5
B	2, 4, 5
C	1, 4, 4
D	1, 4, 5

Anmerkung: Es soll hier, wie bei Aufg. 5.1 davon abgesehen werden, dass Schulnoten (Zensuren) eigentlich nicht intervall-, sondern nur ordinalskaliert sind.

Aufgabe 5.5

Der Bogenschütze B schießt auf eine Zielscheibe, die wie folgt aufgebaut ist:





Er erzielte mit neun Schüssen die folgenden Ergebnisse:

2, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 7, 8

Ein anderer Schütze C erzielte mit acht Schüssen folgende Ergebnisse:

3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 8

Wessen Treffsicherheit ist beständiger? Beantworten Sie diese Frage durch Berechnung der Standardabweichungen!

Aufgabe 5.6

a) Berechnen Sie die Varianz der Zahlenfolge 1, 1, 3, 5, 6, 7, 8, 10.5, 11, 11.5 !

b) Berechnen Sie die Varianz der (klassierten) Verteilung mit der Formel $s^2 = \sum h_k \left(\bar{x}_k - \bar{x}\right)^2$

Größenklasse k	$\bar{x}_k$	n_i
0 bis unter 6	2,5	4
6 bis unter 10	7	3
10 und mehr	11	3

c) In den Teilen a) und b) handelt es sich um die gleichen Daten! Warum weichen die Ergebnisse voneinander ab? (Hinweis: Man beachte Formel 5.11!) Wie groß ist die interne Varianz in diesem Beispiel?

Aufgabe 5.7

"Denn wer da hat, dem wird gegeben, dass er die Fülle habe, wer aber nicht hat, von dem wird genommen, das er hat" (Matth. 13, Vers 12)

Fünf Personen haben die Einkommen x vor Steuerabzug

300 400 600 700 1000

Durch eine unsoziale Steuergesetzgebung verbleibt ihnen nach Steuerabzug (bzw. bei Berücksichtigung von Steuervergünstigungen) noch ein verfügbares Einkommen in Höhe von y, berechnet nach folgender Formel:

$y_i = x_i + 3(x_i - \bar{x}) / 7$

Was gilt nun für den Mittelwert $\bar{y}$ und die Varianz s_y^2 der Größe y ?

a) Der Mittelwert von y ist kleiner als der von x, weil ja eine Steuer abgezogen wird (also $\bar{y} < \bar{x}$), die Varianz nimmt aber zu (also $s_y^2 > s_x^2$), weil die Steuergesetzgebung unsozial ist.

b) Es gilt $\bar{y} = \bar{x} = 600$, und die Varianz wird aber doppelt so groß, genau $s_y^2 = \left(\frac{10}{7}\right)^2 \cdot s_x^2$.

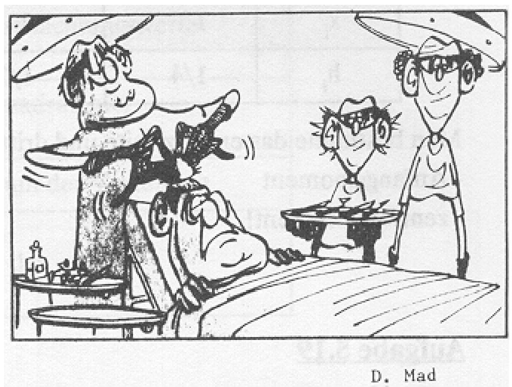
c) Die Varianz von x ist positiv und die von y ist negativ. Die Mittelwerte sind aber eigenartigerweise gleich und zwar $\bar{y} = \bar{x} = 600$.

d) Alle Antworten a) bis c) sind falsch.

Aufgabe 5.8

Um seine Belastung mit Operationen statistisch zu durchleuchten, stellt der berühmte Gehirnchirurg G die Verteilung der Anzahl x der Operationen pro Woche fest:

Klasse	$\bar{x}_k$	n_k	s_k
unter 6	2,5	4	11/4
6 bis 10	7	3	2/3
über 10	11	3	2/3



Man berechne die Gesamtvarianz unter Berücksichtigung der internen Varianz!

Aufgabe 5.9

In einem bestimmten Wirtschaftszweig mit 500.000 Beschäftigten betrage der Durchschnittslohn 880,- DM bei einer Standardabweichung von 200,- DM. Zwischen den Tarifpartnern wird eine Lohnerhöhung um 20% sowie die Zahlung eines einmaligen (jährlichen) Urlaubsgeldes in Höhe von 600,- DM vereinbart. Berechnen Sie

a) den neuen durchschnittlichen Monatslohn ohne Urlaubsgeld sowie die entsprechende Standardabweichung!

b) en neuen durchschnittlichen Monatslohn einschließlich des monatlichen Anteils am Urlaubsgeld sowie die entsprechende Standardabweichung!

Aufgabe 5.10

Man beurteile die folgenden vier Verteilungen A bis D (Angabe der absoluten Häufigkeiten in der Tabelle) hinsichtlich ihrer Schiefe und Wölbung:

x_i	A	B	C	D
60	0	0	4	4
65	4	12	8	4
70	40	24	20	20
75	24	48	24	44
80	20	24	40	20
85	8	12	4	4
90	4	0	0	4

Aufgabe 5.11

Gegeben sei folgende Verteilung:

x_i	1	2	3
h_i	¼	½	¼

Man bestimme das erste, zweite und dritte

- Anfangsmoment
- zentrale Moment!

Aufgabe 5.12

Der folgende Ausdruck $S_H = \left(\sum(x_v - \bar{x}_H)^{-1} / n\right)^{-1} = n / \sum(x_v - \bar{x}_H)^{-1}$ soll als Streuungsmaß vorgeschlagen werden:

- Nach welchem Prinzip ist dieses Streuungsmaß konstruiert (Mittelwert von Abweichungen?)?
- Prüfen Sie ob S_H die Axiome für Streuungsmaße erfüllt und
- kreuzen Sie in der folgenden Tabelle "ja" (J) oder "nein" (N) an:

	Das Streuungsmaß S_H ist	J	N
1.	untauglich, weil S_H immer negativ ist und eine Streuung nicht negativ sein kann		
2.	untauglich, weil S_H wegen der Schwerpunkteigenschaft immer Null ist		
3.	untauglich, weil S_H nicht zu berechnen ist, wenn die Merkmalswerte x_i negativ sind		
4.	tauglich, weil S_H alle die Axiome für Streuungsmaße erfüllt		
5.	tauglich, weil S_H fast alle die Axiome für Streuungsmaße erfüllt		
6.	tauglich, weil S_H das harmonische Mittel der Abweichungen vom harmonischen Mittel ist.		

Aufgabe 5.13:

a) Warum taugt das Kriterium $\sum(x_i - \bar{x})$ nicht als Streuungsmaß?

b) Bei welcher Datenkonstellation ergibt sich stets $s^2 = \sum(x_i - \bar{x})^2 = 0$?

c) Welche der nachfolgenden Aussagen sind richtig? (Richtige Antwort ankreuzen:)

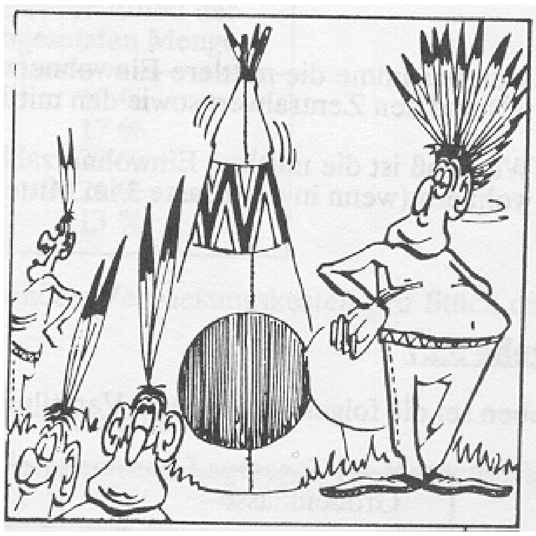
Die Varianz beschreibt

	die Summe der Abweichungen der Einzelbeobachtungswerte untereinander
	das arithmetische Mittel der Abweichungsquadrate der Einzelwerte vom Gesamtmittelwert
	die Streuung der Einzelwerte um das Zentrum der Verteilung
	die durchschnittliche Differenz zwischen der geringsten und der maximalen Abweichung der Einzelwerte vom Mittelwert

Aufgabe 5.14

In einem indianischen Dorf gibt es vier Arten von Zelten: 2-, 4-, 6- und 12 Personenzelte. In jedem Zelttyp leben insgesamt 120 Personen. Die Verteilung ist also wie folgt:

Zelttyp	Häufigkeit	Personen
2		120
4		120
6		120
10		120
Summe	120	480



Man bestimme das arithmetische Mittel, die Varianz und die Schiefe der Anzahl X der Personen je Zelt (der Häufigkeitsverteilung von X). Die Verteilung ist (Richtiges ankreuzen):

	symmetrisch
	zweigipflig
	zweidimensional
	asymmetrisch

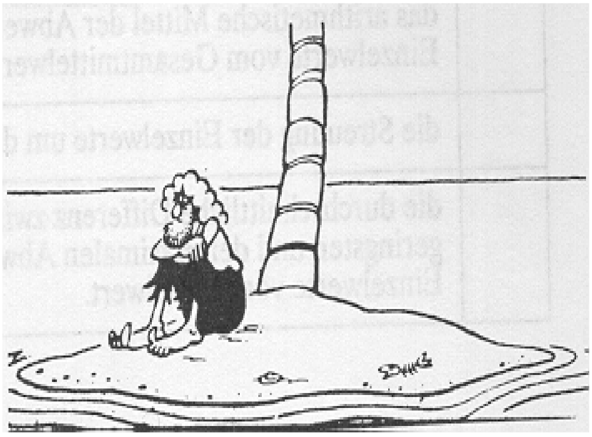
	linkssteil
	stetig
	rechtsschief
	unkonzentriert

	rechtssteil
	diskret

Aufgabe 5.15

Der nordsibirische Großfürst Fjodor gebietet über ein Reich, welches aus 200 Inseln besteht, wovon jedoch nicht weniger als 120 unbewohnt sind. Außerdem liegt sein Reich an einem gefährlichen arktischen Seeweg.

Deshalb gehören auch 40 Schiffbrüchige zu seinen 10200 Untertanen. Die Verteilung der Bevölkerung auf die Inseln hat mithin folgende Gestalt:



Nr.	Größenklasse Einwohner	Anzahl der Inseln
1	0	120
2	1	40
3	2 bis 100	20
4	über 100	20
		200

a) Man bestimme die mittlere Einwohnerzahl je Insel im Fürstentum (arithmetisches Mittel) und den Zentralwert sowie den mittleren Quartilsabstand.

b) Wie groß ist die mittlere Einwohnerzahl der 20 größten Inseln mit jeweils über 100 Einwohnern (wenn in der Klasse 3 im Mittel 51 Einwohner auf einer Insel wohnen)?

Aufgabe 5.16

Gegeben sei die folgende klassierte Verteilung:

Größenklasse	Einzelwerte
1 bis unter 4	1, 2, 3
4 bis unter 10	6, 6, 7, 9
10 bis unter 14	13, 10, 13

Berechnen Sie

a) Mittelwerte und Varianzen der einzelnen Größenklassen!

b) Gesamtmittelwert und Gesamtvarianz!

c) Die Varianz der Mittelwerte der drei Größenklassen!

Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Ergebnissen?

Aufgabe 5.17

Für die Lohnempfänger eines Unternehmens mit zwei Betrieben liegen folgende Angaben zur Einkommensverteilung vor:

Betrieb	Anzahl der Lohnempfänger	x_i	s_i^2
1	2500	1200	160000
2	7500	1600	200000

Berechnen Sie $\overline{x}$ und s^2 der Einkommensverteilung für das gesamte Unternehmen!

Aufgabe 5.18

In einem Unternehmen fallen beim Absatz von 5 ausgewählten Erzeugnissen unterschiedliche Verpackungskosten an.

Erzeugnis	Verpackungskosten pro Stück	relativer Anteil der abgesetzten Menge
A	4,15 DM/Stück	10%
B	3,25 DM/Stück	17%
C	2,95 DM/Stück	39%
D	2,85 DM/Stück	21%
E	3,50 DM/Stück	13%

a) Berechnen Sie die durchschnittlich anfallenden Verpackungskosten pro Stück dieser 5 Erzeugnisse insgesamt.

b) Geben Sie Median und Modus an!

c) Berechnen Sie Standardabweichung und Variationskoeffizient!

d) In welchem Bereich müsste aufgrund der Fechnerschen Lageregel der Momentenkoeffizient der Schiefe liegen?

Aufgabe 5.19

Eine Computerauswertung zur Dickenmessung (in mm) von Drähten ergibt für zwei zu vergleichende Prüfproben u.a. folgende statistische Maßzahlen:

Prüfprobe I		Prüfprobe II	
Mittelwert	11,6	Mittelwert	10,8
Varianz	23,1	Standardabweichung	0,9
Schiefe	0	Modus	9,5
Wölbung	-0,78	Schiefe	+0,95

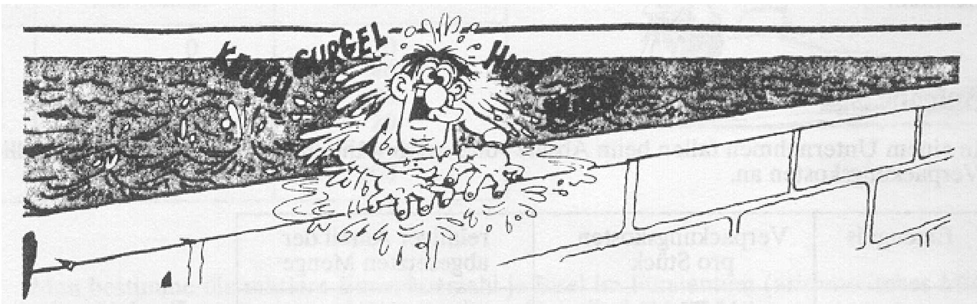
a) Interpretieren Sie die Maßzahlen sachbezogen (Angabe der Einheiten)!

b) Vergleichen Sie beide Verteilungen und skizzieren Sie diese grob!

c) Welchen Wert haben Median und Modus der Prüfprobe I?

Aufgabe 5.20

Diplom Kaufmann K aus E buchte eine besonders preisgünstige Mittelmeerkreuzfahrt. Widrige Umstände und erlittene Unbill ließen in ihm jedoch den Entschluss reifen, solche Reisen hinfort nicht mehr zu unternehmen: nach drei Tagen erreichte er als einer der wenigen Überlebenden eine Kaimauer des Hafens von Genua:



Im anschließenden Schadensersatzprozess legte das Reisebüro ein Umfrageergebnis vor, wonach die Befragten vor und nach der heutzutage so beliebten "Abenteuerreisen" eine sehr unterschiedliche Neigung zu solchen Veranstaltungen zu erkennen gaben, und zwar anhand einer 7-Punkte Skala mit 5-er Schritten von 0 (wenig beliebt) bis 30 (sehr beliebt):

vorher		nachher	
x_i	n_i	x_i	n_i
0	0	0	2
5	4	5	4
10	40	10	10
15	24	15	12
20	20	20	20
25	8	25	2
30	4	30	0

Kann man der Statistik entnehmen:

- ein (verglichen mit vorher) höheres Niveau der Beliebtheit nach einer solchen Reise (Mittelwert!)?
- eine geringe Aussagefähigkeit, etwa wegen einer nach Teilnahme an einer solchen Reise zunehmenden Streuung?
- eine Veränderung der Meinungen aufgrund unterschiedlicher Schiefe?

Aufgaben zum Kapitel 6

Aufgabe 6.1

150 Angehörige eines primitiven Volksstammes gehen auf die Jagd nach Federvieh. Ihre Beute beträgt 300 Wildgänse. Durch das an sich nur bei primitiven Völkern bekannte Gerangel um Geld, Gut und Prestige entstand eine etwas ungleiche Verteilung der Beute. Durch Eingreifen des Häuptlings konnte jedoch noch verhindert werden, dass einer leer ausging. Es bekamen jeweils n_i Personen x_i Gänse:

x_i	1	2	3	4
n_i	60	45	30	15

Man zeichne die Lorenzkurve. Wie sähe die Lorenzkurve aus, wenn jeder von der Beute gleichviel bekommen hätte?

Aufgabe 6.2

Drei Unternehmen A, B, C teilen sich den heiß umkämpften Markt für X zu gleichen Teilen. Durch die Fusion von A mit B steigt die relative Konzentration (Disparität) gemessen mit dem Gini-Koeffizienten D_G

von D_G =
auf D_G = ...!

Vier Unternehmen A, B, C, D haben gleiche Marktanteile auf dem Y-Markt. Durch die Fusion von A mit B steigt D_G

von D_G =
auf D_G = ...!

Aufgabe 6.3

Diplom-Kaufmann K aus E hat als Einzelhandelsunternehmer der Schreibwarenbranche zwar einen bescheidenen, aber doch von Null verschiedenen Anteil am Produktivvermögen. Als politisch engagierter Akademiker interessiert ihn jedoch die ungleiche Vermögensverteilung im ganzen, denn in ihr sieht er den Hauptgrund seines mangelnden unternehmerischen Erfolgs.

Aus einem Buch[1)] erfährt er folgende Daten: (x = Klassenmitte in DM, n = Anzahl der Personen in Mill.)

Vermögensgruppe	$\overline{x}$	n
nur Schulden	-7000	3
kein Vermögen	0	1
0 bis 16000	5000	26
16000 bis 100000	50000	28
über 100000 DM	435000	2

Zahlen vereinfacht nach Mierheim/Wicke, Die personelle Vermögensverteilung, Berlin 1979, S.60

a) Hiernach haben 3 Mill. Personen kein positives Nettovermögen (= Forderungen - Schulden), sondern nur Schulden. Ihr Anteil am Vermögen ist folglich (richtige Antwort ankreuzen)

	negativ		null		positiv

und die Lorenzkurve, die sich aus obigen Daten berechnen läßt

	verläuft auch im negativen Bereich ($Q < 0$)
	verläuft nur im positiven Bereich ($Q \geq 0$)
	schneidet die Abszisse
	schneidet die Gleichverteilungsgerade.

b) Man bestimme die Lorenzkurve und Ginis Disparitätsmaß für die obigen Daten!

Aufgabe 6.4

Im Lande A erhalten 70% der Bevölkerung 10% des Volksvermögens und im Lande B entfällt auf 80% der Bevölkerung genau 20% des Volksvermögens. In welchem Land ist die Vermögenskonzentration gemessen anhand des Gini-Koeffizienten D_G größer?

Aufgabe 6.5

Trotz neuer praxisrelevanter wissenschaftlicher Erkenntnisse konnte Prinzessin Rana von Esculenta (E) nicht umhin, an die Existenz des Froschkönigs zu glauben. Sie war jedoch gleichwohl rationalem Denken insofern aufgeschlossen, als sie bestrebt war, ihre Kuss-Aktivität zunächst auf solche Teiche zu konzentrieren, in denen eine größere Anzahl von Fröschen zu erwarten war. Sie beauftragte deshalb den Statistiker Pedro de las Tablas mit einer Schätzung des Froschbestands in Esculenta:

	Frösche im Teich	Anzahl der Teiche
1	0	120
2	1 bis 100	60
3	über 100	20

Pedro de las Tablas vermutet, dass sich in den Teichen der Größenklasse 2 und 3 jeweils insgesamt 3000 Frösche befinden, so dass das Fürstentum Esculenta insgesamt 6000 Frösche besitzt.

a) an bestimme (berechne und zeichne) die Lorenzkurve!

b) Berechnen Sie Ginis Disparitätsmaß D_G (Konzentrationsverhältnis von Gini)!

Aufgabe 6.6

In einem islamischen Dorf lebt eine Familie mit 8 Kindern, davon sind 4 männlich und 4 weiblich. Das an die Kinder zu vererbende Vermögen von 1200 Dinare soll getreu nach den Regeln des Korans vermacht werden:

> *"Und wenn die Geschwister Männer und Frauen sind, so soll ein Mann so viel erhalten wie zwei Frauen".*

(Sure 4, Vers 175)

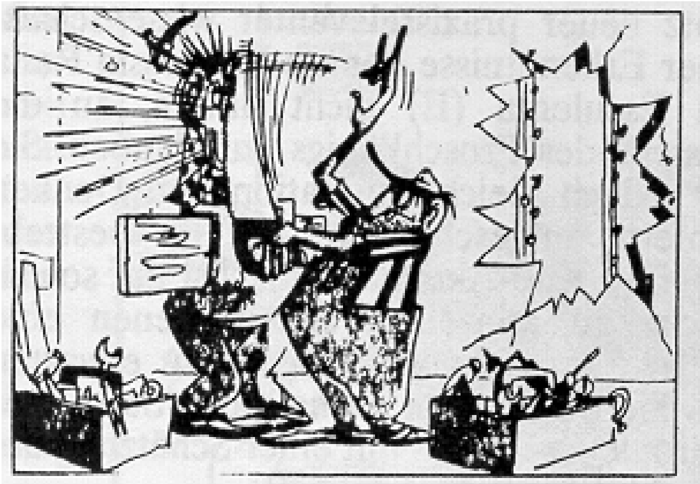
Man bestimme die sich bei Befolgung des islamischen Erbrechts ergebende Lorenzkurve!

Aufgabe 6.7

In einem Betrieb mit 20 Arbeitnehmern gibt es nur Zank und Krach, weil es drei Lohngruppen L_1, L_2 und L_3 mit sehr unterschiedlichen Löhnen gibt: $L_1 < L_2 < L_3$. Der Durchschnittslohn beträgt 900. Von der Lorenzkurve seien zwei Punkte bekannt

.

Punkt	H(x)	Q(x)
A	0,4	0,2
B	0,8	0,6



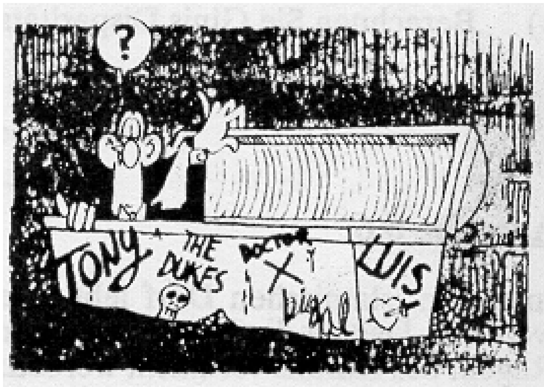
a) Man bestimme die drei Löhne L_1, L_2, L_3.

b) Man bestimme den Variationskoeffizient V der Löhne.

c) Man bestimme das Disparitätsmaß D_G von Gini für die obigen Daten (Punkte A und B).

d) Angenommen vom Punkt B sei nur die Koordinate H bekannt (H = 0,8), aber nicht der Q-Wert. Bestimmen Sie den Punkt B und D_G so, dass die Voraussetzungen der Lorenzkurve nicht verletzt werden und die Disparität maximal wird.

Aufgabe 6.8



Zu den Vorteilen einiger neuer Bundesländer gehört die sich z.T. schon rasch entwickelnde Infrastruktur und die Ballung (Konzentration) der Wohnbevölkerung auf einige Großstädte. Angenommen, eines Tages sei völlig unerwartet Graf Dracula aus Polen kommend in Sachsen eingereist, vor allem wegen der genannten Vorteile unter dem Aspekt des Vampirismus. Aufgrund gewisser Eingewöhnungsschwierigkeiten und weil Sachsens Kultur dem Vampirismus schon immer fremd gegenüberstand, konzentrierte sich die Aktivität des Grafen und seiner Kollegen auf die Gebiete Görlitz und Bautzen. Einer Statistik des Sächsischen Statistischen Landesamtes konnte man entnehmen:

Gebietseinheit		Einwohner in 1000	Vampire
DD	Dresden	520	80
L	Leipzig	540	40
GR	Görlitz	80	200
BZ	Bautzen	50	120
übriges	Sachsen	3810	60
insgesamt		5 Mill.	500

Geben Sie die Punkte der Lorenzkurve an, d.h. bestimmen Sie die Werte H_i und Q_i um die Lorenzkurve zu zeichnen (Skizze genügt) und berechnen Sie das Disparitätsmaß von Gini!

Aufgabe 6.9

Gleich nachdem die Regierung, unter dem Einfluss der entsprechenden Lobby, zur Überzeugung gelangte, die Professoren seien unterbezahlt, entbrannte ein dermaßen heftiger Streit unter den drei, etwa gleich stark vertretenen Professorentypen, dass die zusätzlichen Gelder nur noch nach dem Gießkannenprinzip verteilt werden konnten. Bisher mögen die Gesamteinkünfte X der Professoren im Verhältnis 1/4 : 1/3 : 5/12 auf die drei Professorenarten aufgeteilt worden sein, und es werde nur ein Betrag in Höhe von $1/4 \cdot x$ zusätzlich nach dem Gießkannenprinzip verteilt. Wie ändern sich die Anteile der drei Gruppen, und wie verringert sich die Disparität (relative Konzentration) der Einkommen?

Aufgabe 6.10

Gegeben sei die folgende Einkommensverteilung:

Einkommensklasse	Anzahl d. Personen
0 - 1000	100
1000 - 2000	50
2000 - 3000	30
3000 und mehr	20

In jeder Einkommensklasse ist das Gesamteinkommen 80.000 DM.

a) Berechnen (tabellarische Darstellung) und zeichnen Sie die Lorenzkurve. Berechnen Sie außerdem die Steigung der Lorenzkurve für jede der 4 Klassen.

b) Berechnen Sie den Gini-Koeffizienten.

c) Ermitteln Sie den Anteil der 25% reichsten Einkommensbezieher am Gesamteinkommen.

d) Welche der nachfolgenden Aussagen trifft zu (mehrere richtige Antworten möglich)?

Die Lorenzkurve kann die Gleichverteilungsgerade (GVG)

	schneiden		nicht schneiden
	tangieren		nicht tangieren

Aufgabe 6.11

a) Man bestimme anhand der Tabelle von Aufgabe 5.15 die Größen H und Q für die Lorenzkurve.

b) Wenn man die erste Größenklasse (Nr. 1) der Inseln bei der Berechnung der Lorenzkurve wegließe, dann wird die Konzentration (Disparität)

	sich vergrößern		sich verringern
	gleichbleiben		kann man nicht sagen

c) Kann man dies tun, d.h. einfach die erste Größenklasse weglassen, weil auf diesen Inseln niemand wohnt?

d) Wenn man die vierte Größenklasse weiter untergliedern würde, dann würde sich die Konzentration in der Regel

	sich vergrößern		sich verringern

Sie könnte allerdings auch gleichbleiben und zwar dann, wenn........:

e) Dank der weit über die Grenzen Russlands gepriesenen Großmut Fjodors wurden alle Schiffbrüchigen, die allein auf einer Insel auf Rettung warteten von der fürstlichen Marine gefunden und in die Hauptstadt (1000 Einwohner) gebracht. Wie ändert sich die Konzentration?

Aufgabe 6.12

Gegeben seien die folgenden offenbar unsinnigen Daten:

	Anteil der Betriebe (h_i)	Umsatzanteile (q_i)
Kleinbetriebe	0,5	0,2
Mittelbetriebe	0,2	0,6
Großbetriebe	0,3	0,2

Wie kann man leicht zeigen, dass die Einteilung in Klein-, Mittel- und Großbetriebe nicht stimmen kann?

Aufgabe 6.13

Es sei x das Durchschnittseinkommen ($\bar{x} = 3000,-$ DM) und es gelte $H(\bar{x}) = 0{,}75$. Ferner sei Z der Zentralwert (Median) und die Steigung der Lorenzkurve im Punkt $H(x=Z)$ ist 0,8.

Man bestimme den Median und stelle fest, ob (nach der Fechnerschen Lageregel) die Einkommensverteilung links- oder rechtssteil ist.

Aufgabe 6.14

Gegeben seien drei Einkommensklassen $E_1 < E_2 < E_3$ und ein Durchschnittseinkommen in Höhe von DM 2000,-. Es gelte $h_1 = 0{,}5$, $h_2 = 0{,}4$ und $h_3 = 0{,}1$ und für die Steigungen s der Lorenzkurve $s_1 = 0{,}4$, $s_2 = 0{,}75$ und $s_3 = 5$. Man bestimme die Einkommen E_1, E_2 und E_3!

Aufgabe 6.15

Es gibt gute Gründe dafür, anzunehmen, dass der Mann, der (die Frau, die) das erste Blasinstrument erfand in einer Zeit lebte, in welcher die Freizeit (F), die Musikalität (M), die Intelligenz (I) und der Wohlstand (W) recht ungleich verteilt waren.

a) Für einige dieser Merkmale wäre es nicht sinnvoll, die Lorenzkurve zu bestimmen. Für welche Merkmale? Warum?

b) Das damals übliche Höhlenleben bedingte es, dass sich z.T. größere Gemeinschaften bildeten. Eine steinzeitliche Volkszählung der Bewohner (= Bew.) der Höhlen in der Region R ergab:

Höhlen mit .... Bew.	Anzahl der Höhlen
1 - unter 6	50
6 - unter 10	20
10 - unter 30	10
30 - 70	20

Man bestimme die Lorenzkurve und mache eine Skizze ihres Verlaufs!

c) Wie verändert sich die relative Konzentration durch folgende Vorgänge:

- Der Mann, der die Flöte erfand, möge ein Einzelgänger gewesen sein (eine Höhle für eine Person bewohnt haben). Es spricht für das kulturelle Niveau der Region R, dass man ihn ehrenvoll in eine Höhle zu 60 Personen aufnahm. In seine frühere Höhle zog der Urheber obiger Statistik, der aus seiner Höhle zu 5 Personen hinausgeworfen wurde.
- Später gründet man eine eigene Höhle für die 100 Flötenspieler, die alle aus Höhlen mit 3, 4 oder 5 Personen kamen.

d) Wieder einige Jahre später kam es zu einem Aufstand der 1400 Unmusikalischen gegen die 100 "privilegierten" Flötenspielern, der zu einer Revolution führte. Flöten wurden verboten, 500 Menschen starben, die verbliebenen 1000 Menschen bildeten neue Großhöhlen (H_1 bis H_5) wie folgt

Höhle	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5
Bewohner	200	100	300	100	300

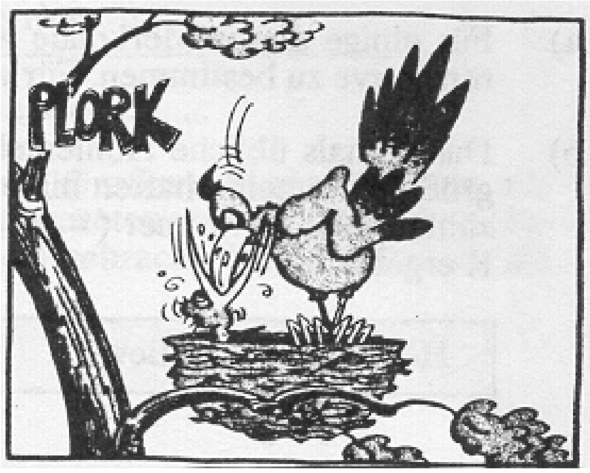
Man bestimme die Lorenzkurve!

Aufgabe 6.16

> *"Je mehr man altert, desto mehr überzeugt man sich, dass Seine heilige Majestät der Zufall gut drei Viertel der Geschäfte dieses miserablen Universums besorgt."*

(Friedrich der Große)

Bekanntlich hat die reaktionäre Natur den Kindersegen recht ungleich verteilt, so dass die Kinderzahl je Elternpaar auch bei den Vögeln erheblich schwankt. Hinzu kommt, dass gelegentlich auch Eier aus dem Nest fallen, so dass dieses ganz ohne Jungtiere sein mag. Für 10 der Nester im Garten des Diplom Kaufmanns K aus E möge jeweils die folgende Anzahl von Jungen gezählt worden sein:



0, 3, 2, 2, 3, 1, 0, 1, 1, 2

a) Man bestimme den Zentralwert und das arithmetische Mittel.

b) Die Verteilung ist (Richtiges ankreuzen):

	symmetrisch		linkssteil
	rechtssteil		linksschief

c) Bei Gleichverteilung der Jungtiere müssten in jedem Nest ...... Junge sein.

d) Man zeichne die Lorenzkurve und berechne das Konzentrationsverhältnis von Gini!.

e) Der Zufall will es, dass die Kinderzahl in der Natur nicht bei allen Eltern gleich ist, sondern schwankt. Das hat zur Folge, dass die Varianz

	null		negativ		positiv

und deshalb notwendig auch die Konzentration (nach Gini)

	null		negativ		positiv
	beliebig (es gibt keinen Zusammenhang mit der Varianz)				

sein muß

Aufgabe 6.17

Gegeben sei die klassierte Verteilung

Größenklasse j	Klassenmittel x_i	relative Häufigkeit (h_j)
0 bis 8	6	0,5
9 bis 16	10	0,3
über 16	20	0,2

Man berechne den Gini-Koeffizient D_G für diese Verteilung!

Aufgabe 6.18

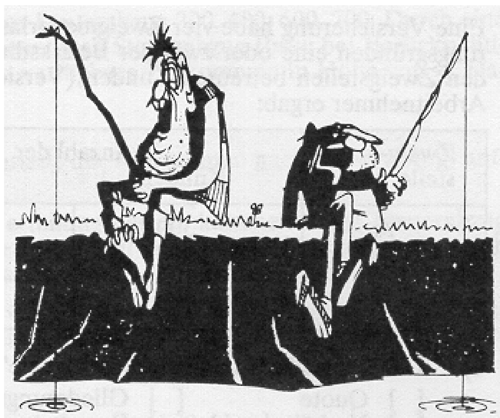
In einem Unternehmen mit 50 Beschäftigten ergab sich folgende Struktur der Verdienste: (x_j = Klassenmittelwert; n_j = Zahl der Lohn- und Gehaltsempfänger)

	Verdienstverteilung		Lorenzkurve	
j	x_j	n_j	H_j	Q_j
1	500	6	0,120	0,054
2	700	3	0,180	0,091
3	900	6	0,300	0,188
4	1100	15	0,600	0,484
5	1300	11	0,820	0,740
6	1500	4	0,900	0,848
7	1700	5	1	1

a) Zeichnen Sie die Lorenzkurve!

b) Fassen Sie jeweils mehrere Größenklassen zusammen und zeichnen Sie dann erneut die Lorenzkurve!

Aufgabe 6.19



Am Teich T_5 sitzen die beiden Angler A_1 und A_2, die beide noch nie etwas von der Lorenzkurve gehört haben. Sie wissen deshalb nicht, dass sich der Fischbestand ihres Dorfes auf die Teiche T_2 und T_4 konzentriert. Es gibt 5 Teiche, die alle gleich groß sind und ein Statistiker hat den Fischbestand wie folgt geschätzt:

Teich	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
Fische	100	800	250	800	50

a) Man bestimme den Zentralwert und das arithmetische Mittel

b) Das Merkmal “Anzahl der Fische” ist (Richtiges ankreuzen)

	intensiv		diskret		nominalskaliert
	extensiv		stetig		metrisch skaliert

Die Verteilung der Fische ist (Richtiges ankreuzen)

	rechtssteil		symmetrisch		linkssteil
	eindimensional		zweidimensional		
	klassiert		zweigipflig		

c) Man bestimme die Lorenzkurve und zeichne diese.

d) Zeigen Sie, dass Gins Disparitätsmaß in diesem Fall den Wert 0,44 annimmt!

Aufgabe 6.20

Hinsichtlich der Gestalt einer Lorenzkurve (LK), welche die Preisgeldkonzentration der 20 bestplatzierten Tennisspieler der ATP-Weltrangliste darstelle, seien lediglich die Steigungen der Lorenzkurve in den vier Klassen bekannt, sowie der jeweilige Klassenumfang ni:

Klasse	Steigung der LK	n_i	h_i
I	1/4	8 Spieler	
II	1	4 Spieler	
III	3/2	4 Spieler	
IV	2	4 Spieler	

a) Berechnen Sie die Lorenzkurve und den Gini-Koeffizienten.

b) Wie hoch ist die Preisgeldsumme der Klasse der bestverdienend Spieler, sofern insgesamt 10 Mio. DM an Preisgeld ausgeschüttet worden sind?

Aufgabe 6.21

Eine Versicherung habe vier Zweigniederlassungen und erwägt, ob sie nicht aus Rationalisierungsgründen eine oder zwei der Bezirksdirektionen schließen sollte. Eine Statistik der von den Zweigstellen betreuten Kunden (Versicherungsnehmer) und der in ihnen beschäftigten Arbeitnehmer ergab:

	Anzahl der		Kunden je
Zweigstelle	Kunden	Beschäftigten	Beschäftigte
A	300	15	20
B	900	60	15
C	100	10	10
D	700	35	20

a) Die Kennzahl "Kunden je Beschäftigte" ist eine

	Quote		Gliederungszahl		Beziehungszahl
	Verhältniszahl		Rate		Verursachungszahl

b) Um darzustellen, wie "ungleich" (im Sinne der relativen Konzentration = Disparität) die Zweigstellen in bezug auf die Anzahl der betreuten Kunden sind, geht man wie folgt vor (die Stellen [ ] ankreuzen):

1) man ordnet die Zweigstellen nach der Anzahl der

	Beschäftigten		Kunden		Kunden je Beschäftigten

2) und setzt dann für die relativen Häufigkeiten h_i

	$h_1 = 0{,}05$, $h_2 = 0{,}15$, $h_3 = 0{,}35$, $h_4 = 0{,}45$
	$h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = 0{,}25$
	$h_1 = 0{,}083$, $h_2 = 0{,}125$, $h_3 = 0{,}2917$, $h_4 = 0{,}5$

und für die Anteile q_i die Werte

	$q_1 = 0{,}05$, $q_2 = 0{,}15$, $q_3 = 0{,}35$, $q_4 = 0{,}45$
	$q_1 = 0{,}083$, $q_2 = 0{,}125$, $q_3 = 0{,}2917$, $q_4 = 0{,}5$
	$q_1 = 0{,}1538$, $q_2 = 0{,}2308$, $q_3 = q_4 = 0{,}3077$

c) Berechnen Sie nun die Lorenzkurve in der von Ihnen angegebenen Weise!

Aufgabe 6.22

Im Garten des Vogelfreundes V befinden sich 10 Nester. Da V sehr auf den Nachwuchs der Vogelfamilien achtet, zählte er eines Tages die Anzahl der Jungen in den Nestern (Variable X). Er erhielt die folgenden Werte 0,3,2,2,3,1,0,1,1,2.
Man zeichne die Lorenzkurve und berechne das Konzentrationsverhältnis von Gini!
Es gilt, mit obigen Zahlen $\bar{x} = 1{,}5$ und $s_x^2 = 1{,}05$.
Wenn davon auszugehen ist, dass zwei Drittel der ausgeschlüpften Jungen den diesjährigen unfreundlichen Sommer überleben, wie groß sind dann Mittelwert und Varianz der Anzahl x^* der Überlebenden Vogelkinder?

Aufgabe 6.23

Motto: Matth. 13, Vers 12

a) Vier Personen haben die Einkommen x_v vor Steuerabzug 300, 400, 600, 700. Durch eine unsoziale Steuergesetzgebung verbleibt ihnen nach Steuerabzug (bzw. bei Berücksichtigung von Steuervergünstigungen) noch das verfügbare Einkommen in Höhe von y_v. Dabei berechnet sich y_v wie folgt

$$y_v = x_v + \frac{x_v - \bar{x}}{2} \qquad v = 1,...,4$$

Man bestimme die Werte $\bar{y}$ und s_y^2 (= Varianz der Einkommen nach Steuerabzug) aufgrund von $\bar{x}$ und s_x^2!

b) Zeichnen Sie die Lorenzkurve für die Verteilung der Einkommen x vor Steuerabzug (Einkommensverteilung der vier Personen von Teil a) und der Einkommen y nach Steuerabzug! Wie groß ist Ginis Konzentrationsmaß ?

c) Vorgriff auf Kap. 8: Der statistisch wenig vorgebildete Diplom-Kaufmann K aus E berechnete die Korrelation zwischen den Einkommen vor und nach Steuerabzug. Er erhielt $r_{xy} = +0{,}95$. Hat er richtig gerechnet? (Begründung)? Wie groß ist in diesem Fall die Kovarianz zwischen x und y?

Aufgabe 6.24

Gegeben sei die folgende Verteilung der Einkommen (x):

von...bis zu...	Anzahl der Personen
0-1000	100
1000-2000	50
2000-3000	30
3000 und mehr	20

Jede Einkommensklasse verfügt über ein Gesamteinkommen von 80.000 Mark. Berechnen Sie die Lorenzkurve und die Steigung der Lorenzkurve für jede Einkommensgrößenklasse! In welcher Größenklasse befindet sich das Durchschnittseinkommen $\bar{x}$ und wie groß ist $\bar{x}$?

Aufgabe 6.25

Im Rahmen einer Untersuchung zur Situation in der Landwirtschaft einer Region wurde u.a. festgestellt, dass dort von 50 vorhandenen Betrieben die vier größten eine Fläche von insgesamt 520 ha, die 32 kleinsten Betriebe hingegen zusammen nur 164 ha bewirtschaften. Für die übrigen Betriebe liegt die landwirtschaftliche Nutzfläche bei insgesamt 316 ha.

a) Zeichnen Sie die Lorenzkurve.

b) Berechnen Sie den Gini-Koeffizient.

Aufgabe 6.26

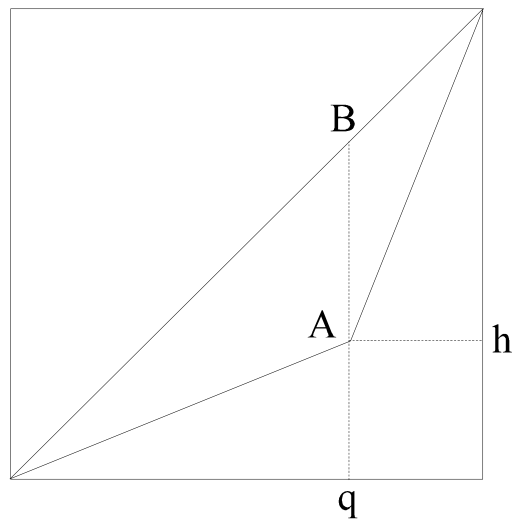
Gegeben sei eine Einkommensverteilung mit nur zwei Klassen

Einkommensklasse Größe der Einkommen	Anteil in % an den Einkommensbeziehern	Anteil in vH am Gesamteinkommen
untere Einkommen x_o	h	q
obere Einkommen x_1	1 - h	1 - q

Man zeige oder widerlege, dass unter diesen Voraussetzungen

a) das Disparitätsmaß D_G von Gini nichts anderes ist, als die Länge der Strecke AB (vgl. Skizze), dass also gilt:

$$\boxed{D_G = h - q}$$



b) der Variationskoeffizient $V = s/\bar{x}$ unabhängig von der Größe der Einkommen x_o bzw. x_1 beträgt:

$$\boxed{V = D_G / \sqrt{h(1-h)}}$$

so dass gilt: $V \leq 2D_G$

Aufgabe 6.27

Für eine Lorenzkurve gilt, dass die Steigung an der Stelle H = 0,5 kleiner ist als 1, nämlich 0,8. Kann man daraus folgern, ob die zugrundeliegende Verteilung des Merkmals x links- oder rechtssteil oder symmetrisch ist? Geben Sie eine Begründung an!

Aufgaben zum Kapitel 7

Aufgabe 7.1

Bei drei Klausuren (A, B, C) mit jeweils 200 Klausurteilnehmern ergaben sich die folgenden Zusammenhänge zwischen Geschlecht und Klausurerfolg:

M = männlich W = weiblich B = Bestanden N = nicht bestanden

Klausur A

	B	N
M	105	45
W	35	15

Klausur B

	B	N
M	140	10
W	0	50

Klausur C

	B	N
M	90	60
W	50	0

Man bestimme die Randverteilungen (was fällt dabei auf) und zeige, bei welcher Klausur ein

Zusammenhang zwischen Geschlecht und Klausurleistung besteht und welcher Art dieser ist! Was bedeuten "verbundene Beobachtungen"?

Aufgabe 7.2

Der Student S glaubt wieder einmal, eine Recht-Klausur ganz astrein gelöst zu haben. Mit seiner Selbsteinschätzung (Variable X), die mehr oder weniger gefühlsmäßig und zufällig, weniger aus tiefer juristischer Einsicht erfolgt, liegt er zwar oft in der Tendenz ganz richtig. Die genaue Klausurnote (Y) erscheint ihm aber fast immer rätselhaft und unerklärlich. So wie es ihm geht, ergeht es jedoch auch seinen 35 Mitstudenten. Dass die Noten bei den Recht-klausuren irgendwie mysteriös sind glauben inzwischen alle. Das zeigt sich auch bei der Gegenüberstellung von X und Y für alle 36 Studenten:

Variable	Variable Y				
X	1	2	3	4	5
1	1	2	3	2	0
2	1	2	2	1	0
3	0	1	2	2	1
4	0	0	3	4	3
5	0	2	1	1	2

Bestimmen Sie die Randverteilungen und deren Mittelwerte sowie die empirischen Regressionslinie.

Aufgabe 7.3

Psychologen mögen festgestellt haben, dass ein reichhaltiges Warenangebot der Kauflust der Kundschaft förderliche sei, während gähnende Leere auf den Regalen eines Einzelhandelsgeschäfts im allgemeinen nicht besonders anregend wirke. Zwischen dem Wert (in 1000 DM) des Warensortiments (W) und den durchschnittlichen täglichen Verkäufen (V) bestehe der folgende Zusammenhang:

V	4	6	10	6	4
W	400	600	700	800	1000

Man zeichne das Streuungsdiagramm und berechne die Kovarianz zwischen V und W sowie die Varianzen von V und W.

Aufgabe 7.4

Einer fehlgeschlagenen Intrige bei Hofe hat es Graf Giselher von Gelsenkirchen zu verdanken, dass er in einem Burgverlies schmachtet. Statt vor dem Verwaltungsgericht Gelsenkirchen zu klagen, (diese neuzeitliche Denkweise war Giselher noch vollkommen fremd) machte er sich daran, die meterdicke Wand zu durchbohren. Es gibt Tage, an denen er y = 1, y = 2 und y = 3 Zentimeter der Wand wegschaben kann. Zwischen dem Zeitaufwand X des Schabens (in Stunden) und der Zentimeterleistung Y des Verdünnens der Wand bestehe aufgrund von 10 Tagen Beobachtung, über die der Graf Aufzeichnungen machte - folgender Zusammenhang:

x\y	1	2	3
6	1	1	0
10	1	2	1
15	0	2	2

a) Man bestimme und zeichne (Skizze) die empirische Regressionslinie zur Schätzung von y! Die Regressionslinie verläuft

	linear			nichtlinear

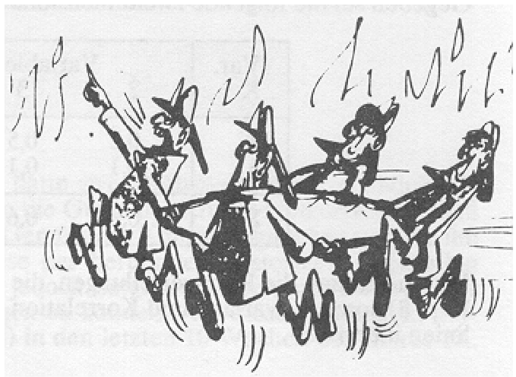
Die Korrelation r_{xy} ist folglich

	positiv			negativ

b) Man bestimme die Kovarianz zwischen X und Y!

c) Wenn der Graf 1 cm Wand einmal in 6 Stunden und einmal in 10 Stunden abschabt, braucht er dann im Mittel 8 oder 7,5 Stunden? Zeigen Sie, dass das harmonische Mittel in der Tat 7,5 ist!

Aufgabe 7.5



Zwischen der Anzahl X der Feuerwehrlöschzüge und der Höhe des Brandschadens in 1.000.000 DM (Variable Y) bestand bei 9 Großbränden folgender Zusammenhang (beide Variablen von... bis unter...):

Y \ X	1-3	3-5	5-7	≥7
0 - 10	1	1	0	0
10 - 15	0	2	2	1
≥ 15	0	0	0	2

a) Vergleichen Sie die Zahlenangaben mit den folgenden Einzelbeobachtungen (Sind die Angaben identisch?):

(x_v, y_v): (2,4), (3,4), (3,10), (4,10), (5,10), (6,10), (7,10), (7,16), (8,16)

b) Bestimmen Sie die Randverteilungen und den Korrelationskoeffizient!

c) Erklären Sie, warum Sie vermuten, dass zwischen der Anzahl der Feuerwehrlöschzüge und der Höhe des Brandschadens ein Zusammenhang bestehen dürfte!

d) Bei wie viel Bränden waren bis zu 4 Löschzüge am Brandort und ein Schaden von bis zu 14 Millionen DM?

Aufgabe 7.6

Im Fach F prüfen seit Jahren die Professoren X und Y, wobei die Studenten "logischerweise" lieber zu X gehen, weil X milder sei. In einem Termin haben X und Y gemeinsam geprüft, so dass man die von ihnen vergebenen Noten im einzelnen miteinander vergleichen kann. Es ergab sich folgendes Bild:

Variable	Variable Y				
X	1	2	3	4	5
1	1	1	0	0	0
2	1	2	2	1	0
3	0	1	2	2	1
4	0	0	0	1	1

Man bestimme:

a) Mittelwerte und Varianzen der Randverteilungen

b) die Kovarianz und die Korrelation

c) die bedingten relativen Häufigkeiten

d) die bedingten Mittelwerte

e) die Regressionsfunktionen x und y!

f) Man zeichne die empirischen Regressionslinien (Verbindungen der bedingten Mittelwerte) und vergleiche sie mit den unter e) berechneten Regressionsgeraden!

Aufgabe 7.7

Gegeben sei die folgende zweidimensionale Verteilung:

Variable X	Variable Y 2	3	4	Σ
2	0,2	0,5	0,1	0,8
3	0,1	0,1	0	0,2
Σ	0,3	0,6	0,1	1

Man bestimme die Randverteilungen, die Regressionslinien und die Regressionsgeraden (vgl. Kap. 8) sowie Kovarianz und Korrelation. Sind die Regressionsgeraden und die Regressionslinien identisch?

Aufgabe 7.8

Es sei folgender Zusammenhang zwischen dem Alter X des Mannes und Y der Frau bei 25 Ehepaaren festgestellt worden:

X (Ehemann)	Y (Alter der Ehefrau)				
50	40	41	42	43	44
51	41	43	44	45	46
52	41	44	45	48	52
53	43	46	47	49	55
54	44	46	49	51	60

Zeichnen Sie das Streuungsdiagramm und führen Sie Berechnungen in der Art von Aufgabe 7.6 durch!

Aufgabe 7.9

Gegeben sei die folgende zweidimensionale Verteilung mit $\overline{x} = 45$ und $\overline{y} = 30$:

x\y	24	28,2	35,7
28,5	5	15	10
37,5	7	21	14
42,0	12	36	24
54,5	18	54	36

Bestimmen Sie die Regressionslinie x|y (Verbindung der bedingten Mittelwerte von x)
Hinweis: Schauen Sie sich die Zahlen genau an, Sie ersparen sich dadurch viel Rechenarbeit!

Was können Sie zum Verlauf der Regressionslinie y|x (Verbindung der bedingten Mittelwerte von y) im Vergleich zu x|y aussagen, ohne viel zu rechnen?

Aufgaben zum Kapitel 8

Aufgabe 8.1

(Pompadur und Pompamoll)

König Egon der XIII, auch der "Labile" genannt, hatte zwei Mätressen, die Pompadur (D) und die Pompamoll (M), die miteinander heftig um die Gunst des Königs konkurrierten. Dass sie jeweils verschiedene Seiten des empfindsamen Gemüts des Königs ansprachen und für ihn deshalb komplementär waren, steht seit der These des berühmten Historikers H in allen Lehrbüchern. H's jüngerer Kollege h glaubt dies jedoch aufgrund einer seinerzeit von der Hofschranze S verfassten Notiz empirisch widerlegen zu können. Aus dieser Notiz geht hervor, wie Egon seine Freizeit (gemessen in Stunden) in den letzten 10 Wochen des Jahres 17.. auf die Damen aufteilte:

Dur (D)	40	30	20	10	40	30	50	50	60	70
Moll (M)	30	10	30	40	20	30	50	30	40	20

Berechnen Sie die Korrelation und die Regressionsgeraden zwischen D und M, und folgern Sie daraus, ob H oder h recht hat!

Man bestimme die Korrelation und die Regressionsgeraden für die folgende Variante dieser Aufgabe (Pompadur und Pompamoll)!

Dur (D)	40	30	20	10	40
Moll (M)	30	10	30	40	20

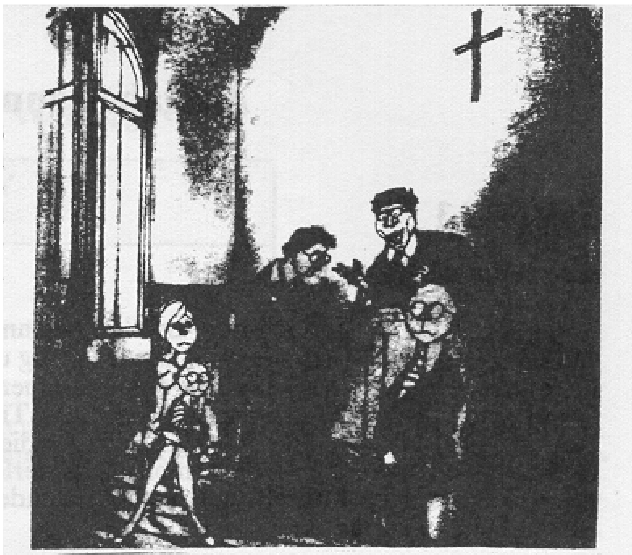
Aufgabe 8.2

Antworten Sie auf die folgende Frage mit “richtig” oder “falsch”: Die Korrelation (berechnet für eine Stichprobe von n = 20) zwischen den Punktzahlen X und Y von zwei Klausuraufgaben sei nur 0,224, so dass die Bestimmtheit r^2 nur 0,05 beträgt.
Bedeutet dies, dass:

- nur 5% der Punkte genau auf der Regressionsgerade liegen und 95% oberhalb oder unterhalb der Regressionsgeraden?
- nur bei einem von 20 Klausurteilnehmern (1/20=0,05) die Punktzahl der Aufgabe Y von der Aufgabe X abwich?
- nur bei einem von 20 Klausurteilnehmern (1/20=0,05) die Punktzahl in der Aufgabe Y von der abwich, die aufgrund der Punktzahl in Aufgabe X zu erwarten war?

Aufgabe 8.3

Es sei X der Intelligenzquotient (IQ) des Vaters und Y der des Sohnes. Psychologen fanden heraus, dass der IQ (praktisch in allen Generationen) mit Mittelwert 100 und Standardabweichung 16,4 symmetrisch verteilt ist, und dass die Korrelation zwischen dem IQ des Vaters und des Sohnes $r_{xy} = +0,5$ ist:



»... und Sie wollen sich weder an Fräulein Müller noch an die gemeinsame Fahrt vom Erdgeschoß bis zum 39. Stockwerk erinnern?«

a) Man bestimme die Kovarianz und

b) die Regressionsgerade y = a + bx.

c) Welcher IQ ist für den Sohn zu erwarten, wenn der Vater einen IQ von 75 (d.h. leichte Debilität) und welche, wenn der Vater einen IQ von 130 (überragende Intelligenz) hat?

d) Kann man aufgrund der Ergebnisse schließen, dass durch die Vererbung ein unaufhaltsamer Trend zum Mittelmaß besteht, so dass es nach einigen Generationen nur noch Personen mit einem IQ von 100 gibt (zu einem ähnlichen Schluss gelangten amerikanische Wirtschaftsforscher bei der langfristigen Analyse der Gewinne von 46 Unternehmen "The Triumph of Mediocrity in Business")?

Aufgabe 8.4

Zwischen dem Hopfenpreis in DM je Handelseinheit und dem Bierpreis (für Endverbraucher) in Pfennig je Liter bestehe folgender Zusammenhang:

Hopfenpreis	6	8	5	7	4
Bierpreis	120	150	125	145	110

a) Bestimmen Sie eine lineare Schätzfunktion für den Bierpreis bei gegebenem Hopfenpreis!

b) Welcher Bierpreis ist bei einem Hopfenpreis von 6,50 DM zu erwarten?

c) Wie groß ist der Korrelationskoeffizient nach Bravais-Pearson (Produkt-Moment-Korrelation)?

d) Wie würden sich die Werte der Regressions- und des Korrelationskoeffizienten verändern, wenn der Hopfenpreis in britischem Pfund, statt in DM, angegeben würde?

Aufgabe 8.5

Nachdem Andrea (A) zwei Jahre mit Charlie (C) ging, haben sie sich `ne echt besitzhafte Identität aufgebaut, aus der sich A nun emanzipieren will. Sie ist jetzt mehr so auf Bernd (B) drauf, kann aber noch nicht total auf B einflippen. Und weil ihr bisheriger Typ C die Trennungsverarbeitung erst einmal konkret abgecheckt haben will und das, was zwischen A und B emotional so läuft noch nicht so auffangen kann, haben sie jetzt alle drei beschlossen, das Problem bis spätestens zum nächsten Jahr zu dritt ganz konkret aufzuarbeiten.
Andrea teilte deshalb in den folgenden 12 Monaten ihre Zeit - sofern sie überhaupt Bock auf einen Typ hatte - auf B und C wie folgt auf:

Monat	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Charlie(x_C)	3	3	6	9	3	3	3	6	9	6	12	12
Bernd (x_B)	18	18	18	12	18	9	12	12	18	12	9	3

a) Man bestimme die zweidimensionale Häufigkeitsverteilung von B und C sowie die Randverteilungen. Man erhält für die Standardabweichungen $s_C = 3{,}34$ und $s_B = 4{,}66$ sowie für die Kovarianz $s_{BC} = - 8{,}56$. Bestimmen Sie die Regressionsgeraden und den Korrelationskoeffizienten (r_{BC}).

b) Bestimmen Sie die Regressionslinien.

Aufgabe 8.6

Diplom-Kaufmann K aus E hat zwar einen sehr kleinen Bekanntenkreis, der ihm aber doch sehr ans Herz gewachsen ist. Er bestehe aus n=8 Personen, 3 männlichen und einer weiblichen Arbeitskollegin, seiner Gattin, einem früheren Schulkameraden und zwei Freundinnen.
K ist jedoch ständig bemüht, die stark schwankende Zahl seiner Freundinnen y zu erhöhen, was erhebliche Telefonkosten x (in DM) verursacht. Es gelte folgender Zusammenhang:

$\hat{y} = 0{,}5 + 0{,}01x$ und $\hat{x} = 92{,}5 + 5y$

a) Man kann zeigen, dass K eine mittlere Anzahl $\bar{y} = 1{,}5$ von Freundinnen hat und im Mittel $\bar{x} = 100$ DM Telefonkosten aufwendet. Zeigen Sie, wie man aus den obigen Angaben zu diesem Ergebnis gelangen kann!

b) Aus den obigen Angaben läßt sich auch folgern, dass x und y (Richtiges ankreuzen):

	positiv		negativ

miteinander korrelieren.

Man kann ferner folgern, dass x und y stark miteinander korrelieren, also $r_{xy} \approx 1$

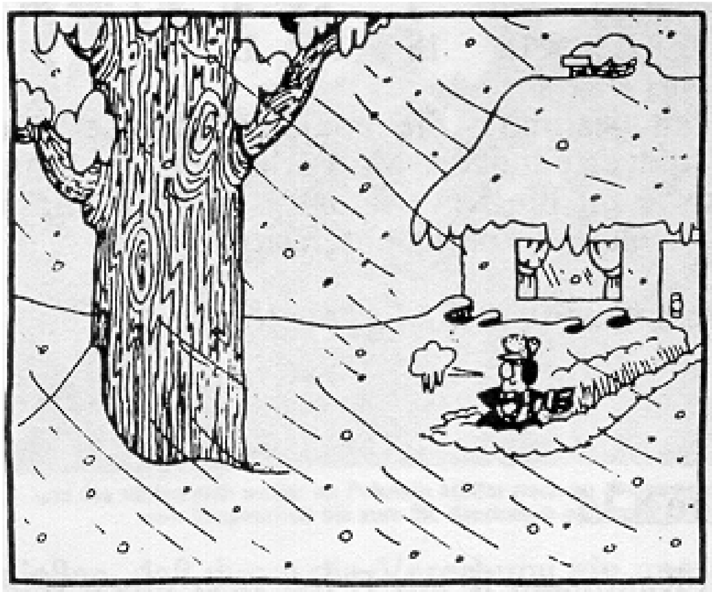
	ja		nein

Aufgabe 8.7

Der statistisch geschulte Diplom Kaufmann K aus E stellte die folgenden Zusammenhänge zwischen der Außentemperatur X (in Grad Celsius) und der Dauer seines Weges zum Arbeitsplatz Y (in Minuten) fest:

X	Y
-20	60

-10	40
0	35
10	20
20	20



a) Bestimmen Sie die Regressionsgerade $\hat{y} = a + bx$!

b) K braucht bei 35^o Hitze nur ...... Minuten zum Arbeitsplatz und bei -30^o Kälte nur .... Minuten.

c) Führen Sie die Berechnungen unter a und b auch durch für die folgende Variante der Aufgabe:

X	-20	-10	0	10	20
Y	30	25	20	15	10

Aufgabe 8.8

Ein Drogist machte die Erfahrung, dass sich dann weniger Kunden nach dem Kauf eines Insektenbekämpfungsmittels über die Wirkungslosigkeit beschwerten, wenn er den Anteil x eines bestimmten Wirkstoffes erhöhte. Er machte bei 5 Präparaten (A bis E) folgende Erfahrungen:
x = Anteil des Wirkstoffes (in vH) y = Anteil der Beschwerden

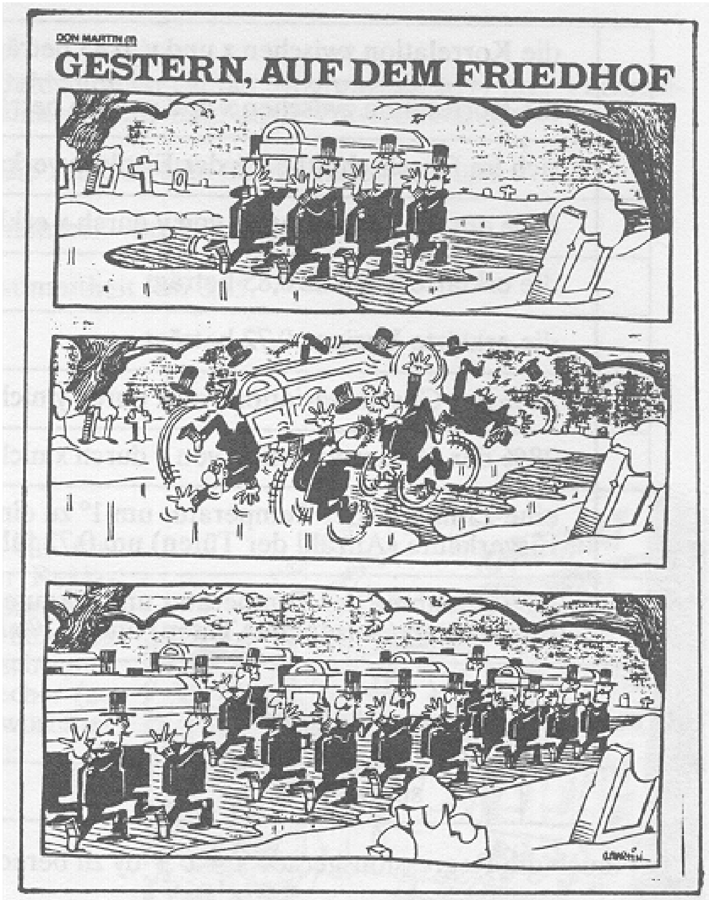
Präparat	x	y
A	2	10
B	3	7
C	4	6
D	5	5
E	6	2

a) Berechnen Sie die Regressionsgerade $\hat{y} = a + bx$!

b) Wie groß ist das Bestimmtheitsmaß? Interpretieren Sie die Aussage des Bestimmtheitsmaßes!

Aufgabe 8.9 (Hebelpunkt)

Normalerweise besteht kein ausgeprägter Zusammenhang zwischen der Beschaffenheit der Wege (gemessen am Rutschkoeffizient X) und der Sterblichkeit (Anzahl der Todesfälle Y) in der Gemeinde G. Die folgenden statistischen Aufzeichnungen umfassen 8 "normale" Tage sowie einen etwas ungewöhnlichen Tag (UT):
Man bestimme die Regressionsfunktion $\hat{y} = a + bx$ und den Korrelationskoeffizienten mit und ohne UT und zeichne das Streuungsdiagramm.



X	3	4	5	6	4	5	6	7	8
Y	3	2	1	2	4	5	4	3	36

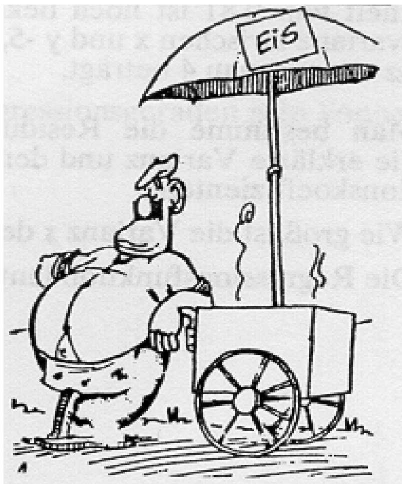
Aufgabe 8.10

Als K sein Diplomexamen an der Uni E gewonnen hatte, war ihm noch nicht klar, dass er längere Zeit als Diplom-Kaufmann K aus E keine angemessene Stellung finden würde. Er musste deshalb auf "Eisverkäufer" umsatteln. Als besonders wertvoll für seine Berufspraxis erwiesen sich seine mühsam erworbenen Statistikkenntnisse. So stellte er an 10 Frühlingstagen folgenden Zusammenhang zwischen der Temperatur (X) und den verkauften Eistüten pro Stunde (Y) fest:

X	12	16	17	18	20	20	21	23	24	29
Y	7	5	8	11	10	9	8	14	12	16

a) Berechnen Sie die Regressionsgerade $\hat{y} = a + bx$ nach der Methode der kleinsten Quadrate sowie die Störgröße u an allen 10 Tagen!

b) Die Varianzen der Größen sind bei den obigen Daten $s_y^2 = 10$ und $s_x^2 = 20$. Bestimmen Sie in Verbindung mit Teil a) dieser Aufgabe den Anteil an der Gesamtvarianz der Variable Y der durch die Regressionsgerade "erklärt" wird. Wie nennt man diesen Varianzanteil?



c) Die Bestimmtheit in dieser Aufgabe beträgt 0,72. Das bedeutet, dass

	die Korrelation zwischen x und y 0,85 beträgt
	die Korrelation zwischen x und y -0,85 beträgt
	sich im Durchschnitt 85% der Eistüten verkaufen lassen
	85% der Gesamtvariation von y durch x erklärt wird
	die erklärte Varianz 0,85 beträgt
	die erklärte Varianz 0,72 beträgt
	28% der Gesamtvariation von x durch y nicht erklärt wird
	28% der Gesamtvariation von y durch x nicht erklärt wird
	eine Zunahme der Temperatur um 1^o zu einer Zunahme der Eisverkäufe (Anzahl der Tüten) um 0,72 führt
	eine Zunahme der Temperatur um 1% zu einer Zunahme der Eisverkäufe (Anzahl der Tüten) um 0,72% führt

d) Es wäre bei dieser Aufgabe

	sinnvoll		nicht sinnvoll

auch die Regressionsgerade $\hat{x} = c + dy$ zu berechnen.

<u>Aufgabe 8.11</u>

Diplom Kaufmann K aus E hatte jedes Spiel der 32 Mannschaften der Fußballweltmeisterschaft mehrmals im Fernsehen verfolgt. Sein Geisteszustand, gemessen anhand einer Punktzahl y in einem psychologischen Test hat sich dadurch ersichtlich verschlechtert. Psychologen haben festgestellt, dass sich der Wert y zu 81% durch die Anzahl x der betrachteten Fußballspiele erklären (bestimmen) läßt. Neben dieser Bestimmtheit von 0,81 ist noch bekannt, dass die Kovarianz zwischen x und y -5,4 und die Varianz von y genau 4 beträgt.

a) Man bestimme die Residualvarianz, die erklärte Varianz und den Korrelationskoeffizienten!

b) Wie groß ist die Varianz x der betrachteten Spiele?

c) Die Regressionsfunktion lautet $\hat{y}_i = a + bx_i$. Berechnen Sie b!

Aufgabe 8.12

Die Deutsche Bundesbank korrelierte Geldvolumen (in der Abgrenzung M1) und Volkseinkommen für die Jahre 1960 bis 1970 miteinander. Sie fand unter Verwendung der

- vierteljährlichen Niveaudaten (absolute Zahlen) eine Bestimmtheit von 0,98
- halbjährlichen Zuwächsen eine Bestimmtheit von 0,37 und
- vierteljährlichen Zuwächsen eine Bestimmtheit von 0,25.

Erklären Sie das Ergebnis!

Aufgabe 8.13

Dem Hersteller eines Kaffeeautomaten für Autobahnraststätten ist es trotz zahlreicher Reklamationen bisher noch nicht gelungen, ein technisch ausgereifteres Modell auf den Markt zu bringen. Bei der bisherigen Ausführung schwankt die Menge X der abgegebenen Kaffeebecher (zu durchschnittlich 60 Pfennig) je eingeworfener Geldsumme Y (in DM) nicht unerheblich:

Berechnen Sie den Korrelationskoeffizient nach Bravais-Pearson und das Bestimmtheitsmaß!

X	22	18	24	17	25	14	25	28	26	21
Y	36	30	39	31	38	21	41	47	40	37

Aufgabe 8.14

Prüfen Sie jeweils ob die folgenden beiden Funktionen Regressionsgeraden sein können und bestimmen Sie den Korrelationskoeffizienten r:

a) $\hat{y} = 2 + 3x$ und $\hat{x} = -1 + y/3$

b) $\hat{y} = 2 + 3x$ und $\hat{x} = -(2/3) + y/3$

Aufgabe 8.15

Im Rahmen einer Anhörung zur Durchsetzung von Sparmaßnahmen im Polizeidienst behauptet der amerikanische Serienheld und Frauenliebling Don Johannes, dass die Anzahl der von ihm für Miami Nice gelösten Kriminalfälle in höchstem Maße vom jeweiligen Einsatz seines

Ferraris als Dienstfahrzeug abhänge. Tatsächlich konnte in Miami an fünf zufällig ausgewählten Tagen folgender Zusammenhang zwischen der Anzahl der gelösten Fälle (Y) und der dabei eingesetzten Ferraris (X) festgestellt werden:

i	x_i	y_i
1	1	2
2	2	5
3	2	4
4	3	6
5	2	3

a) Ermitteln Sie die Koeffizienten a und b einer Kleinste-Quadrate-Regressionsfunktion. Wie viel Verbrechen würde Don J. aufklären, wenn er den Ferrari fünf mal benutzen würde?

b) Angenommen, an einem Tag, der nicht in der obigen Regression berücksichtigt wurde, wären bei 4 Ferrari-Einsätzen tatsächlich 9 Verbrechen aufgeklärt worden. Welche Abweichungen (Gesamtabweichung, erklärte Abweichung und Zufallsabweichung) würden sich unter Zugrundelegung der unter a) ermittelten Regressionsfunktion für diese Beobachtung ergeben? Zeichnen Sie die Regressionsfunktion und die von Ihnen errechneten Abweichungen in das nachstehende Koordinatensystem ein (Beschriftung!).

c) Ermitteln Sie zunächst s_y^2 und s_x^2 für die Beobachtungsdaten von Teil a). Wie groß ist die erklärte Varianz $s_{y^*}^2$ bei einem Korrelationskoeffizient von $r_{xy} = 0{,}9$?

d) Berechnen Sie unter Verwendung der soeben ermittelten Ergebnisse auf zweifache Weise s_{xy}^2.

Aufgabe 8.16

Die zu bestimmende Regressionsgerade $\hat{x} = c + dy$ verläuft durch die Punkte $P_1(x_1 = 2 | y_1 = 6)$ und $P_2(x_2 = 4 | y_2 = 3)$. Könnte für die Steigung der anderen Regressionsgerade $\hat{y} = a + bx$ gelten (mehrere Antworten möglich; richtige Antworten ankreuzen):

	b = -1,5		b = -0,3		b = -2
	b = +1,5		b = 0		b = -0,1

Aufgabe 8.17 und 8.18 nicht aus der Buchveröffentlichung übernommen

Aufgabe 8.19

Der Zusammenhang zwischen dem Werbebudget X und dem Umsatz Y eines ausgewählten Produktes "P" wird von der Controlling-Abteilung eines Konsumgüterherstellers für die letzten 12 Monate untersucht.
Man erhielt für die 12 Monate folgende Größen:

- Werbeausgaben: insgesamt 120 000 DM im untersuchten Jahr.
- Der durchschnittliche monatliche Umsatz des Produktes "P" in DM beträgt das zehnfache des durchschnittlichen Werbeetats pro Monat.
- Die Standardabweichung der monatlichen Werbeausgaben im Untersuchungszeitraum beträgt 9 000 DM.
- Standardabweichung der Umsatzdaten 50 000 DM.
- Korrelationskoeffizient r = 0,9.

1. Berechnen Sie die Regressionsgerade für den Fall eines einfachen linearen Zusammenhanges der beiden Merkmale auf Monatsebene!
2. Schätzen Sie den Umsatz bei einem Werbebudget von 11 000 DM in einem Monat!
3. Angenommen, in einem bestimmten Monat, der bisher nicht in der Regressionsrechnung berücksichtigt wurde, wäre beim Einsatz eines Werbebudgets von 12 000 DM ein Umsatz von 120 000 DM erzielt worden. Welche Abweichungen **(Gesamtabweichung, erklärte Abweichung und Zufallsabweichung)** würden sich unter Zugrundelegung der ermittelten Regressionsfunktion <u>für diese Beobachtung</u> ergeben? Zeichnen Sie die Regressionsfunktion und die von Ihnen errechneten Abweichungen in ein Koordinatensystem ein.
4. Berechnen Sie für die ursprünglichen Beobachtungsdaten die erklärte Varianz, das Bestimmtheitsmaß und das Unbestimmtheitsmaß!

<u>Aufgabe 8.20</u>

Die Mietervereinigung der Stadt DD hat am Jahresende für 600 Mietwohnungen nachfolgende Tabelle über den Mietpreis Y (in DM) in Abhängigkeit von der Wohnfläche X (in m^2) veröffentlicht.

	Mietpreis von... bis unter...			
Wohnfläche	0 – 200	200 - 400	400 - 600	600 - 1000
0 - 40	100	50	0	0
40 - 80	80	220	10	0
80 - 120	0	20	40	80

a) Bestimmen Sie die relativen Häufigkeiten und die absoluten Summenhäufigkeiten der zweidimensionalen Verteilung!

b) Berechnen Sie die Randverteilungen und deren Maßzahlen!

c) Geben Sie die bedingten Verteilungen an!

d) Zeichnen Sie die empirische Regressionslinie!

e) Berechnen Sie Kovarianz, Korrelationskoeffizient und Bestimmtheitsmaß!

f) Wie lautet die Regressionsgerade $\hat{y} = a + bx$?

Aufgaben zum Kapitel 9

Aufgabe 9.1

In einer Arbeitsstätte seien 1998 im Jahresdurchschnitt n=200 Beschäftigte tätig gewesen, an die eine Lohn- und Gehaltssumme von S=3 Mill. DM gezahlt wurde. Dabei bestand folgende Aufgliederung nach dem Geschlecht:

	Beschäftigte		Lohnsumme	
Geschlecht	absolut	in vH	in 1000 DM	in vH
männlich	150		2400	
weiblich	50		600	
insgesamt	200		3000	

Man trage die fehlenden Werte für eine Verhältniszahl ein! Um welche Art von Verhältniszahl handelt es sich dabei?

Aufgabe 9.2

a) In der Bundesrepublik (alte Bundesländer) galten 1997 etwa die folgenden Zahlen

Ehescheidungen 163 Tausend	Eheschließungen 374 Tausend
Wohnbevölkerung 68 Millionen	Bestand an Ehen 15 Millionen

Die Scheidungsquote (Ehescheidungen auf 1000 Einwohner) betrug demnach 2,4. Bedeutet dies, dass nur ca. 0,2% der Ehen vor dem Scheidungsrichter enden? (Begründung!)

b) Welche Aussage könnte man mit einer Kennziffer "Bestand an Ehen/Ehescheidungen" erzielen? Kann man aus den mitgeteilten Zahlen etwas aussagen über die Verweildauer in der Ehe (= Ehedauer)?

Aufgabe 9.3

Die Umsatzentwicklung eines Einzelhandelsgeschäfts ergab bei zwei Warengruppen die folgenden Werte (in 1000 DM):

	1992	1993	1994	1995
Gruppe A	220	240	264	286
Gruppe B	440	484	528	594
insgesamt	660	724	792	880

a) Man berechne die Messziffernreihe für die Umsätze in den beiden Warengruppen und für den Gesamtumsatz (1992=100)!

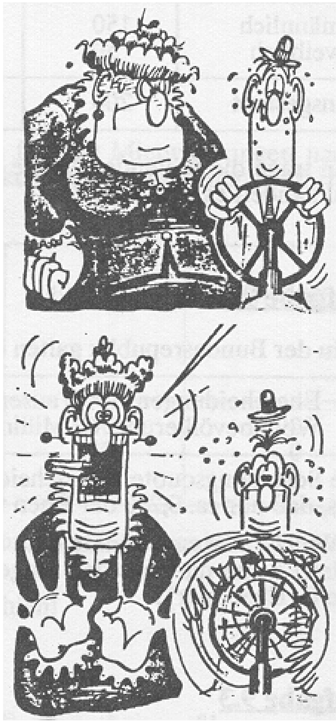
b) Warum bewegt sich die Messziffer für die Gesamtumsätze stets in der Mitte der Messziffern für die beiden Warengruppen?

Aufgabe 9.4

Einer amerikanischen Statistik zufolge ergeben sich folgende Zahlen über die Unfallhäufigkeit von Männern und Frauen

Autounfall	Männer	Frauen	Summe
wenigstens einmal	3.122	2.255	5.377
nie	3.958	4.695	8.653
Summe	7.080	6.950	14.030

Kann man aufgrund dieser Zahlen schließen, dass Frauen bessere (sicherere) Autofahrer sind als Männer?
Es gibt allerdings auch Daten für zwei Teilgesamtheiten



1. *häufiges Fahren (mehr als 10.000 Meilen)*

Autounfall	Männer	Frauen	Summe
wenigstens einmal	2.605	996	3.601
nie	2.405	919	3.324
Summe	5.010	1.915	6.925

2. *seltenes Fahren (< 10.000 Meilen)*

Autounfall	Männer	Frauen	Summe
wen. einmal	517	1.259	1.776
nie	1.553	3.776	5.329
Summe	2.070	5.035	7.105

Aufgabe 9.5

Zwei Unternehmen (X und Y) mit jeweils den beiden Geschäftszweigen A und B erzielen in den beiden Geschäftszweigen jeweils die folgende gleiche Rendite (also sowohl beim Unternehmen X als auch beim Unternehmen Y):

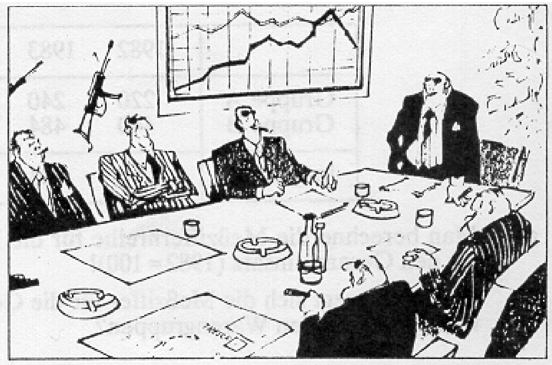
$R_A = 0{,}3 \qquad R_B = 0{,}05$

Das gesamte Unternehmen X erzielt aber eine Rendite von 10%, während das Unternehmen Y genau 25% erzielt, also

$R_X = 0{,}1 \qquad R_Y = 0{,}25,$

obgleich $R_{XA} = R_{YA} = 0{,}3$ und $R_{XB} = R_{YB} = 0{,}05$.

Wie ist das möglich?



„Meine Herren, in der Sparte Einbrüche zwingt uns die sinkende Rendite zu verstärkten Anstrengungen"
Spiegel

Aufgabe 9.6

Die Sterberate [früher "Sterbeziffer", d.h. die Zahl der Gestorbenen je 1.000 Lebende] anglikanischer Geistlicher ist viel höher (0,55%) als die der Bergarbeiter (0,15%):

L_x = Lebende des Alters x (Bestand in der Mitte des Jahres **)
D_x = Gestorbene im Alter von x im Jahre **

	Geistliche		Bergarbeiter	
Altersklasse	L_x	D_x	L_x	D_x
unter 50	10000	10	90000	90
über 50	90000	540	10000	60
insgesamt	100000	550	100000	150

Kann man aus den Angaben schließen, dass der Beruf des untertage arbeitenden Bergmanns "gesünder" ist als der des Geistlichen?

Bestimmen Sie das Durchschnittsalter der Lebenden und der Gestorbenen der beiden Berufsgruppen (Klassenobergrenze 100 Jahre).

Aufgabe 9.7

Einer monatlichen Wachstumsrate von 2% entspricht eine jährliche Wachstumsrate von $12 \cdot 2 = 24\%$. Ist das richtig? Wie verhält es sich bei einer monatlichen Wachstumsrate von 20%? (Jährlich 240%?)

Aufgabe 9.8

In der Bundesrepublik Deutschland stieg die Anzahl der Studenten von 1973 bis 1981 um 54,2%. Wie groß ist die durchschnittliche jährliche Wachstumsrate? Wann ist danach, ausgehend von 1973, mit einer Verdoppelung der Anzahl der Studenten zu rechnen?

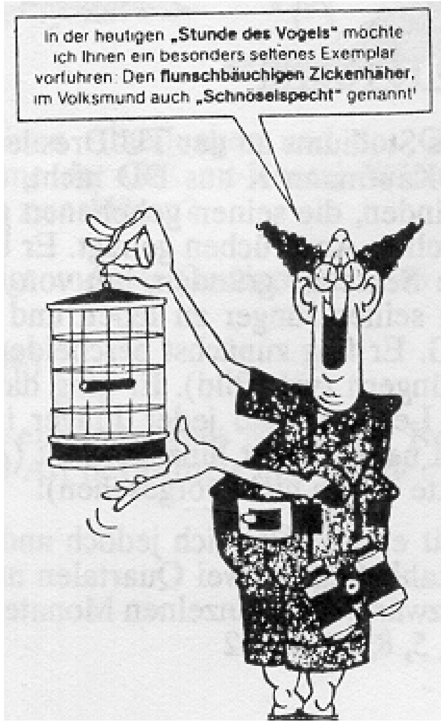
Aufgabe 9.9

Der Verhaltensforscher V referiert im Fernsehen über die Lernfähigkeit von Papageien in Abhängigkeit von der Rasse. Er fand für den Schnöselspecht (S) folgenden Zusammenhang zwischen der Anzahl y_S der gelernten Worte und der Zeit t in Wochen (t: stetig)

$$\boxed{y_s = e^{\sqrt{t}} \quad (t > 1)}$$

während für den gemeinen Hauspapageien (P) gelten soll

$$\boxed{y_P = (2t-1)^2}$$



- Für r_s gilt mit zunehmender Zeit t, dass diese Wachstumsrate (Richtiges ankreuzen):

	laufend abnimmt		negativ wird
	konstant bleibt		nur positiv ist
	laufend zunimmt		gegen Null strebt

- Die Wachstumsrate r_p beim Hauspapagei

	kann auch über 100 % sein
	ist stets größer als r_s
	ist im allgemeinen kleiner als r_s

<u>Aufgabe 9.10</u>

Der häufig von skurrilen Vorstellungen geplagte Statistiker S wird nach dem Besuch einer einschlägigen Filmvorführung den Alptraum nicht los, dass Graf Dracula von den Toten auferstehen könnte. Bekanntlich wird ja auch ein friedlicher Bürger durch den Biss eines Vampirs selbst zum Vampir.

S geht davon aus, dass der "Durchschnittsvampir" pro Monat zwei Menschen das Blut aussaugt.

Wie lange wird es dauern, bis nach Draculas Wiedererscheinen eine Bevölkerung vom Umfang

- einer Großstadt mit 700.000 Menschen
- der [alten] Bundesrepublik (60 Millionen Einwohner)

vollständig vom Vampirismus befallen sein wird?

Aufgabe 9.11 (Guru)

Trotz seines Studiums an der Uni Essen gelang es Diplom-Kaufmann K aus E nicht, eine Tätigkeit zu finden, die seinen gehobenen geistigen und materiellen Ansprüchen genügt. Er beschloss daher, eine Sekte zu gründen, um von den Zuwendungen seiner Jünger zu leben und ist jetzt der Guru G. Er fing zunächst bescheiden an mit nur zwei Jüngern (vgl. Bild). Er ging davon aus, dass seiner Lehre gemäß jeder Jünger in jedem Monat zwei neue Jünger hinzugewinnt (Austritte aus der Sekte waren nicht vorgesehen):

Die Realität entwickelte sich jedoch anders. Die Anzahl der Jünger stieg in zwei Quartalen nur von 2 auf 32 und zwar in den einzelnen Monaten 1 bis 6 wie folgt: 2, 5, 8, 20, 35, 32

Man beantworte die folgenden Fragen:

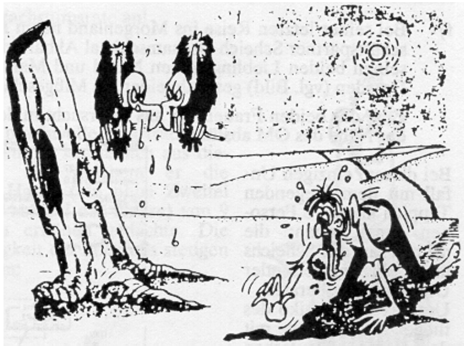
- Wie groß ist die tatsächliche mittlere monatliche Wachstumsrate der Anzahl J der Jünger?
- Wie groß ist die mittlere monatliche Wachstumsrate der Anzahl der Jünger, von der der Guru G ausging?
- Wie groß ist die aufs Quartal bezogene Wachstumsrate der Anzahl der Jünger, von der Guru G ausging?
- Wäre die Annahme des Gurus zutreffend gewesen: wie viel Jünger hätte es dann nach zwei Quartalen geben müssen?

Aufgabe 9.12 (fliegender Teppich)

Diplom Kaufmann K aus E gründete 1990 eine Spedition, deren Spezialität u.a. der Transport in den Nahen Osten war (Abtlg. 1 des Betriebs), was sich als eine beachtliche Marktlücke herausstellte. Durch navigatorische Fehlleistungen größeren Ausmaßes konnten jedoch einige Transporte nicht erfolgreich abgewickelt werden, so dass die Rentabilität zunächst (1991) noch zurückging, was auch für Abtlg. 2 des Betriebs (Polentransporte) galt. Gleichwohl konnte K die Rentabilität des Gesamtunternehmens steigern, wie die folgenden Zahlen (alle in 1000 DM) zeigen:

	1990			1991	
Abt.	Gewinn	Kapital	Abt.	Gewinn	Kapital
1	32	400	1	126	1800
2	40	800	2	24	600

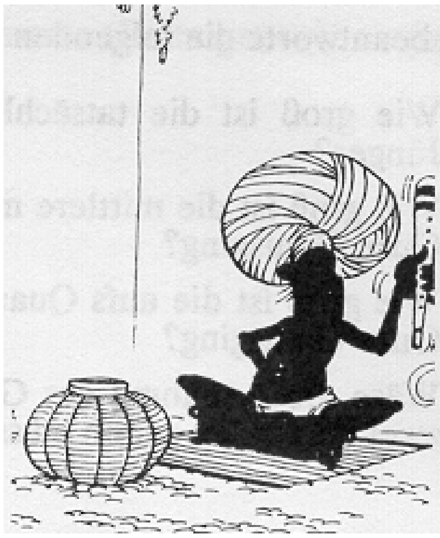
a) Man berechne die Rentabilitäten der einzelnen Abteilungen und des Gesamtunternehmens 1990 und 1991. Wie ist die Zunahme der Gesamtrentabilität trotz abnehmender Rentabilitäten der beiden Abteilungen zu erklären?



b) Wenn der Kapitaleinsatz um 10% (20%) steigt und der Gewinn um 25% (50%) dann nimmt die Rentabilität zu um 25 - 10 = 15% (bzw. um 50 -20 = 30%)?

c) Die Rentabilität des Gesamtunternehmens ist ein gewogenes Mittel der Rentabilitäten der einzelnen Abteilungen, und zwar (richtige Art des Mittels und Art der Gewichtung ankreuzen)

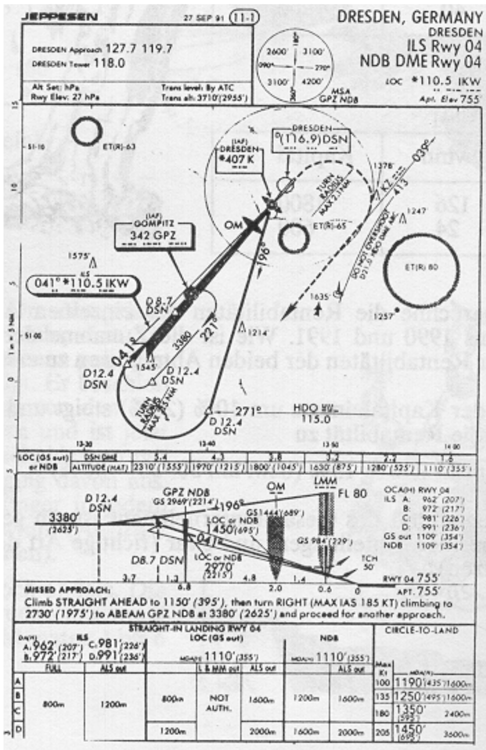
Mittel	Gewinn-anteile	Kapital-anteile
arithmetisch		
harmonisch		



d) Durch Kauf eines fliegenden Teppichs im Werte von 1,6 Mill. DM glaubt K die Rentabilität der Abteilung 1 verdoppeln zu können. Wie groß sind Gewinn und Rentabilität 1992 unter sonst gleichen Umständen?

e) Die Rentabilität ist eine (Richtiges ankreuzen):

	Verhältniszahl		Gliederungszahl
	Rate		Beziehungszahl
	Quote		Messzahl
	Entsprechungszahl		Maßzahl



f) Bei seiner letzten Reise ins Morgenland nahm K auf seinem Rückflug auch seinen Geschäftspartner Scheich Dschamschid al Akbar mit nach Dresden. Der Scheich wollte mit seinen beiden Lieblingsfrauen Nahid und Mahnoz Porzellan kaufen. Beim Anflug auf Dresden geschah leider ein Missgeschick:

Eine der beiden Frauen biss aus Eifersucht in den fliegenden Teppich, worauf dieser in der Nähe des OM abstürzte.

Bei diesem einzigen Unfall mit dem fliegenden Teppich kamen 2 Personen ums Leben; die dritte Frau des Scheichs und ein mitreisender Unternehmensberater. Um das Todesrisiko des fliegenden Teppichs mit dem der Deutschen Reichsbahn zu vergleichen ist die richtige Bezugsgröße:

- die Anzahl der transportierten Personen,
- die geflogenen (gefahrenen) Kilometer,

- die Personenkilometer,
- die Zeit,
- die Anzahl der Flüge (Bahnfahrten),
- die Anzahl der Fahrzeuge (Züge bzw. Flugzeuge)?

Aufgabe 9.13

Die Beat-Band B ist es gewohnt bei ihren Konzerten mit 8 Sattelschleppern voll Elektronik anzureisen. Dabei ist vermutlich der Zenit ihres künstlerischen Schaffens noch nicht erreicht. Die Anzahl F ihrer Fans und Konzertbesucher wächst von Jahr zu Jahr gemäß der Funktion (t = stetig)

$$F(t) = 4000 + 160t^3 - 30t^4$$

so dass die Band zur Zeit (im Jahre) t = 4 ihren Höhepunkt erreicht, nach dem es allerdings sehr dramatisch abwärts geht.

a) Man zeige, dass die Band tatsächlich bei t = 4 den Gipfel ihrer Beliebtheit erreicht!

b) Wie groß ist dann (zu diesem Zeitpunkt) die Wachstumsrate der Anzahl F der Fans und Konzertbesucher?

c) Geben Sie die Funktion für die Wachstumsrate an!

Aufgabe 9.14

Der Rentner R glaubt sich durch eine prachtvolle Haartracht seinen Lebensabend verschönern zu sollen. Er kaufte sich aus diesem Grund ein Haarwuchsmittel, mit welchem er die ursprüngliche Gesamtlänge L seiner Haare (ein ohne Zweifel stetiges Merkmal, im Unterschied zur Anzahl der Haare) von 9 cm auf ein eindrucksvolles Maß zu erhöhen gedachte. Die Haarlänge entwickelt sich in Abhängigkeit der ebenfalls stetigen Zeit t (in Monaten) gemäß der Funktion:

$$\boxed{L(t) \quad = \quad 9 + t^2/12 - t}$$

a) Man bestimme eine Funktion für die Messziffern zu Basis t = 9

b) und eine Funktion für die Wachstumsrate $r_L(t)$ der Haarlänge

c) Wie groß ist die Wachstumsrate $r_L(t)$ zur Zeit t = 48 (also nach genau 4 Jahren)?

Aufgabe 9.15

Gegeben ist die Funktion x(t) mit (t: stetig)

$$\boxed{x(t) = t^2 + 5\cdot\sin(t) + 2\cdot\cos(30t) + 3\cdot\sin(2t) + 5\cdot\sin(t)}$$

Bestimmen Sie die Funktion $r_x(t)$ der Wachstumsrate von x!

Aufgabe 9.16

Der Bruch Schuldenstand/Sozialprodukt, heißt auch "Schuldenquote" und ist eine:

	Gliederungszahl		Beziehungszahl		Quote
	Verhältniszahl		Messzahl		Maßzahl

Angenommen, die Staatsverschuldung nimmt - was den tatsächlichen Verhältnissen des Jahrzehnts 1970-1980 in etwa entspricht - jahresdurchschnittlich um 15% zu. Wie lange dauert es dann jeweils, bis sich der Schuldenstand verdoppelt?

Ausgehend von $x_0 = 625$ erhält man, sofern gilt $y = 500 + 4x$ nach $t = 10$ Jahren einen Schuldenstand $x_t = x_{10}$ in Höhe von ... und ein Sozialprodukt in Höhe von ....

Die durchschnittliche jährliche Wachstumsrate des Sozialprodukts beträgt demnach ...., und sie ist somit

	kleiner		größer

als diejenige der Staatsverschuldung x.

Vorgriff auf Kap. 11
Wenn das Sozialprodukt y mit einer konstanten Wachstumsrate r zunimmt, also $y_t = y_0(1+r)^t = y_0 w_t$, dann gilt dies auch für die gleitenden dreigliedrigen Durchschnitte des Sozialprodukts:

	richtig		falsch

Aufgabe 9.17

a) Für die neu auf dem ostdeutschen Markt eingeführte Zigarettenmarke "*Stasi-Light*" prognostiziert der zuständige Marketing-Stratege *Egon Kranz* eine monatliche Absatzentwicklung (in Tsd. Stück), die der stetigen Funktion $y_t = 5 - 2t + t^2$ gehorcht. Welche Wachstumsrate ergibt sich daraufhin nach genau 2 Monaten (t=2)?
b) Zu welchem Zeitpunkt t beträgt die Wachstumsrate genau 50%?

Aufgabe 9.18

Der Umsatz einer Unternehmung aus der chemischen Industrie weist folgende Wachstumsraten (gegenüber dem Vorjahr in Prozent) auf:

Jahr	1994	1995	1996	1997	1998
Wachstumsrate	+13,0%	+9,0%	-4,5%	+2,0%	+8,0%

a) Bestimmen Sie die durchschnittliche jährliche Wachstumsrate der Unternehmung innerhalb der letzten fünf Jahre (Ansatz!).

b) Das Chemieunternehmen legt zu Beginn des Jahres einen Teil seines Vermögens in Festgeld zum Zinssatz i_d an und vereinbart dabei eine jahresendliche Verzinsung. Als Alternative besteht die Möglichkeit einer jeweils halbjährigen Verzinsung des Kapitals zu i_s. Gilt bei identischem Guthaben am Ende der Laufzeit:

	$i_s = i_d$		$i_s > i_d$		$i_s < i_d$

Aufgabe 9.19

Angenommen, die Anzahl der Kunden nimmt jährlich um 2% zu und die Anzahl der Beschäftigten jährlich um 1,5% (jeweils konstante jährliche Wachstumsrate). Wie steigt oder sinkt dann eine mit der Kennzahl "Kunden je Beschäftigten" gemessene Art "Produktivität" eines Unternehmens, wenn man

- eine diskrete Variable Zeit annimmt (wie es hier bei größeren Intervallen von jeweils einem Jahr geboten wäre)?
- eine stetige Variable Zeit annimmt (also die Aussage über 2% bzw. 1,5% für kleine Intervalle gelten würde)?

Aufgaben zum Kapitel 10

Aufgabe 10.1

Fassen Sie die folgenden vier Preismesszahlen (1991=100) zu einem Index zusammen

Preise für	1997	Ausgabenanteil in %
Nahrungs- und Genussmittel	118,6	41,3
Kleidung, Schuhe	111,0	13,6
Wohnungsmiete	141,6	35,3
Energie	105,1	9,8

Quelle: http://www.statistik-bund.de/basis/bd_ueber.htm

a) indem Sie einen ungewogenen Durchschnitt bilden!
b) indem Sie mit den Ausgabenanteilen der Haushalte gewichten!
c) Welcher der beiden Ansätze a) oder b) ist zu bevorzugen?
Die Zahlen beziehen sich auf den Preisindex für die Lebenshaltung aller Privaten Haushalte.

Aufgabe 10.2

Um seinen notleidenden staatlichen Dienstleistungsbetrieben finanziell auf die Sprünge zu helfen, plant ein Minister eine Gebührenerhöhung bei zwei von 200 Gebührenarten (A und B) und zwar um 50% (bei A) und um 100% (bei B). Die Ausgabenanteile für die Dienstleistungen A und B waren bei den Konsumenten bisher 10 bzw. 20%.

Wie groß ist der Preisindex nach Laspeyres?

Je nachdem, wie die Verbraucher reagieren, kann der Paasche Index zwischen ...... und ...... schwanken.

Aufgabe 10.3

Angenommen, das Sozialprodukt sei nominal (zu jeweiligen Preisen) um 10% gestiegen, real (zu konstanten Preisen eines Basisjahres) aber nur um 6%. Welchen Wert nimmt dann der Preisindex des Sozialprodukts (ein Preisindex nach Paasche) an?

Aufgabe 10.4

Gegeben seien zur Basiszeit (0) und zur Berichtszeit (t) die Preise zweier Waren, jeweils bezogen auf ein Kilogramm:

Ware	0	t
Tomaten (Salatware)	3	4
helles Mischbrot	2	4

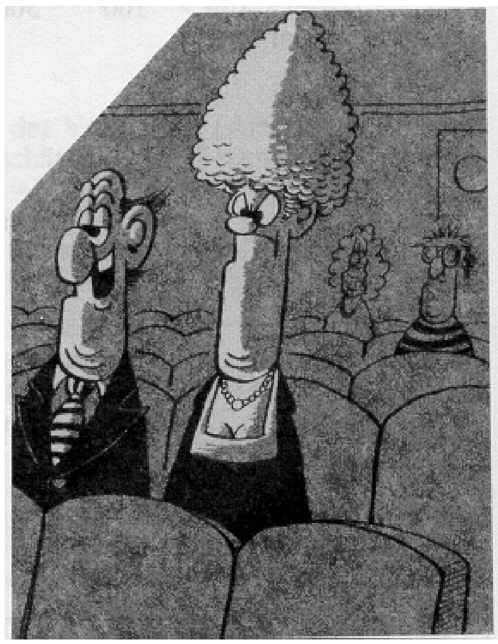
Man berechne Durchschnittspreise p_0 und p_t sowie den von Dutot (1738) vorgeschlagenen Index $\overline{p}_t/\overline{p}_0$. Wie ändert sich der Preisindex nach Dutot, wenn man die Tomatenpreise nicht auf der Basis von kg sondern von Pfund notiert?

Aufgabe 10.5

Die Preise für die Lebenshaltung steigen um 20%. Gleichwohl bleiben die Lebenshaltungskosten gleich. Ist das möglich?

Aufgabe 10.6

Diplom-Kaufmann K aus E und Gattin gehen leidenschaftlich gern ins Kino. Von Zeit zu Zeit schätzen sie etwas Bildendes im "Filmkunst", und sie lassen sich auch schon mal politisieren im "Alternativkino". Die Ausgaben des Ehepaares für Kinobesuche sind von 1988 bis 1993 nominal um 40% und real um 20% gestiegen. Für die Eintrittspreise der Kinos gelte 1978 und 1983:



Nr.	Kino	88	93
1	Filmkunst FIKU	15	12
2	Alternativ AKI	9	12
3	Kolossal KOKI	12	24
4	Bahnhof BAKI	20	24

a) Man berechne den Preisindex nach Laspeyres, wenn sich die Ausgabenanteile für Kinobesuche bei dem Ehepaar 1988 wie folgt verhalten: 1:3:2:1 (= Aufteilung der Ausgaben auf die vier Kinos).

b) Berechnen Sie den Preis- und Mengenindex nach Paasche!

c) Angenommen, es seien nur die oben mitgeteilten Preise bekannt und man kann nur davon ausgehen, dass K seine heimlichen Besuche im Bahnhofskino 1993 unterlässt und auch nicht mehr das Alternativkino aufsucht. Wie groß ist dann der Paasche Preisindex mindestens, und wie groß ist er höchstes ?

Aufgabe 10.7

Zwischen 1970 und 1980 hat sich das wertmäßige Bruttosozialprodukt verdoppelt; das volumenmäßige (in Preisen von 1970) Sozialprodukt ist dagegen von 1970 bis 1980 nur um 1/3 gestiegen. Der "Preisindex des Sozialprodukts" 1970 = 100 beträgt somit 1980 (Richtiges ankreuzen):

	150		166,67		133,33		66,67

Aufgabe 10.8

Der Private Verbrauch (aus der Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnung) habe sich nominal (zu jeweiligen Preisen) um 50% erhöht. Der Preisindex des Privaten Verbrauchs (ein Paasche Preisindex, 1980 = 100) "stehe" auf 125. Um wie viel hat sich der Private Verbrauch real (zu konstanten Preisen des Basisjahres 1980) erhöht?

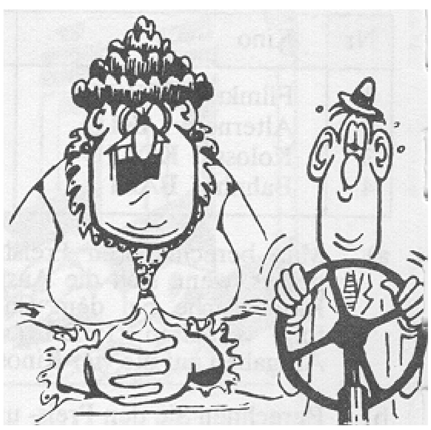
Aufgabe 10.9

Bestimmen Sie die fehlenden Werte in der folgenden Tabelle, die sich durch Neuberechnung (neuer Warenkorb etc.) eines Index ergab:

Jahr	1	2	3	4	5
alter Index	100	300	600		
neuer Index			900	1200	1800

Aufgabe 10.10

Diplom-Kaufmann K aus E leidet erheblich unter seiner dominanten Gattin, die ihm die Freude am Autofahren völlig verleidet, weil sie ständig sehr heftig Klage führt über



- die steigenden Benzinpreise und deshalb auch steigenden Lebenshaltungskosten
- die unkonzentrierte Fahrweise ihres Gatten.

Für die Benzinpreise (Ware A) und für die Preise (p) von zwei weiteren wichtigen Waren B und C sowie für die Mengen (q) mögen zur Basiszeit (0) und zur Berichtszeit t folgende Zahlen gelten:

Ware	p_0	p_t	q_0	q_t
A	0,9	1,5	10	12
B	2	2	4	6
C	5	3	3	8

a) Man bestimme die Preisindizes nach Laspeyres und Paasche zur Basis t = 0!

b) Angenommen, es gelten nicht die oben angegebenen Mengen zur Zeit t=1, sondern irgendwelche anderen Mengen. Man kann dann trotzdem sagen, dass der Preisindex nach Paasche mindestens den Wert.............. haben müsste und andererseits könnte der Paasche-Preisindex maximal nur den Wert.............. annehmen!

c) Kann man generell sagen, dass der Laspeyres-Preisindex stets größer sei als der Paasche-Preisindex? Bedenken Sie bei Ihrer Antwort, dass K trotz seiner katastrophalen Fahrweise (und Gattin) auf das Autofahren (und damit den Benzinverbrauch) kaum verzichten kann!

d) Vorgriff auf Kap. 11 (vgl. Aufg. 11.6)
Steigende Lebenshaltungskosten machten Diplom-Kaufmann K aus E allmählich den Garaus. Er verlor Auto und Gattin und fristet einsam sein Dasein zur Untermiete. In den Jahren 1994, 95 und 96 stellte er im März, Juli und November jeweils seine Kosten zusammen und stellte dabei fest, dass diese einen abnehmenden Trend haben, so dass er schon hofft, sich eines Tages wieder ein Auto und eine Frau leisten zu können. Er kam zu folgenden statistischen Daten:

	1994	1995	1996
März	69	63	57
Juli	71	65	59
November	64	58	52

Berechnen Sie gleitende Mittelwerte zu drei Perioden. Die Reihe der gleitenden Mittelwerte ist eine Gerade. Wie lautet die Funktion dieser Geraden?

Aufgabe 10.11

Gegeben seien die folgenden Daten über die Verteilung der Verdienste (Arbeitseinkommen) nach Gehaltsgruppen (GG) und über die Anteile der Beschäftigten an diesen Gehaltsgruppen eines Betriebes A im Jahre t=0 (Basisjahr) und im Jahr t=1 (Berichtsjahr) [vgl. auch Aufgabe 6.37]:

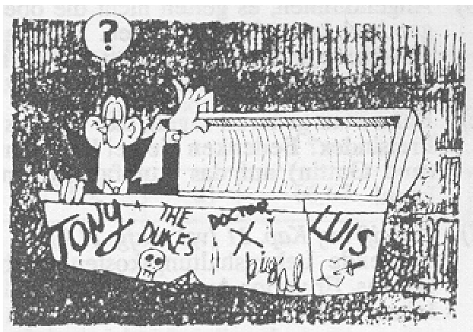
	Durchschnittsgehalt		Beschäftigtenanteil	
GG	t=0	t=1	t=0	t=1
1	600	720	0,5	0,1
2	1000	1100	0,3	0,4
3	2000	2000	0,2	0,5

Berechnen Sie einen Laspeyres - Gehaltsindex mit der Beschäftigtenstruktur der Zeit t=0 als Basis (Gewichtung mit den Anteilen der Beschäftigten zur Basiszeit t=0)!
Erklären Sie folgenden Zusammenhang: Der oben berechnete Index zeigt einen Anstieg von nur 13%, das Durchschnittsgehalt des Betriebs ist dagegen, wie zu zeigen ist, um 51,12% gestiegen. Warum?

Aufgabe 10.12

Von vampirstatistisch großer Bedeutung ist die Entwicklung der Preise für die Lebenshaltung eines städtischen (Großstadt in NRW) Ein-Personen-Vampirhaushalts mit mittlerem Einkommen 1790 = 100. Dabei kommt es dem Statistiker sehr entgegen, dass der Warenkorb eines Vampirhaushalts leider nicht sehr viel Abwechslung bietet und folglich nur aus drei Waren besteht, deren Preise sich wie folgt entwickelt hatten:

	Nahrungsmittel		Wohnen
Jahr	Blut	andere	(Tiefbau)
1790	12	40	200
1890	26	52	850
1990	82	68	12800

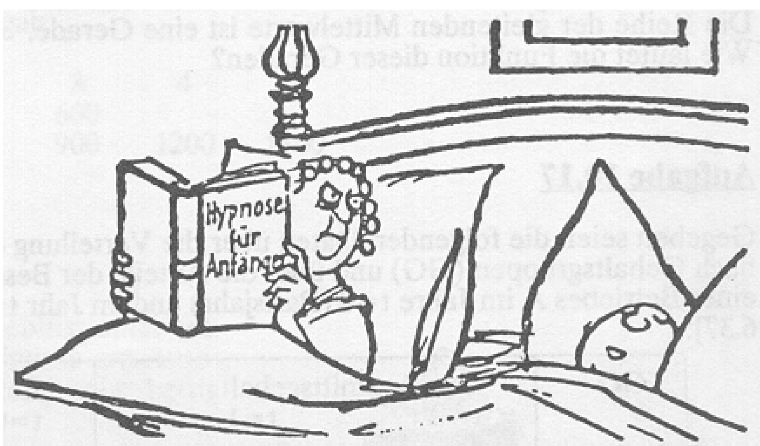


Die Ausgaben teilten sich 1790, im Verhältnis 3:1:2 auf die Waren Blut, andere Nahrungsmittel und Wohnen auf.

Es kann gar keine Frage sein, dass dies kaum noch für die heutige Verbrauchsstruktur der Vampirhaushalte repräsentativ ist. Verstädterung, Bodenspekulation und ähnliche Erscheinungen haben nämlich den für Vampire geeigneten Wohnraum enorm verknappt und verteuert. Man berechne gleichwohl den Preisindex für die Lebenshaltung zur Basis 1790 = 100 nach der Formel von Laspeyres mit den obigen Daten!

Aufgabe 10.13

Trotz verfeinerter Techniken der Beeinflussung gelingt es der Hausfrau H nicht, ihren Ehemann zu einer Anhebung des Haushaltsgeldes zu bewegen, weil dieser bei Problemen der Lebenshaltungskosten regelmäßig von großer Müdigkeit befallen wird. Es ist ihm insbesondere nicht klar zu machen, dass trotz Reduktion der Mengen die Lebenshaltungskosten durch steigende Preise zunehmen können.



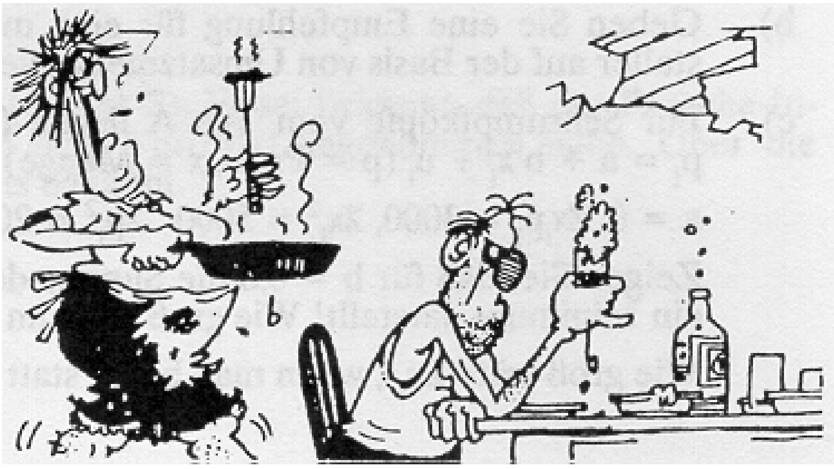
Gegeben seien die folgenden Zahlen über Preise und Mengen dreier Waren zu den Zeiten 0 und t:

	Preise		Mengen	
Ware	0	t	0	t
A	10	15	60	50
B	25	20	40	70
C	30	40	80	60

Man berechne die Preisindizes nach Laspeyres und Paasche sowie die Zunahme der Lebenshaltungskosten!

Aufgabe 10.14

Der Haushalt des in erschütternder Armut lebenden arbeitslosen Diplom - Kaufmann K aus E (vgl. Bild) konsumiert nur zwei Waren A und B die zusammen den "Warenkorb" des Preisindex für die Lebenshaltung ausmachen, mit folgenden Mengen und Preisen:



	t = 0		t = 1	
	Preise	Mengen	Preise	Mengen
A	5	40	2	200
B	20	110	10	40

a) Man bestimme den Wertindex W_{01}, den Laspeyres- (P^L_{01}) und den Paasche-Preisindex (P^P_{01}).

b) Die Lebenshaltungskosten sind stärker zurückgegangen als die Preise. Daraus folgt, dass für die Mengenindizes nach Laspeyres (Q^L) und nach Paasche (Q^P) gelten muß (richtiges ankreuzen):

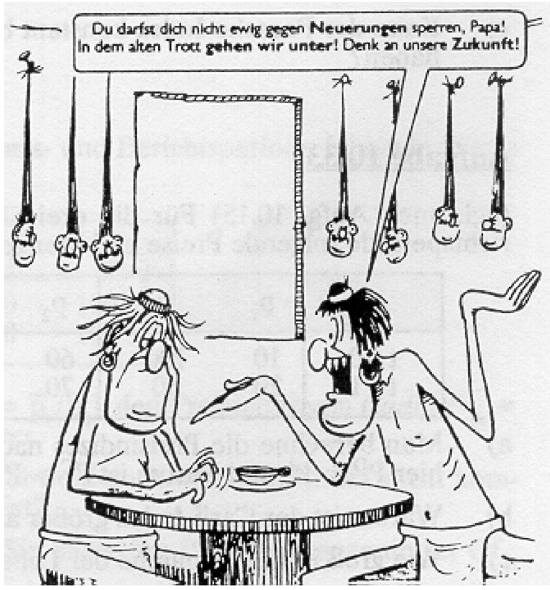
	Q^L und Q^P sind kleiner als 100 %
	$Q^L < P^P$, da $P^P < W$
	da $P^L > P^P$, muß $Q^L < Q^P$ sein
	da $P^L > W$, muß $Q^P < 1$ sein

Aufgabe 10.15

Eine Studie zur Wirtschaftsförderung empfahl zur Sanierung der Region "nördlicher Rio Grande do Sul" eine erhebliche Subventionierung der Schrumpfkopfproduktion oder eine gezielte Produktinnovation (Plastik- oder Holzköpfe) und neue Vertriebsformen (Versandhandel). Die Erzeugerpreisstatistik "Schrumpfköpfe von Europäern" gliederte nach

M = Missionare
A = übrige Akademiker auf Forschungsreise
U = Urlauber

und stellte folgende Zahlen fest:



	p_0	p_t	q_0	q_t
M	50	40	100	30
A	20	24	50	25
U	30	1	800	1200

p = Preis pro Stück
q = abgesetzte Mengen (Stückzahl)

a) Man berechne den Preisindex nach Laspeyres sowie den Mengenindex nach Paasche und den Wertindex zur Basis 0!

b) Geben Sie eine Empfehlung für eine mögliche Spezialisierung der Schrumpfkopfhersteller auf der Basis von Umsatzmesszahlen!

c) Für Schrumpfköpfe vom Typ A liegen folgende Angaben über die Angebotsfunktion $p_i = a + b\,x_i + u_i$ (p = Preis, x = Menge) vor:

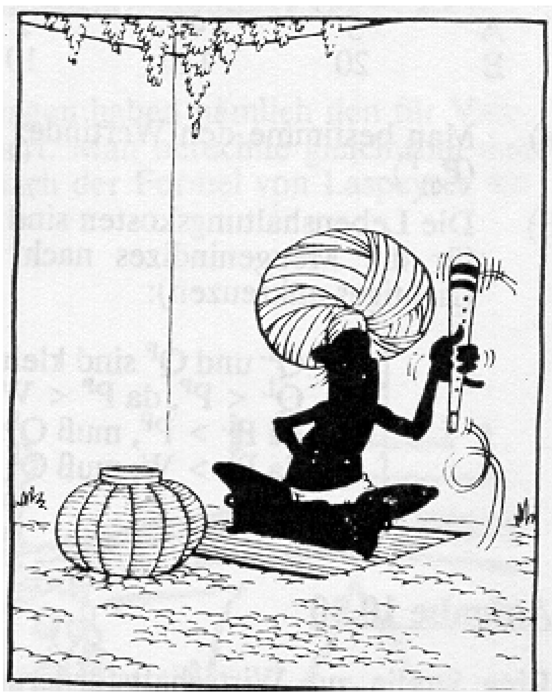
$$a = 0,\ \Sigma x_i p_i = 3000,\ \Sigma x_i^2 = 5000 \qquad \Sigma p_i^2 = 2000$$

Zeigen Sie, dass für b = 0,6 die Summe der Quadrate der Abweichungen Σu_i^2 in der Tat ein Minimum darstellt! Wie groß ist dann Σu_i^2?
Wie groß wäre Σu_i^2, wenn man b = 1 statt b = 0,6 annehmen würde?

Aufgabe 10.16

Bekanntlich wird selbst der sog. "Schlangenfraß" (SF) immer teurer und auch die Anschaffungskosten (SA) für Schlangen leiden unter der allgemeinen Teuerung, so dass es nicht überrascht, wenn der Preisindex für die Schlangenbeschwörung von der Inflation in Mitleidenschaft gezogen wird. Es ist zudem auch wirtschaftspolitisch verständlich, dass der Lohn der Schlangenbeschwörer (SL) bei den Tarifrunden angemessen berücksichtigt werden sollte, so dass sich schließlich folgendes Bild ergibt:

	Preise/Löhne			Mengen		
t	SF	SA	SL	SF	SA	SL
0	4	100	55	10	8	3
1	4,8	120	66	5	8	6



a) Man berechne einen Preisindex nach Laspeyres und nach Paasche!

b) Es gibt Fälle, in denen es für das Ergebnis unwichtig ist, ob man nach der Laspeyres- oder nach der Paasche-Formel rechnet, man erhält stets das gleiche Zahlenergebnis. Wann ist das der Fall?

c) Kann der Paasche-Index konstant bleiben, obgleich sich die Preise der Waren verändert haben?

Aufgabe 10.17

Für die drei Güter eines Warenkorbes galten für Basis- und Berichtsperiode folgende Preise und Mengen:

	p_1	q_1	p_2	q_2	p_3	q_3
t=0	10	100	60	100	20	100
t=1	20	50	70	80	30	60

a) Man berechne die Preisindizes nach Carli P^C, Dutot P^D und Laspeyres P^L. Warum gilt hier $P^D = P^L$ und warum ist $P^C > P^L$?
b) Warum ist der Carli-Index größer als der Laspeyres-Index also $P^C > P^L$?
c) Wie groß ist die Zunahme der Lebenshaltungskosten?

Aufgabe 10.18

Ein Warenkorb bestehe nur aus zwei Waren (A und B). Es sei bekannt, dass der Paasche-Index und der Laspeyres-Index gleichermaßen den Wert 150 angenommen habe. Über die Mengen zur Zeit t=0 und t=1 sei jedoch nichts bekannt.
Die Preise lauteten

Gut	t = 0	t = 1
A	20	30
B	40	60

Welche Mengen könnten zur Zeit t=0 und t=1 nachgefragt worden sein?

Aufgabe 10.19

Gegeben sei ein Index, der aus drei Sektorenindizes besteht. Der Stand des Gesamtindex und der Sektorenindizes sowie die Gewichte der Sektoren sind der folgenden Tabelle zu entnehmen:

Sektor	Stand des Indexes zur Zeit t	Gewichte
1	140	(?)
2	150	0,2
3	(?)	0,3
Gesamtindex	148	

a) Die fehlenden Angaben (?) sind zu ergänzen!

b) Die Sektoren 1 und 3 werden zu einem Hauptsektor A und der Sektor 2 zu einem Hauptsektor B zusammengefasst; man berechne die Hauptsektorenindizes!

c) Man berechne mit den Hauptsektorenindizes vom Teil b den Gesamtindex!

Aufgabe 10.20

Für die drei Güter eines Warenkorbes wurden in Basis- und Berichtsperiode folgende Preise und Mengen notiert:

	p_1	q_1	p_2	q_2	p_3	q_3
t=0	10	100	60	100	20	100
t=1	20	100	70	100	30	100

a) Berechnen Sie den Preisindex von Dutot, den Preisindex von Carli sowie den Preisindex von Laspeyres.

b) Wie erklären Sie die Identität der Ergebnisse, obwohl doch der Dutot-Index nicht kommensurabel ist und der Carli-Index ungewogen ist?

c) Berechnen Sie den Wertindex W_{0t} und leiten Sie dann den Paasche-Mengenindex Q_{0t}^{P} aus Ihren bisherigen Berechnungen ab.

Aufgabe 10.21

Man zeige dass der Preisindex von Carli

a) nicht verkettbar ist

b) nicht der Zeitumkehrprobe genügt [d.h. dass nicht gilt: $P_{0t} = (P_{t0})^{-1}$]

c) nicht der Additivität beim Basispreiswechsel genügt (Monotonieaxiom)!

Aufgabe 10.22

Gegeben seien Preise und Mengen von vier Waren zu zwei Zeitpunkten.

	Preise		Mengen	
Gut	t = 0	t = 1	t = 0	t = 1
A	10	14	40	48
B	20	28	30	24
C	30	48	20	16
D	40	64	10	12

Wie groß ist P_{01}^{L} bzw. P_{01}^{P} und warum gilt $P_{01}^{L} = P_{01}^{P}$?

Aufgabe 10.23

Für 4 Wirtschaftsgüter A, B, C und D sind die Umsätze für 1980 bekannt; ebenso das Verhältnis der 1992 und 1980 abgesetzten Gütermengen (Mengenmesszahlen $m_{80,92} = q_{92}/q_{80}$)

Gut	Umsatz*	Mengenmesszahl
A	10	1,5
B	8	1
C	12	2,0
D	20	1,4

*in Mill. DM

Man berechne aus diesen Angaben einen geeigneten Mengenindex!
Der Gesamtumsatz betrug 1992 genau 90 Mill. DM. Berechnen Sie den Paasche-Preisindex für 1992 zur Basis 1980!

Aufgaben zum Kapitel 11

Aufgabe 11.1

Aus dem Statistischen Jahrbuch der Bundesrepublik Deutschland sind folgende Zahlen über die Anzahl der rechtskräftig Verurteilten (in Tausend) zu entnehmen:

Jahr	Anzahl	Jahr	Anzahl
1974	699	1981	747
1975	665	1982	772
1976	699	1983	785
1977	723	1984	753
1978	739	1985	720
1979	719	1986	705
1980	732	1987	691

Stellen Sie die Zeitreihe grafisch dar und beurteilen Sie, ob ein ansteigender oder absteigender Trend vorliegt und ob dieser Trend gegebenenfalls durch eine zyklische Bewegung überlagert ist!

Aufgabe 11.2 über Jürgen v. d. Lippe

Bekanntlich gibt es Fernsehkünstler, die es verstehen, junge Menschen zu begeistern. Andererseits ist jedoch das jugendliche Gemüt empfindsam und ungeduldig und es neigt zum Perfekten und zu raschem Wandel. Es überrascht daher nicht, dass die Mitgliederzahl (in 1000)

des "von der Lippe Fan Clubs" (vdLFC) gewissen Schwankungen unterworfen ist, denn nicht alle vom Meister vorgetragenen Songs konnten Gefallen finden.
Für die Mitgliederzahl des vdLFC galten in den letzten 8 Monaten die folgenden Zahlen:

15, 20, 25, 30, 29, 31, 39 und 38.

Man berechne gleitende Mittelwerte zu je drei Monaten sowie einen Prognosewert für den neunten Monat (a = 0,2)!

Aufgabe 11.3

Der Kartenvorverkauf für das Konzert des berühmten Dirigenten D ergab in den ersten 15 Tagen die folgenden Werte (t = 0, 1,..., 14) für die Anzahl K_t der verkauften Karten:

40, 50, 60, 100, 110, 120, 160, 170, 180, 220, 230, 240, 280, 290, 300

a) Stellen sie die Zeitreihe K_t graphisch dar

b) Berechnen und interpretieren Sie

- gleitende 3-Tages-Durchschnitte der Zeitreihe K_t
- einen linearen Trend $K_t = a + bt$ nach der Methode der kleinsten Quadrate!

Aufgabe 11.4

Für vier Jahre liegen in einer Zeitreihe die vom Trend bereinigten Werte vor. Zeichnen Sie den Verlauf der trendbereinigten Werte sowie die Zeitreihe der Saisonnormalen.

Monat	Jahr 1	Jahr 2	Jahr 3	Jahr 4
Jan	-10,7	-11,6	-5,2	-15,0
Februar	-7,8	-6,4	-8,2	-2,4
März	7,4	0,7	10,2	11,0
April	-0,6	3,7	7,2	11,1
Mai	-0,4	9,6	-1,2	-9,8
Juni	6,6	-11,6	-5,3	4,2
Juli	-7,4	-1,2	3,3	0,1
August	-10,4	-11,3	-17,5	-20,1
September	2,8	2,0	8,8	8,5
Oktober	17,1	18,3	20,7	11,8
November	10,7	3,6	1,9	4,9
Dezember	-1,6	-8,7	-8,1	3,6

Ist die Annahme einer starren Saisonfigur in Form einer Saisonnormalen für diese Zeitreihe gerechtfertigt?

Aufgabe 11.5

Gegeben sei die folgende Zeitreihe:

t	-2	-1	0	+1	+2
y_t	10	12	15	17	16

Man berechne den Trend mit der Methode der kleinsten Quadrate und vergleiche die so erhaltenen fünf Trendwerte mit gewogenen arithmetischen Mitteln der fünf Ursprungswerte y_t der obigen Zeitreihe, wenn man die folgenden fünf Gewichtungsschemen benutzt:

-2	-1	0	+1	+2
0,6	0,4	0,2	0	-0,2
0,4	0,3	0,2	0,1	0
0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
0,0	0,1	0,2	0,3	0,4
-0,2	0	0,2	0,4	0,6

Was fällt bei der Betrachtung der fünf Gewichtungsschemen auf?

Aufgabe 11.6

Boxprofi B aus St. Louis hat in drei Jahren neun Kämpfe absolviert und dabei jeweils nach Punkten gewonnen. Aus statistischen Gründen kämpfte er jeweils zu äquidistanten Zeitpunkten und zwar im April, August und Dezember in den Jahren 1989, 1990 und 1991. Die Punkte waren dabei:

	Jahr		
Monat	89	90	91
April	69	63	57
August	71	65	59
Dezembe	64	58	52

a) Berechnen Sie gleitende Mittelwerte zu drei Perioden! Hinweis: die Reihe der gleitenden Mittelwerte ist eine Gerade. Wie lautet die Funktion dieser Gerade?

b) Berechnet man jetzt einen linearen Trend mit der Methode der kleinsten Quadrate, so stellt sich heraus, dass der so errechnete Trend eine betragsmäßig größere Steigung hat als der unter a) berechnete Trend.

   Das ist nicht erstaunlich, weil die Verfahren von verschiedenen Modellannahmen (Voraussetzungen) ausgehen. Welche sind das?

c) Mit der obigen Zeitreihe lassen sich zwei Komponenten errechnen, nämlich der Trend T (bzw. die glatte Komponente) und die Saisonkomponente S. Wodurch sind die Komponenten formal (mathematische Eigenschaften!) gekennzeichnet und wie sind sie aufgrund der Berechnungen unter a) rechnerisch bestimmt?

	formale Kennzeichen	Rechenergebnisse (aus a))
T		
S		

d) Angenommen, die Punktzahl, die der Boxer erhält, schwankt ganz zufällig zwischen 59 und 61. Die ersten drei Werte seien

59, 61, 60,

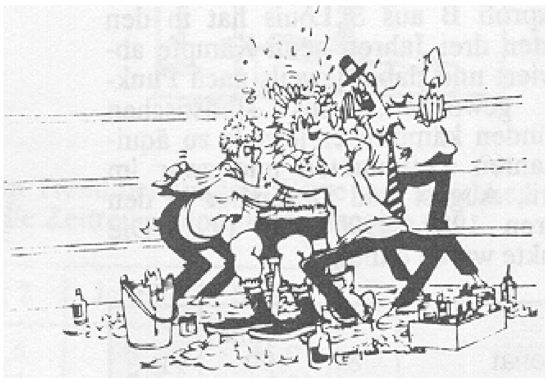
so dass der erste gleitende Durchschnitt von drei Perioden 60 ist. Der nächste gleitende Durchschnitt ist dann

mindestens:	höchstens:

Der gleitende Durchschnitt wird also weniger schwanken können als die Ursprungswerte. Ferner gilt: Phasen des Anstiegs (bzw. Abstiegs) der Zahlenwerte des gleitenden Durchschnitts halten in der Regel (Richtiges ankreuzen)

	länger
	kürzer
	genauso lang

an, wie die der Ursprungswerte und es können in den gleitenden Mittelwerten Zyklen auftreten, die in den Ursprungswerten nicht auftreten. Das nennt man ....- Effekt.



Aufgabe 11.7

Angenommen, die Umsätze eines Unternehmens haben sich in den letzten sechs Quartalen wie folgt entwickelt:

Quartal	1	2	3	4	5	6
Umsatz	1800	1600	1900	2100	1400	2000

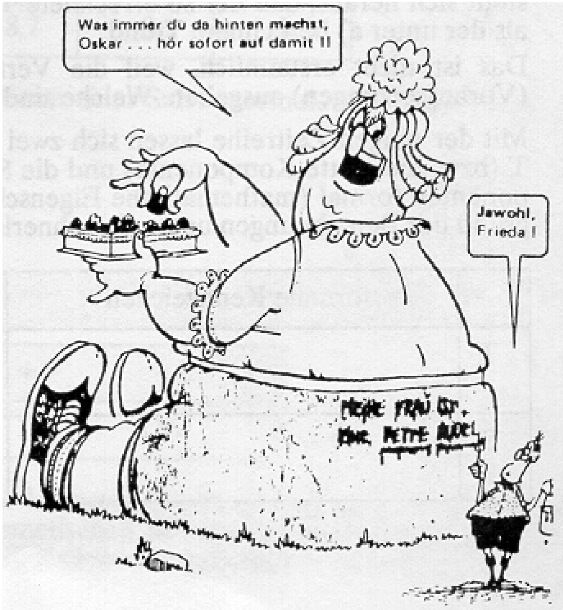
Berechnen Sie zentrierte gleitende Vier-Quartals-Durchschnitte!

Aufgabe 11.8

Die Hausfrau H wusste stets kulinarischen Genuss zu schätzen und entwickelte unterdessen ein Raumbedürfnis welches hienieden sonst nicht schicklich ist.

Sie trachtete deshalb hinfort danach, durch Schlankheitsmittel ihre Proportionen auf ein gefälligeres Maß zu reduzieren.

Dabei gebrach es ihr jedoch an der gebotenen Konsequenz, so dass ihr Gewicht y (in kg) stark schwankte und sich eine nachhaltige Reduktion nicht einstellen wollte, wie die folgenden Zahlen zeigen:



t	0	1	2	3	4	5	6
t^*	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3
y_t	120	130	125	120	130	125	120

Man bestimme
a) Gleitende Durchschnitte zu jeweils 3 Perioden,
b) einen linearen Trend mit der Methode der kleinsten Quadrate und
c) einen Prognosewert für die Periode 7 mit der Methode des exponentiellen Glättens (a = 0,2)!

Aufgabe 11.9

Der Verkauf von Sonnenöl (yt) der Marke "Roberto Blanco" hat sich in den letzten 13 Perioden wie folgt entwickelt (in Tsd. Flaschen):

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
y_t	22	25	28	25	28	31	28	31	34	31	34	37	34
$\tilde{y}_t$		25	26	27	28								
$y_t - \tilde{y}_t$													

a) Berechnen Sie unter Bestimmung der Zykluslänge p die gleitenden Durchschnitte y_t sowie die trendbereinigten Werte ($y_t - \tilde{y}_t$).
b) Ermitteln Sie außerdem die lineare Trendfunktion $y_t = a + bt$ mit der Methode der kleinsten Quadrate.

Aufgabe 11.10

Das Stahlwerk S ist in den letzten Jahren von einer wachsenden Zahl von Besuchern besichtigt worden, darunter auch ein zunehmender Anteil A von Frauen. In der gleichen Zeit haben sich auch Umsatz U und Kapitalstock K der Firma beträchtlich erhöht. Für die Anzahl B der Besucher gelte:

Jahr	Besucher
1990	150
1991	200
1992	250
1993	300
1994	290
1995	310
1996	390
1997	380

a) Man bestimme gleitende Mittelwerte von jeweils drei Jahren!

b) Die gleitenden Mittelwerte stellen dar

	die Saisonkomponente
	die Konjunkturkomponente
	den Trend, bzw. die glatte Komponente
	die vom Trend bereinigten Werte

c) Welche Größe erhält man, wenn man die Abweichungen von den gleitenden Mittelwerten berechnet und wie groß sind diese Abweichungen?

d) Geben Sie durch Ankreuzen an, um was es sich bei den genannten Größen handelt:

K		Bestandsmasse		Bewegungsmasse
U		Bestandsmasse		Bewegungsmasse
B		Bestandsmasse		Bewegungsmasse
A		Gliederungszahl		Beziehungszahl
U/K		Gliederungszahl		Beziehungszahl

e) Um herauszubekommen, in welchen Jahren sich die Besucherzahl besonders häuft (konzentriert) berechne ich (Richtiges ankreuzen):

	die Lorenzkurve, weil sich die Besucherzahl auf bestimmte Jahre konzentriert
	die Abweichungen vom Trend, weil dies zeigt, in welchem Jahr besonders ungewöhnliche Verhältnisse vorlagen

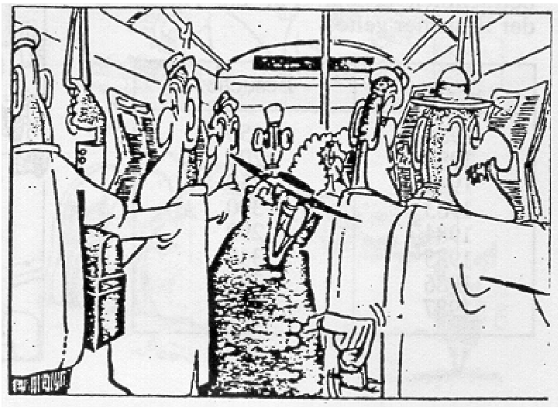
	den Modus
	die Korrelation mit dem Umsatz, weil die Besucherzahl hiervon abhängig ist

Aufgabe 11.11

Die Verkehrsbetriebe der Großstadt L sind besorgt über die häufige Meldung von Diebstählen in den Straßenbahnen. Es besteht die Vermutung, dass das Auftreten von Taschendieben saisonabhängig und außerdem abhängig von der Anzahl der Verkehrsteilnehmer (Fahrgäste) ist. Eine Statistik für zwei Jahre ergab die folgenden Zahlen über Diebstähle und Straßenbahnbenutzer (Fahrgäste):

Jahr /Quartal	Diebstähle	Fahrgäste*)
1/ 1	100	20
2	80	18
3	0	10
4	140	24
2/ 1	100	20
2	80	18
3	0	10
4	140	24

*) in Tausend



a) Man bestimme für die Anzahl der Diebstähle zentrierte gleitende Mittelwerte zu je vier Werten.

b) Die Rechnung zeigt (Richtiges ankreuzen), dass

	es keine Saisonkomponente gibt
	es keinen Trend gibt
	der Trend ansteigt
	der Trend absinkt
	die Saisonkomponente konstant 80 ist

c) Die Anzahl der Diebstähle je Straßenbahnbenutzer ist

	konstant			eine Verhältniszahl
	eine Messzahl			ein Mittelwert
	eine Gliederungszahl			eine Beziehungszahl

d) Man zeichne das Streuungsdiagramm der Anzahl der Straßenbahnbenutzer (X) und der Diebstähle (Y) [Achsen beschriften!] und beantworte die folgenden Fragen:

Die Regression ist

	linear			nicht linear
	positiv			negativ

Der Korrelationskoeffizient ist schätzungsweise: ....

e) Bestimmen Sie die klassierte Verteilung der Diebstähle und der Fahrgäste [Straßenbahnbenutzer] (Einheiten sind jetzt die Quartale):

Diebstähle	n_i	h_i
0 bis unter 90		
90 bis 150		

Fahrgäste	n_i	h_i
0 bis 19		
über 19		

Kann man aus der Ähnlichkeit der beiden Verteilungen bereits schließen ob die Anzahl der Diebstähle und der Straßenbahnbenutzer evtl. hoch miteinander korreliert ist? Begründung!

Aufgabe 11.12

Für einen in der Innenstadt angesiedelten Supermarkt wurden in den letzten drei Jahren folgende trendbereinigte Umsätze (in Mio. DM) ermittelt:

	Jahr		
Quartal	1996	1997	1998
I	-4	+1	-3
II	+8	+4	+6
III	-5	-3	-4
IV	+12	+8	+10

Ermitteln Sie die
- nicht - normierte
- normierte

Saisonfigur sowie die Restkomponente!

Aufgaben zum Kapitel 12

Aufgabe 12.1

Wegen des zur Nachsaison unsicheren Wetters ist das Badevergnügen oft von nur kurzer Dauer. Andererseits ergreifen jedoch die Urlauber angesichts der ihnen entstandenen Kosten und Mühen jede sich bietende Gelegenheit, den Strand aufzusuchen. Am Strand von Katapulco gab es mithin an einem Vormittag (von $t_0 = 9$ bis $t_m = 13$ Uhr) ein ständiges Kommen und Gehen von (zwecks Rechenvereinfachung) nur fünf Urlaubern A,...,E. Für die Zeiten galt:

	Zugang	Abgang
A	09^{30}	10^{00}
B	10^{30}	11^{00}
C	10^{45}	12^{30}
D	09^{45}	11^{15}
E	11^{45}	12^{45}

a) Man zeichne das Becker'sche Diagramm und berechne die folgenden Kennzahlen der Bestandsanalyse:

Zeitmengenfläche F_{om}	
Durchschnittsbestand	
mittlere Verweildauer	
Umschlagshäufigkeit	

b) Erklären Sie in eigenen Worten, was mit der Kennziffer "Umschlagshäufigkeit" ausgesagt wird:

c) Berechnen Sie Anfangs- (B_o) und Endbestand (B_m) sowie die mittlere Aufbau- (d_o) und Abbauzeit (d_m) für das Beispiel 12.1, wenn man als Beobachtungsintervall die Zeit von 10 bis 11 Uhr zugrunde legt. Berechnen Sie ferner die durchschnittlichen Verweildauern d_N und d_Z.

Aufgabe 12.2

Für die Bundesrepublik wurden die folgenden Zahlen zur Arbeitslosenstatistik ermittelt,[1] für die folgendes zu berechnen ist:

- der Durchschnittsbestand (der Arbeitslosigkeit),
- die durchschnittliche Verweildauer (in der Arbeitslosigkeit) sowie
- die Umschlagshäufigkeit des Arbeitslosenbestandes!

[1] Quelle: Kühl, J., 15 Jahre Massenarbeitslosigkeit, Aspekte einer Halbzeitbilanz, in: Aus Politik und Zeitgeschichte, Beilage zur Wochenzeitschrift "Das Parlament", 16.9.88

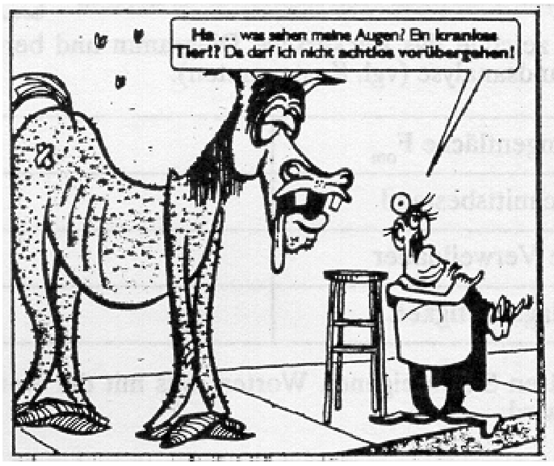
Jahr	Bestand	Zugang	darunter aus ET*)	Abgang
1982	1833244	3706655	2833726	3187165
1983	2258235	3704185	2698263	3578551
1984	2265559	3672791	2612203	3696594
1985	2304014	3750240	2658574	3728294
1986	2228004	3637266	2553496	3766214
1987	2228788	3726460	2606148	3636411

*) ET = Erwerbstätigkeit;

Aufgabe 12.3

Trotz intensivster ärztlicher Bemühungen haben sich die fünf ersten Exemplare einer neu gezüchteten Pferderasse als nicht sonderlich überlebensfähig herausgestellt. Das Pferd Egon konnte noch nicht einmal seinen ersten Geburtstag feiern. Das Alter (in vollendeten Jahren), das die fünf Pferde erreichten betrug leider nur:

Pferd	Alter
Egon	0
Doris	1
Boris	2
Clara	2
Augustus	3



Man bestimme aus diesen Daten alle Sterbetafelfunktionen l_x, d_x, T_x und e_x, sowie L_x, T_x^* und e_x^*! Interpretieren Sie die Größe T_x als die Anzahl der von den l_x Tieren, die das Alter von x erreicht haben, insgesamt noch zu durchlebenden Jahre!

Aufgabe 12.4

Ein Lager werde zur Zeit to mit vier Waren (A,...,D) gefüllt und der Lagerbestand soll während der ganzen Beobachtungszeit von $t_o = 0$ bis $t_m = 8$ konstant 4 betragen:

a) alle vier Waren haben die gleiche Verweildauer von 4 Perioden

b) zwei der vier Waren (A, B) haben eine Verweildauer von 2 Perioden und zwei Waren (C, D) von 4 Perioden.

Man bestimme die den beiden Teilen zugrundeliegenden Verteilungen der Verweildauer sowie die Umschlagshäufigkeit des Lagers in beiden Fällen.

Aufgabe 12.5

Gegeben seien die folgenden vier Fälle von Bestandsveränderungen (jeweils eine geschlossene Masse):

	Fall 1		Fall 2		Fall 3		Fall 4	
Einheit	t_{Zi}	t_{Ai}	t_{Zi}	t_{Ai}	t_{Zi}	t_{Ai}	t_{Zi}	t_{Ai}
A	1	4	1	3	1	3	1	2
B	2	3	2	4	2	4	2	5
C	3	4	3	4	3	4	4	6
D	4	6	4	6	4	7	5	6
E	5	7	5	7	5	6	5	7

Wie unterscheiden sich diese Fälle hinsichtlich

- der zeitlichen Verteilung der Zu- und Abgänge,
- der Bestandsfunktion,
- der Verweildauerverteilung und
- des Becker'schen Diagramms?

Aufgabe 12.6

Gegeben seien die folgenden Absterbeordnungen l_x (fiktive Zahlen), die mit A, B und C bezeichnet werden sollen sowie eine weitgehend unbekannte Absterbeordnung D:

A		B		C	
x	l_x	x	l_x	x	l_x
0	50	0	50	0	50
1	40	1	45	1	32
2	30	2	38	2	24
3	20	3	27	3	12
4	10	4	19	4	3
5	0	5	0	5	0

D	
x	l_x
0	50
1	?
2	?
3	?
4	?
5	0

Als lineare Absterbeordnung bezeichnet man den Fall, d.h. die Absterbeordnung (Richtiges ankreuzen):

	A		B		C

Die größte Lebenserwartung eines Nulljährigen e_o erhält man bei:

	A		B		C

Die kleinste Lebenserwartung eines Nulljährigen e_o erhält man bei:

	A		B		C

über die Absterbeordnung l_x im Fall D ist fast nichts bekannt (fast überall ein ? statt einer Zahl). Durch eine einfache Überlegung kann man aber feststellen, wie groß T_x für x = 0 also T_o mindestens und höchstens sein kann (und damit auch e_o):

T_o ist höchstens	T_o ist mindestens
e_o ist höchstens	e_o ist mindestens

Von den Tafelfunktionen q_x, T_x und e_x läßt sich folgendes sagen [für beliebige Werte von x (Alter) bei einer Sterbetafel, wobei davon auszugehen ist, dass die Menschen zwischen 0 und ca. 100 Jahre alt werden und die Sterbetafel mit l_o = 100.000 beginnt]:

A die Funktion kann nicht zunehmen (sie ist monoton fallend)

B sie kann nur Werte zwischen 0 und 1 annehmen

C sie nimmt Werte zwischen 0 und ca. 100 an

D sie nimmt Werte zwischen 0 und maximal 100.100000 an

Tragen Sie die Buchstaben (es kann auch mehr als ein Buchstabe richtig sein) in die freien Felder ein:

Beispiel: q_x: A, C

q_x	
T_x	
e_x	

Ende des Aufgabenteils

Lösungen der Übungsaufgaben Deskriptive Statistik

Kapitel 1

1.1 Bestandsmasse (stock S), Bewegungsmasse (flow F): Auftrag (F), Anlagev. (S), Sozialp. (F), Nettoinv. (F), landw. Nutzfl. (S), Ehescheid. (F), Steuerein. (F), Sparv.(S), Schulden (S), Neuversch. (F), Baufertigst. (F), Gutschriften (F), Geburten (F).

1.2 qualitativ, häufbar, intensiv, latent.

1.3 1. drei: Art des Gerichts (Pizza, Sonstige), Essenszeit (M,A), Nr. des Lokals (L1,L2)
2. a) Einheit
b) Merkmalsausprägung (auch e,h)
c) Identifikationsmerkmal bzw. -ausprägung (auch h)
d) Umfang der Masse (Teilmassen f,g).

1.4 Angemessen ist Kreisdiagramm; Winkel: G:180^0, H:60^0, N:120^0.

1.5 lineare Transformation, Intervallskala

1.6 N,O,I,R

1.7 a) sinnvoll: Modus, Kreisdiagramm
b) Z = diskret, metrisch, A = nominalskaliert.

1.8 Alter: Ratioskala $\bar{x}$ =20
Bild.: Nominalskala, Modus (aber hier alle drei Ausprägungen gleich häufig)
Emotion: Nominalskala, Modus = A
Bildungsstand (2), mittl. Alter (5), Alter 25 (3), Person F(4)
Daten (1), Bildung gering (3) .

Kapitel 2

2.1 Klassifikation ist unsinnig, weil die systematischen Positionen nicht erschöpfend und nicht sich gegenseitig ausschließend sind.

2.2 Alter und Wochenarbeitszeit Ratioskala; Rest Nominalskalen.

2.3 R,N,I,N,N,N,N,N,N,R,R,N,N(O),N .

2.4 Welche Einheit im Rahmen der Quote ausgewählt wird, bleibt dem Interviewer überlassen; Auswahlfehler ist kein Zufallsfehler (keine Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung!).

2.5 Anzahl der Beschäftigten, E, G und K (4 Merkmale) gegliedert nach Zweigniederlassung. Ausprägungen sind Geldbeträge bzw. Anzahl der Personen, Summenvariablen G, K; Häufigkeiten sind n_A,n_B. Da Gliederung nach nominalskaliertem Merkmal (Ausprägung A,B), keine Häufigkeitsverteilung!); $\bar{x}$ = 1628,57 .

Kapitel 3

3.1 Rangskala der Güteklassen 0,1,...

x_i	0	1	2	3	4
h_i	0,12	0,28	0,32	0,2	0,08
H_i	0,12	0,4	0,72	0,92	1

Zähleinheit: Übernachtung; Merkmale: Dauer des Aufenthalts nach Art des Hotels.

3.2 Winkel für das Kreisdiagramm: Privater Verbrauch 220,86°, Staatsverbrauch 55,87°, Investitionen 71,97°, Außenbeitrag 11,3°

3.3

x_i	n_i	N_i	$h_i \cdot 100$	$H_i \cdot 100$
2	2	2	6,67%	6,67%
3	4	6	13,33%	20,00%
4	7	13	23,33%	43,33%
5	6	19	20,00%	63,33%
6	4	23	13,33%	76,67%
7	3	26	10,00%	86,67%
8	2	28	6,67%	93,33%
9	1	29	3,33%	96,67%
10	1	30	3,33%	100%

f) klassierte Verteilung

	n_i	N_i	$h_i \cdot 100$	$H_i \cdot 100$
$0<x\leq4$	13	13	43,33	43,33
$4<x\leq7$	13	26	43,33	86,67
$7<x\leq10$	4	30	13,33	100

3.4

Fahrzeit	n_i	b_i	n_i/b_i	H_i
$0\leq x<5$	100	5	20	0,1
$5\leq x<10$	400	5	80	0,5
$10\leq x<20$	300	10	30	0,8
$20\leq x<60$	150	40	3,75	0,95
$60\leq x<120$	50	60	0,83	1

Die Blöcke für das Histogramm müssen eine Höhe haben, die proportional zu den Werten n_i/b_i (Häufigkeit je Klassenbreite) sind. Da diese Werte sehr unterschiedlich sind, empfiehlt es sich, die letzte Klasse als beispielsweise $20\leq x<60$ zu definieren (obgleich x tatsächlich größer ist, sogar über 60), damit das Bild noch vernünftig darstellbar ist. Dann wäre $h_4/b_4=200/40=5$, was als Höhe ohnehin wenig ist gegenüber Werte wie z.B. 80. Man könnte außerdem die ersten beiden Klassen zusammenfassen. Man erhält dann n/b=50. Die letzte Klasse muss willkürlich geschlossen werden (hier zunächst mit 2 Stunden!). Die Abgrenzung der Intervalle für die Summenhäufigkeitskurve H_i ist eigentlich $a<x\leq b$ und nicht wie hier $a\leq x<b$. Die Höhen H_i sind obiger Tab. zu entnehmen. Hier ist nicht durch die Klassenbreiten zu dividieren!

3.5

x_i	n_i	h_i	N_i	H_i
0	6	0,3	6	0,3
1	5	0,25	11	0,55
2	5	0,25	16	0,8
3	3	0,15	19	0,95
4	1	0,05	20	1,0

Frauen (h_i,N_i,H_i entsprechend)

y_i	n_i
0	11
1	8
2	20

3.6 Da $\sum n_i = n = 100$, sind die angegebenen absoluten Häufigkeiten zugleich die prozentualen Häufigkeiten. Ein Balkendiagramm ist leicht zu zeichnen.
$\bar{x} = 3$, $s_x^2 = 1{,}1$, Verteilung ist linkssteil $SK_M = 1{,}0401$

3.7 a) nur "stetig" ist falsch (also R, F, R, R); Merkmal: Anzahl der Tore.
c) Approximative Lösung:

$$h(x \leq 7) = h(x < 6) + \frac{1}{4} h(6 \leq x < 10) = 0{,}875 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}125 = 0{,}90625$$

$$h(x > 4) = h(6 \leq x < 10) + \frac{1}{2} h(4 \leq x < 6) = 0{,}125 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = 0{,}291\overline{6}$$

e) für Teil c erhält man jetzt h(x≤7) = 22/24, h(x>4) = 7/24. Funktion H(x) für jedes angegebene x zu bestimmen.
$\bar{x} = 3{,}458$, $\tilde{x}_{0,5} = 3$ (keine Interpolation innerhalb einer Klasse nötig!).

Kapitel 4

4.1 $\bar{x}$ ist stets 100, obgleich die Gestalt der Verteilung sehr unterschiedlich ist.

4.2 a) $\bar{x} = 9$, $\hat{\bar{x}} = 9{,}5$
b) ungewogene (Einzelwerte) und gewogene Berechnung führen zu $\bar{x} = 6$.

4.3 Man sollte erkennen und interpretieren: weil die Ausgabe (Menge·Preis) konstant (jeweils 1DM) ist, gilt: ungewogenes harmon. Mittel der Preise (1/3 und 1/5 DM) = gewogenes (mit Mengen 3 bzw. 5) arithmet. Mittel der Preise = 0,25.

4.4 Linearkombination: DM 2430,-.

4.5 $\bar{x} = 31{,}6$; $\tilde{x}_{0,5} = 20$ Summe der negativen und der positiven Abweichungen von $\bar{x}$ ist gleich (nämlich 290,8).

4.6 Es sollte jeweils Null das Ergebnis sein (Schwerpunkteigenschaft von $\bar{x}$).

4.7 Wahres Mittel $\bar{x} = 718.517$ DM (aufgrund der wahren Klassenmittelwerte bzw. der Gesamtangaben 479.437 und 667.259). Geschätzter Mittelwert mit den geschätzten Klassenmitteln (50.000, 150.000 usw., letzte Klasse [willkürlich] 6 Mill.) ergibt $\hat{\bar{x}}$ = 706.034 DM. Graphik optisch nicht schön, da sehr unterschiedlich breite Klassen!

4.8 Geometr. Mittel der Wachstumsfaktoren: 1,11119; also 11,12% ist die durchschnittl. Wachstumsrate, nicht (10+20+10+5)/4 = 11,25% (das wäre zu groß!).

4.9 $\bar{x}$ = 87,5 (sinnvoll und üblich); $\bar{x}_G$ = 70 (leicht zu interpretieren: Ist $x_0 = 4x_A$, so sollte das Gewicht einer mittleren Person $2 \cdot x_A$ sein). Allgemein gilt $\bar{x}_G \leq \bar{x}$ ($\bar{x}_G = \bar{x}$ wenn $x_A = x_0$).

4.10 $\bar{x}$ = 200, bei 0,185 Std. bedeutet dies 37 statt 36 km; richtig ist $\bar{x}_H$ = 194,59 km/h als Durschnittsgeschwindigkeit (dann 36 km bei 0,185 Std.). Ungewogene Mittel weil die drei Strecken gleich lang sind.

4.11 Flächenleistungen sind 1/3 und 1/5 Fläche pro Stunde. Das ungewogene harmonische Mittel aus 3 und 5 ist 3,75 also 1/3,75 = 0,267 Fläche pro Stunde. Die Durchschnitts-leistung von 1/4 Fläche ist zu gering (0,25 < 0,267).

4.12 90 km/h ist falsch, weil die Durschnittsgeschwindigkeit nicht $\bar{x}$ = ½(90+30) = 60 ist, sondern das harmonische Mittel. Mit 30 km/h braucht R für 4 km genau 8 Minuten. Mit 60 km/h müsste er hin und zurück in 8 Minuten gelangt sein. Die mittlere Geschwindigkeit bei 30 und 90km/h ist nicht 60 km/h, sondern 45 km/h.

4.13 a) 12, b) (12+13)/2 = 12,5 .

4.14 Median: vorher und nachher 53; $\bar{x}$ vorher: 54,2 nachher: 48,8 .

4.15

	1. Quartil	Median	3. Quartil	arith. Mittel
Männer	37,12	38,88	40,64	38,84
Frauen	29,05	37,45	39,56	34,16
gesamt	36,45	38,35	40,25	36,94

4.16 arithmet. Mittel 0% offensichtl. unsinnig. Gehalt ist geringer geworden. Mittlere Wachstumsrate -2,02%.

4.17 a) 15%, b) 65%, c) 50, d) Ordinalskala .

4.18 $Q_1 = 25$, $Q_2 = Z = \tilde{x}_{0,5} = 45$, $Q_3 = 75$.

4.19 Vgl. Aufg. 4.7. Bei gleicher Klasseneinteilung und gleichen Klassenmitten erhält man $\hat{\bar{x}}(1977)$ = 675.598 und $\hat{\bar{x}}(1983)$ = 706.034 .Die wahren Klassenmitten sind durch Angabe der Gesamtvermögen zu bestimmen. Man erhält $\bar{x}(1977)$ = 634.107 und $\bar{x}(1983)$ = 718.517.

4.20 a) $\bar{x} = x$ so dass $\bar{x}^4 = x^4$. Dagegen ist $(\bar{x}_G)^4 = x^2(x^2\text{-}D^2)$.

b) $s_x^2 = D^2/2$

c) die Durschnittsgeschwindigkeit H (harmon. Mittel) kann nicht größer als 90 sein, weil man die folgende quadratische Gleichung erhält $D^2 = 90(90\text{-}H)$. So gilt etwa $H = 80 \rightarrow D = 30$ oder $H = 87{,}5 \rightarrow D = 15$.

4.21 a) alle Mittelwerte, die Spezialfall des Potenzmittels sind, etwa $\bar{x}_H$ = 14,1176, $\bar{x}_G$ = 14,5648, $\bar{x}$ = 15, x_Q = 15,41.

b) vgl. Gl. 4.23

c) n(n-1)/2 = 6, so dass nach Gl.5.39 gilt S_G = 30/6 = 5 .

4.22 Begriffe "monatl. Mittel" und "heißester Monat" sind nicht eindeutig. Es gilt: tägl. Messungen i=1,...,48; Tage des Monats k=1,...,n_j; Monate j=1,...,12; heißester Monat habe Subskript m. Mit

$T_m = \max_j \frac{1}{48n_j} \sum_j \sum_k x_{jk}$ (monatl.Mittel...) und $M_m = \frac{1}{n_m} \sum_k \max_i x_{ik}$ (Mittel der tägl. Maximaltemp.) gilt $ART = T_m + (T_m - M_m)/3$.

4.23 Dem Zitat liegt eine Verwechslung von arithmet. Mittel $\bar{x}(1835)$ und Median (elf Millionen, also 50%) zugrunde. Bei Linkssteilheit, die üblicherweise gegeben ist, ist $\tilde{x}_{0,5} < \bar{x}$, bei den Angaben gem. Gl. 5.64 1300. Das hieße, die Hälfte hat nicht weniger als 1800, sondern weniger als 1300 DM verdient. Ehrenberg hätte besser (in seinem Sinne) argumentieren können, wenn er nicht $\bar{x}$ als $\tilde{x}_{0,5}$ interpretiert hätte.

Kapitel 5

5.1 $\overline{Q}_{0,25}$ ändert sich nicht (2,5); R (Spannweite) steigt von 9 auf 69; s^2 steigt von 7,82 auf 370,2.

5.2 d um Z (d_x) früher 2, jetzt 3, d um $\bar{x}$ (d_x^*) früher 1,25, jetzt 5.

5.3 220/6 = 36,67 .

5.4 a) nein (bei Berechnung aus Einzelwerten) $d_z = d_x \leq d_{\bar{x}} = d_x^*$.

b) Bei Schüler B und C: $\tilde{x}_{0,5} = Z = 4$ gleich, d_x jeweils 1 aber d_x^* bei B: 1,111 bei C: 1,333 ($s_B^2 = 1{,}55$, $s_C^2 = 2$).

5.5 $s_B^2 = 4$; $s_B = 2$; $s_C^2 = 2$; $s_C = 1{,}4142$.

5.6 a) $s_x^2 = 54{,}85 - (6{,}4^2) = 13{,}89$

b) nur externe Varianz 12,54 .

c) gleiche Daten bei b: dann innere Varianzen $s_1^2 = 11/4$, $s_2^2 = 2/3$, $s_3^2 = 1/6$; interne Varianz: 1,35, Gesamtvarianz $s^2 = 12{,}54 + 1{,}35 = 13{,}89$.

5.7 $\bar{x} = 600$, $\bar{y} = 600$; Lineartransformation, b ist richtig.

5.8 $s_{int}^2 = 1{,}5$, $s_{ext}^2 = 12{,}54$, $s_{ges}^2 = 14{,}04$.

5.9 $\bar{x} = 880$, $s_x = 200$, Lineartransformation $y = 50 + 1{,}2x$, also $\bar{y} = 1106$, $s_y = 240$.

5.10

	A	B	C	D
Schiefe	+0,694	0	-0,694	0
Wölbung	-0,222	-0,5	-0,222	+0,935

5.11 Anfangsmomente $m_1 = 2$, $m_2 = 4{,}5$, $m_3 = 11$; zentrale Momente $z_1 = z_3 = 0$, $z_2 = 1/2$.

5.12 Konstruktionsprinzip 1; erfüllt alle Axiome; 4J,6J, alle anderen Antworten N .

5.13 a) immer Null (Schwerpunkt); b) n = 1 oder alle $x_v = \bar{x}$; c) F,R,F (Zentrum: $\tilde{x}_{0,5}$),F.

5.14 $\bar{x} = 4$, $s^2 = 8$, $z_3 = 40$, Schiefe 1,7678; linkssteil, diskret, rechtsschief, asymmetrisch

5.15 $\bar{x} = 10200/200 = 51$, Median (Zentralwert) $Q_2 = Q_1 = 0$, $Q_3 = 1$, also $\overline{Q}_{0,25} = 1/2$, in Klasse 4 457 Einw. im Mittel.

5.16 a) Mittelwerte: 2,7,12; Varianzen 2/3, 1,5, 2

b) $\bar{x} = 7$ (Gl. 4.9), $s^2 = 1{,}4 + 15 = 16{,}4$ (Gl. 5.11)

c) $s_{ext}^2 = 15$.

5.17 $\bar{x} = 1.500$, $s^2 = 220.000$.

5.18 $\bar{x} = 3{,}1715$; Median (ohne Interpolation) und Modus: 2,95; s = 0,3894, V = 0,1228, linkssteil (positive Schiefe).

5.19 a) Maßeinheiten: mm bei Mittelwert, Modus, Standardabweichung, $(mm)^2$ bei Varianz, Variationskoeffizienten: I: 0,414, II: 0,083 .

b) Verteilung I ist symmetrisch und streut erheblich mehr als die leicht linkssteile Verteilung II bei etwa gleichem Mittelwert .

c) beide 11,6 .

5.20 1. nein, $\bar{x}$ jeweils 15

2. nein, s^2 jeweils 36

3. Schiefe vorher +0,694 (A), nachher -0,694 (C) .

Kapitel 6

6.1

H_i	0,4	0,7	0,9	1,0
Q_i	0,2	0,5	0,8	1,0

$D_G = 0{,}27$

6.2 von 0 auf 1/6 (in beiden Fällen).

6.3 die ersten beiden Klassen zusammenfassen und $\overline{x} = 0$ setzen.

a) null, 2

b)

H_i	0,0667	0,5	0,9667	1
Q_i	0	0,054	0,6375	1

6.4 Disparität in A und B gleich: $D_G = 0{,}6$.

6.5

H_i	0,6	0,9	1
Q_i	0	0,5	1

$D_G = 0{,}7$

6.6

H_i	0,5	1	
Q_i	1/3	1	

$D_G = 1/6$

6.7 a) $L_1 = 450, L_2 = 900 = \overline{L}, L_3 = 1800$

b) $s_L^2 = 243.000$; $V = \sqrt{0{,}3}$

c) $D_G = 0{,}28$

d) 0,4 .

6.8 Städte unabhängig von der Einwohnerzahl nach Anzahl der Vampire ordnen:

	Q_i
L	0,08
übr. S.	0,2
DD	0,36
BZ	0,6
GR	1

$D_G = 0{,}32$

6.9

H_i	1/3	2/3	1
vorher Q_i	3/12	7/12	1
nachher Q_i	4/15	9/15	1

$D_G = 1/9$ (vorher)

$D_G = 4/45$ (nachher)

6.10

H_i	0,5	0,75	0,9	1
Q_i	0,25	0,5	0,75	1
Steig.	0,5	1	1,667	2,5

$D_G = 0{,}325$; Anteil: 0,5; nicht schneiden, tangieren (sie kann mit der Gleichverteilungsgerade identisch sein)

6.11

Klasse	1	2	3	4
H_i	0,6	0,8	0,9	1
Q_i	0	0,004	0,11	1

$D_G = 0{,}8768$

b) Konzentration verringert sich.
c) darf man nicht .
d)

H_i	0,8	0,9	1
Q_i	0	0,106	1

$D_G = 0{,}8788$

6.12 Danach müsste die durchschnittl. Anzahl der Beschäftigten bei z.B. einer Gesamtzahl 10.000 Beschäftigten und 100 Betrieben sein:
Klein: 40, Mittel: 300, Groß: 66,7
Die Daten sind also nicht richtig geordnet!

6.13 Bei $\bar{x} = 3000$ ist die Steigung der Lorenzkurve 1 wegen $s_i = \frac{x_i}{\bar{x}}$; beim Median Z ist Steigung kleiner (0,8), also $Z < \bar{x}$ (linkssteil!).

6.14 aus $q_i = s_i\, h_i$ folgt

	E_1	E_2	E_3
q_i	0,2	0,3	0,5

wegen $\bar{E} = 2000$ gilt z.B. bei 100 Beschäftigten für die Gesamteinkommen der drei Gruppen: 40.000, 60.000, 100.000 und damit für die Durchschnitte in den Gruppen:
$E_1 = 40.000/50 = 800$, $E_2 = 1.500$, $E_3 = 10.000$.

6.15 a) Eigentlich nur für W, Merkmale I und M nicht metrisch skaliert und nicht extensiv
b)

H_i	0,5	0,7	0,8	1,0
Q_i	0,11	0,22	0,35	1,0

c) 1. Statistiker bleibt in der gleichen Klasse; Flötenerfinder verringert Anzahl der Bewohner in Höhlenklasse 1 und damit auch q_1 zu Gunsten von q_4; Disparität wird größer (Konzentration der Bewohner auf größere Höhlen).
2. In Höhlenklasse 1 vorher ca. 150 Personen, jetzt nur noch 50; neue Höhlenklasse mit 100 Personen (über 70!). Disparität wird größer!

d) Einzelangaben sortieren!

Höhle	H_2,H_4	H_1	H_3,H_5
n_i	2	1	2
h_i	0,4	0,2	0,4
q_i	0,2	0,2	0,6

also Lorenzkurve:

H_i	0,4	0,6	1
Q_i	0,2	0,4	1

6.16 a) $\tilde{x}_{0,5} = 1,5$ $\bar{x} = 1,5$ b) symmetrisch c) 1,5

d)

H_i	0,2	0,5	0,8	1,0
Q_i	0	0,2	0,6	1,0

$D_G = 0,38$

e) Varianz und Disparität nie negativ! Richtige Antwort ist "positiv", $D_G>0$.

6.17 $D_G = 0,26$.

6.18 Durch Zusammenfassung von Klassen rückt der Polygonzug der "Lorenzkurve" näher an die Gleichverteilungsgerade heran, D_G sinkt.

6.19 a) $\tilde{x}_{0,5} = 250$, $\bar{x} = 400$

b) extensiv, diskret, metrisch; linkssteil ($\tilde{x}_{0,5}<\bar{x}$, aber Modus: 800!), eindimensional.

c)

H_i	0,2	0,4	0,6	1,0
Q_i	0,025	0,075	0,2	1,0

6.20 Steigung = q_i/h_i; aus n_i erhält man h_i und daraus q_i und Q_i. Lorenzkurve

H_i	0,4	0,6	0,8	1,0
Q_i	0,1	0,3	0,6	1,0

$D_G = 0,38$

$q_4 = 0,4$, also erhält die Klasse der besten Spieler zusammen 4 Mill.DM (im Durschn. 1Mill.DM).

6.21 a) Beziehungs-, Verhältniszahl

b) 1. Kundenzahl

2. $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = 0,25$; $q_1 = 0,05$, $q_2 = 0,15$, $q_3 = 0,35$, $q_4 = 0,45$

c)

	C	A	D	B
H_i	0,25	0,5	0,75	1,0
Q_i	0,05	0,2	0,55	1,0

$D_G = 0,35$

6.22

H_i	0,2	0,5	0,8	1,0
Q_i	0	0,2	0,6	1,0

$D_G = 0,38$; Lineartransformation! $\bar{x} = \frac{2}{3}1,5 = 1$; $s^2 = \frac{4}{9}1,05 = 0,467$.

6.23 $\bar{y} = 500 = \bar{x}$, $s_y^2 = 56.250 = (1,5)^2\ s_x^2$

H_i	0,25	0,5	0,75	1	D_G
Q_i vor Steuer	0,15	0,35	0,65	1	0,175
Q_i nach Steuer	0,1	0,275	0,6	1	0,2625

6.24 Aus den Angaben folgt, dass alle q_i = 1/4 sind. Es ließen sich auch leicht die mittleren Einkommen je Klasse $\bar{x}_i$ (i=1,...,4) berechnen. Steigungen (s_i)

h_i	0,5	0,25	0,15	0,1

$s_i=(1/4)/h_i$	0,5	1	1,67	2,5

$\bar{x} = 1.600 = \bar{x}_2$ (Man verifiziert leicht, dass $\bar{x}_i/\bar{x} = s_i$).

6.25

H_i	0,64	0,92	1
Q_i	0,164	0,48	1

$D_G = 0{,}5963$

6.26 $D_G = 1 - [h_q - (1-h)(1+q)] = h-q$; $s_x^2 = h(1-h)(x_1-x_o)^2$ da gilt $q = h\, x_o/\bar{x}$ und $1-q = (1-h)\; x_1/\bar{x}$ erhält man $(x_1-x_o)^2 = \bar{x}^2[(h-q)/h(1-h)]^2$ und $V^2 = s^2_x/\bar{x}^2 = D_G^2/h(1-h)$. Die Ungleichung gilt, weil h(1-h) maximal 1/4 sein kann.

6.27 Da die Steigung monoton steigend ist und bei $x = \bar{x}$ genau 1 ist, muss das Einkommen $x < \bar{x}$ sein, wenn die Steigung 0,8 ist. Der Punkt der Lorenzkurve, der dem Medianeinkommen zugeordnet ist, muss also links vom Punkt liegen, der $\bar{x}$ zugeordnet ist. Also ist $\tilde{x}_{0,5} < \bar{x}$ und die Verteilung von x linkssteil.

Kapitel 7

7.1 Zusammenhang erkennbar an geschlechtsspezifischen "Durchfallquoten" (bedingte Mittelwerte). Bestimmung der Randverteilungen elementar (wird auch aus Platzgründen bei den anderen Aufgaben nicht angegeben).

7.2 bed. Mittelwert von

y	2,75	2,5	3,5	4	3,5
x	1,5	2,714	2,727	3,1	4,167

7.3 $S_{vw} = 0$, $s_v^2 = 4{,}8$, $s_w^2 = 40.000$.

7.4 $\bar{y}|x$: 1,5 2 2,5; $\bar{x}|y$: 8 56/5 40/3; nichtlinear, positiv, $s_{xy} = 1{,}28$; $\bar{x}_H = 2/(1/6+1/10) = 7{,}5$.

7.5 a) identisch b) $r_{xy} = 5/6$ c) Scheinkorrelation d) 4

7.6 $\bar{y} = 3$, $s_y^2 = 1{,}5$, $\bar{x} = 2{,}5$, $s_x^2 = 0{,}75$, $\hat{x} = 1 + 0{,}5y$, $\hat{y} = 0{,}5 + x$ (identisch mit Regressionslinien), $s_{xy} = 3/4$, $r_{xy} = \sqrt{1/2}$.

7.7 $\hat{y} = 3{,}625 - 0{,}375x$, $\hat{x} = 2{,}667 - 0{,}167y$ (identisch mit Regressionslinien); $s_{xy} = -0{,}06$, $r_{xy} = -1/4$.

7.8 $\bar{x} = 52$, $\bar{y} = 46$, $s_x^2 = 2$, $s_y^2 = 20{,}96$, $S_{xy} = 4$, $r_{xy} = 0{,}6178$,

$\hat{y} = 43{,}22 + 0{,}19x$, $\hat{x} = -58 + 2y$

Regressionslinie $\bar{y}|x$ ist eine Gerade (42, 44, 46,...) aber nicht identisch mit der Regressionsgeraden, zweite Regressionslinie keine Gerade.

7.9 Offenbar Unabhängigkeit (eine Spalte ist ein Vielfaches einer anderen!), $\bar{y}|x = \bar{y}$ für alle Werte von x und $\bar{x}|y$ entsprechend konstant $\bar{x}$. Also $r_{xy} = 0$.

Kapitel 8

8.1 $\Sigma D = 400$, $\overline{D} = 40$ Kovarianz $s_{DM} = 0$
$\Sigma M = 300$, $\overline{M} = 30$ damit auch Korrelation $r_{DM} = 0$
$\Sigma DM = 12000$
Variante: $\overline{D} = 28$, $\overline{M} = 30$, $s_{DM} = -68$, $r_{DM} = -0{,}5718$

8.2 alle Antworten falsch.

8.3 a) $\frac{1}{2}(16{,}4)^2$
b) $\hat{y} = 50 + \frac{1}{2}x$
c) wenn $x = 75$ dann $\hat{y} = 87{,}5 > x$, wenn $x = 130$ dann $\hat{y} = 115 < x$.
d) nein; deterministische Interpretation einer stochastischen Beziehung; r^2 ist auch nur 25%.

8.4 a) $\hat{y} = 70 + 10x$
b) $\hat{y} = 135$
c) $r = 0{,}933$
d) r ändert sich nicht, wohl aber a und b.

8.5 a) Regressionsgeraden

$$\left.\begin{array}{l}\hat{x}_B = 18{,}046 - 0{,}7673 \cdot x_C \\ \hat{x}_C = 11{,}473 - 0{,}3942 \cdot x_B\end{array}\right\} r_{BC} = -0{,}5497$$

b) $\overline{x}_B$ (Bernd)

x_C	$\overline{x}_B \mid x_C$
3	15
6	14
9	15
12	6

$\overline{x}_C$ (Charlie)

x_B	$\overline{x}_C \mid x_B$
3	12
9	7,5
12	6
18	4,8

8.6 a) Schnittpunkt der beiden Regressionsgeraden
b) geringe positive Korrelation $r = +0{,}2236$.

8.7 a) $\hat{y} = 35 - x$ b) bei 35°: $\hat{y} = 0$ Minuten; bei -30°: 65 Minuten(!!),
c) Variante: $\hat{y} = 20 - \frac{1}{2}x$; alle Punkte liegen genau auf der Regressionsgerade ($r_{xy} = -1$).

8.8 a) $\hat{y} = 13{,}2 - 1{,}8x$
b) $r^2 = 0{,}95294$ ($s_{\hat{y}}^2 = 6{,}48$ das ist 95,3% von $s_y^2 = 6{,}8$).

8.9 ohne UT: $\hat{y} = \overline{y} = 3$ und $\hat{x} = \overline{x} = 5$, $r_{xy} = 0$
mit UT: $\hat{y} = -16{,}8 + 4{,}4x$, $r_{xy} = 0{,}6286$.

8.10 a) $\hat{y} = -2 + 0{,}6x$

Tag	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u	1,8	-2,6	-0,2	2,2	0	-1	-2,6	2,2	-0,4	0,6

b) $\Sigma u = 0$, $\Sigma u^2 = 28$, $s_u^2 = 28/10 = 2{,}8$; $s_y^2 = 10 = s_{\hat{y}}^2 + s_u^2 = 7{,}2 + 2{,}8$, $r_{xy}^2 = 0{,}72$, $1 - r_{xy}^2 = 0{,}28$ erklärter Anteil ist 72%.
c) R,F,F,F,F,F,R,R,F,F
d) nicht sinnvoll (nicht kausal zu interpretieren!).

8.11 a) Residualvarianz $s_u^2 = 0{,}76$, erklärte Varianz $s_{\hat{y}}^2 = 3{,}24$, Korrelation $r_{xy} = -0{,}9$

b) $s_x^2 = 9$

c) $b = -0{,}6$.

8.12 Typisches Beispiel für Zeitreihenkorrelation: r^2 ist hoch weil Geldmenge und Sozialprodukt einen gemeinsamen [ansteigenden] Trend haben; wird dieser durch Bildung von Zuwächsen weitgehend eliminiert, dann verringert sich auch die Korrelation.

8.13 $r = 0{,}96056$, $r^2 = 0{,}9267$, ($\hat{y} = 2{,}144 + 1{,}539x$).

8.14 a) nein $\hat{x}$ ist eine Parallele von $\hat{y}$ (also nicht einfach $r = \sqrt{3 \cdot \frac{1}{3}} = 1$ rechnen!)

b) ja, $r^2 = 1$ (die Geraden "fallen zusammen").

8.15 a) $\hat{y} = 2x$ wenn $x = 5$ dann $\hat{y} = 10$.

b) wenn $x = 4$, dann $\hat{y} = 8$, $y = 9$ also $u = y - \hat{y} = 1$ (Zufallsabw., Residualabw.), Gesamtabweichung $y - \bar{y} = 9 - 5$ (erklärt davon 4, nicht erklärt 1).

c) $s_y^2 = 2$; erklärt $s_{\hat{y}}^2 = 0{,}9^2 \cdot 2 = 1{,}62$; $s_x^2 = 0{,}4$; $s_{xy} = \frac{1}{n}\sum xy - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{44}{5} - 2 \cdot 4$ $= 0{,}8$ demnach ist r^2 eigentl. 0,8 nicht 0,81, wie in der Aufgabe angegeben; aber mit 0,81 lässt sich leichter rechnen (Quadratzahl!). Mit den vorher ermittelten Ergebnissen $s_{\hat{y}}^2 = 1{,}62$, $s_{xy}^2 = r^2 s_x^2 s_y^2 = 0{,}81 \cdot 0{,}4 \cdot 2 = 0{,}648 \approx 0{,}64 \to \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$.

8.16 $\sqrt{bd} = 6 - \frac{2}{3}y$, also muss auch die Steigung b der anderen Regressionsgeraden negativ sein. Außerdem muss $r = \sqrt{bd}$ zwischen -1 und 0 liegen. Möglich ist dann

$-1{,}5 \to r = -1$

$-0{,}3 \to r = -\sqrt{0{,}2}$

$-0{,}1 \to r = -\sqrt{1/15}$;

die anderen Werte scheiden aus (etwa bei $b = -2$ erhielte man $\sqrt{bd} = \sqrt{1{,}33}$).

8.17 Man kann zeigen, dass die Steigung der Regressionsgeraden $\hat{x}$ betragsmäßig größer

8.18 sein muss als die Steigung von $\hat{y}$. Also gilt L und bei 8.44 entsprechend auch L (links).

8.19 1. $\hat{y} = 50.000 + 5x$

2. 105.000

3. Gesamt: 20.000; erklärt und nicht erklärt jeweils 10.000

4. erklärte Varianz 2.025 Mill.DM², $r^2 = 0{,}81$, $1-r^2=0{,}19$.

8.20 b) x = Fläche, y = Miete; $\bar{x} = 59{,}33$, $s_x^2 = 772{,}89$, $\bar{y} = 323{,}33$, $s_y^2 = 48122{,}22$

d) Kausal interpretierbar nur $\bar{y}|x$: 166,67 254,84 642,86

e) $s_{xy} = 4.548{,}89$, $r_{xy} = 0{,}74589$

f) $\hat{y} = -25{,}877 + 5{,}8856x$.

Kapitel 9

9.1 Quoten: Beschäftigte 0,75 und 0,25, Lohnsumme 0,8; 0,2.

9.2 a) Nein, es sind die Schwankungen <u>eines</u> Jahres; Schluss ist schon deshalb unzulässig, weil die Verweildauer in der Ehe nicht ein Jahr ist; auch Unterschied zwischen Quer- und Längsschnittanalyse.

b) Analoge Kennzahl wie "Reichweite des Auftragsbestands" (Bestandsmasse / Abgangsmasse), daher auch ähnliche Interpretation denkbar.

9.3 a) Messziffern

A	100	109,1	120	130
B	100	110	120	135
insges.	100	109,7	120	133,3

b) weil die Messziffer der Gesamtumsätze ein gewogenes Mittel der Messziffern für A und B ist (Gewichte: Umsatzanteil zur Basiszeit also 1/3 und 2/3).

9.4 Demonstrationsbeispiel für Scheinkorrelation. Anteil der "Verunfallten": Männer 44%, Frauen 32%. In den Teilgesamtheiten häufiges und seltenes Fahren sind die Quoten aber gleich.

9.5 Möglich, weil Kapitalstruktur von X und Y verschieden sind. Bei X ist 20% des Kapitals in A und 80% in B investiert und bei Y genau umgekehrt.

9.6 Strukturabhängigkeit (Altersstruktur) der rohen Todesrate, die ein gewogenes Mittel der altersspezifischen Todesraten (0,1 und 0,6) ist. $\bar{x}$ ist 70 und 30.

9.7 26,8% (statt 24%) und 791,6% (statt 240%).

9.8 5,56%, Verdoppelung nach 12,8 Jahren.

9.9 $r_s = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ und $r_p = \dfrac{4}{2t-1}$

r_s : laufend abnehmen, nur positiv, gegen Null streben

r_p : R,F,R (wenn $t \geq 17$).

9.10 Wachstum mit konstanter Wachstumsrate (Dracula): $w_t = w = 3$ also $700.000 = 3^t \rightarrow t = 12{,}25$. Bei 60 Mill. ist t = 16,3 Monate .

9.11 1) 74,11%, 2) 200%, 3) 2600%, 4) 1458 (= $2 \cdot 3^6$).

9.12 a)

	1990	1991
1	0,08	0,07
2	0,05	0,04
	0,06	0,0625

Zunahme wegen veränderter Kapitalstruktur (mehr Kapital im rentableren Bereich).

b) 13,64 statt 15%, 25 statt 30%

c) arithmetisch, Kapitalanteile ; harmonisch, Gewinnanteile

d) Gewinn 500, Rent. 0,125

e) R F
R R
F F
F R

f) Für das Risiko evtl. zu sterben, ist wohl die Länge und Dauer des Transports weniger bedeutsam als die Häufigkeit, so dass für die meisten Menschen die erste und die letzte Beziehung relevant sein dürfte.

9.13 a) Maximum von F(t) bei t=4, dann $r_F(4) = 0$ c) $r_F(t) = (480t^2-120t^3)/F(t)$.

9.14 a) L(t)/6,75

b) $(2t-12)/(108+t^2-12t)$

c) $84/1836 \approx 0{,}0458$.

9.15 $$r(t) = \frac{x'(t)}{x(t)} = \frac{2t+5\cdot\cos(t)-60\cdot\sin(30t)+6\cdot\cos(2t)+5\cdot\cos(t)}{t^2+5\cdot\sin(t)+2\cdot\cos(30t)+3\cdot\sin(2t)+5\cdot\sin(t)} \quad .$$

9.16 Verhältnis-, Beziehungs-, Maßzahl; t = ln2/ln1,15 = 4,96

$x_{10} \approx 625 \cdot 4 = 2500$, dann $y_{10} = 500 + 4 \cdot 2500 = 10.500$; $\sqrt[10]{\frac{10500}{3000}} = \sqrt[10]{3{,}5} =$ 1,1335, also 13,4% (!); sie ist geringer. Wenn $y_t = y_0\, w^t$ ist die Folge der gleitenden Durchschnitte $\tilde{y}_t$: $1/3\, y_0\, (1+w+w^2) = \tilde{y}_1$, $\tilde{y}_2 = w\,\tilde{y}_1$ $\tilde{y}_3 = w^2 y_1$ usw. Die Aussage ist also richtig .

9.17 a) 0,4

b) t ist zu finden, so dass gilt $(2t-2)/(5-2t+t^2) = 0{,}5$. Mit der Hilfsangabe $[-b \pm \sqrt{b^2-4ac}\,]/2a$ erhält man aus $t^2-6t+9 = at^2 - bt + c = 0$ $t = 3$.

9.18 a) $(1{,}13 \cdot ... \cdot 1{,}08)^{1/5} = 1{,}2958^{1/5} = 1{,}0532$ also 5,32%

b) $i_s < i_d$.

9.19 diskret: 0,4926%, stetig: 0,5% .

Kapitel 10

10.1 a) 119,075

b) 124,36

c) b) ist zu bevorzugen .

10.2 1,25; Paasche liegt zwischen 1 und 2 (100 und 200).

10.3 1,1/1,06 = 1,03774 .

10.4 Kilopreis: $\overline{p}_t = 4$, $\overline{p}_0 = 2{,}5$, $P_{0t}^D = 4/2{,}5 = 1{,}6$

Pfundpreis für Tomaten: $\overline{p}_t = 3$, $\overline{p}_o = 1{,}75$, $P_{0t}^D = 1{,}7143$.

10.5 Ja, Mengen reduziert $Q^P = 1/1{,}2 = 0{,}833$.

10.6 a) $P_{0t}^L = 10/7 = 1{,}4286$

b) $P_{0t}^P = W_{0t}/Q_{0t}^L = 1{,}4/1{,}2 = 1{,}167$; $Q^P = W_{0t}/P_{0t}^L = 0{,}98$

c) mind. 0,8, höchstens 2.

10.7 150 (=1,5) .

10.8 1,5/1,25 = 1,2.

10.9 Verkettung des alten Indexes mit dem neuen; Alter Index fortgeführt: 800, 1200.

10.10 a) $P_{0t}^L = 1$, $P_{0t}^P = 0{,}8599$

b) $0{,}6 \leq P_{0t}^P \leq 1{,}67$

c) nein; gerade nicht bei preisunelastischer Nachfrage, wie z.B. Kfz-Nutzung

d) die gleitenden Mittelwerte liegen auf der Geraden 70-2t wenn März 1994 bedeutet t = 1.

10.11 $L_{0t}^L = 1{,}2 \cdot 0{,}5 + 1{,}1 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}2 = 1{,}13$ (L=Lohnindex); ihm liegt eine konstante Beschäftigungsstruktur (diejenige der Basisperiode) zugrunde. Die Durchschnittslöhne betrugen (bei der jeweiligen Beschäftigungsstruktur) zur Zeit t=0: 1000 und bei t=1: 1512, sie stiegen also um 51,2%, obgleich die Löhne sich maximal (bei GG) um 20% erhöhten. Grund: Veränderung der Beschäftigtenstruktur zugunsten der höheren GG.

10.12 1790 = 0, 1890 = 1, 1990 = 2; $P_{01}^L = 2{,}7$, $P_{02}^L = 25{,}02$.

10.13 $P^L = 1{,}225$, $P^P = 1{,}12346$, $W = 1{,}1375$ (Zunahme 13,75%).

10.14 a) $W = 1/3$, $P^L = 0{,}49167$, $P^P = 4/9 = 0{,}444$

b) da $P^L < W < 1$ muß auch $Q^L < 1$ sein, da $P^L/P^P = Q^L/Q^P > 1$ muss auch $Q^P < Q^L < 1$ sein, alle anderen Antworten sind falsch.

10.15 a) $P^L = 0{,}2$, $Q^P = 0{,}5$, $W = 0{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}1$

b) Spezialisierung auf A

c) aus $\Sigma u^2 = \Sigma p^2 - 2b\, \Sigma xp + b^2\, \Sigma x^2$ folgt, dass b minimal ist, wenn $b = \Sigma xp/\Sigma x^2$, dann ist $\Sigma u^2 = 200$. Bei $b = 1$ ist $\Sigma u^2 = 1000$.

10.16 a) $P^L = P^P = 1{,}2$, alle Preismesszahlen 1,2 (deshalb auch alle als Mittelwerte von

Messzahlen darstellbare Indizes gleich!).
b) das wäre so ein Fall (anderer Fall: gleiche Mengen bei 0 und t, anderer Fall → Aufg. 10.45).
c) natürlich.

10.17 a) $P^C = 1{,}55$, $P^D = 4/3 = P^L$ da alle Mengen $q_{io} = 100$ (i = 1, 2, 3); $P^C > P^L$ Ausgabenanteil niedrig (1/9) bei Gut 1 (hohe Preismesszahl 2) hoch (2/3) bei Gut 2 (niedrige Preismesszahl 7/6).
c) $0{,}9\overline{3}$ also Zunahme um -6,6% (Abnahme).

10.18 Mengen beliebig. Es gilt bei allen Mengen $P^L = P^P = 1{,}5$ weil beide Preismesszahlen gleich sind (=1,5).

10.19 a) Gewicht: 0,5, Index: 160, b) 1000/7 = 142,86, c) 148.

10.20 a) $P^D = 4/3$, $P^C = 14/9$, $P^L = P^P = 4/3$.
b) weil alle Mengen zur Basis- und zur Berichtszeit gleich (100) sind; $P^C \neq P^L$ weil die Ausgabenanteile zur Basiszeit nicht jeweils 1/3 sondern 1/9, 6/9 und 2/9 sind.
c) offensichtlich ist $Q^P = Q^L = 1$, so dass $W_{0t} = P^L_{0t} = 4/3$.

10.21 Bei Verkettung und Zeitumkehrprobe in die entsprechende Formel einsetzen. Dutots Index erfüllt beide Kriterien, Carlis Index nicht.
Additivität, als Konkretisierung von Axiom P1b (Übers.10.4) bedeutet: ist $P(\mathbf{p}_o,\mathbf{p}_t)$ ein Preisindex mit den Preisvektoren $\mathbf{p}_o$ (Basispreise) und $\mathbf{p}_t$ (Berichtspreise) und ist $\mathbf{p}^*_0 = \mathbf{p}_o + \boldsymbol{\Delta}$ so muss gelten $[P(\mathbf{p}^*_0,\mathbf{p}_t)]^{-1} = [P(\mathbf{p}_o,\mathbf{p}_t)]^{-1} + [P(\boldsymbol{\Delta},\mathbf{p}_t)]^{-1}$ (wird von P^C nicht erfüllt, wohl aber von P^D, P^L und P^P) .

10.22 Gleichheit von Paasche- und Laspeyres-Index weil Preis- und Mengenmesszahlen nicht korreliert sind (Gewichtung der Messzahlen mit Ausgabenanteilen zur Basiszeit A: 0,2, B: 0,3, C: 0,3 und D: 0,2) Indexwerte: 1,5.

10.23 $Q^L_{0t} = 1{,}5$, $W_{0t} = 90/50 = 1{,}8$, $P^P = W_{0t}/Q^L_{0t} = 1{,}2$.

Kapitel 11

11.1 Die graphische Darstellung zeigt, dass z.B. ein parabolischer Trend (mit $r^2 = 0{,}6453$) den Daten besser angepasst ist als ein linearer Trend ($y_t = 523{,}41+2{,}5033t$ mit t = 74,75,... und $r^2 = 0{,}1026$).

11.2 $\tilde{y}$ = gleitender 3-er Durchschnitt, y^P = Prognose mit $\alpha = 0{,}2$

t	1	2	3	4	5	6	7	8	
$\tilde{y}_t$		20	25	28	30	33	36		
y^P_t	15	15	16	17,8	20,24	21,992	23,79	26,835	29,068

(für t=9)

11.3 50, 70,...,290 also $\tilde{K}_t = 30 + 20t$; mit der Meth. der kl. Quadrate erhält man $\hat{K}_t = 32{,}5 + 19{,}643t$.

11.4 Nicht normierte Saisonkoeffizienten: Januar -10,6, Febr. -6,2, März 7,3, April 5,4, Mai -0,5, Juni -1,5, Juli -1,3, Aug. -14,8, Sept. 5,5, Okt. 17,0, Nov. 5,3, Dez. -3,7; Mittelwert 0,15833 .

11.5 Ausführliche Lösung im UTB-Buch (Bsp. 11.4).

11.6 $\tilde{y}$ -Werte folgen der Funktion 72-2t (Apr. 89: t=1), lokales versus globales Trendmodell; Trend: monoton (hier: linear), Saison Zyklus mit Länge 1 Jahr; die Zykluswerte 3 (Aug.), -2(Dez.), -1(April) wiederholen sich. Mindestens 60, höchstens 60,33; länger, Slutzky-Yule-Effekt.

11.7 1800, 1800 (t=3 und t=4) .

11.8 $\tilde{y}_1$ bis $\tilde{y}_5$ jeweils 125; $\hat{y}$ = 124,286-0,1786 t*; 123,145 .

11.9 $\tilde{y}_t$=23+t (p=3); Zyklus: 0, 2, -2; mit t*=-6,-5,...,+5 + 6: $\hat{y}$ =29,846 + 1,022·t* oder 22,69 + 1,022·t.

11.10 a) 200, 250, 280, 300, 330, 360;
b) Trend;
c) trendbereinigte Werte: 0, 0, 20, -10, -20 ,30;
d) K: Bestandsmasse, U: Bewegungsmasse; B: Bewegungsmasse, A: Gliederungszahl, U/K: Beziehungszahl;
e) Abw. v. Trend.

11.11 a) jeweils 80;
b) kein Trend (konstant 80);
c) Verhältnis-, Beziehungszahl;
d) linear, r ≈ +1;
e) n_i jeweils 4, h_i jeweils ½. Nein; verbundene Beobachtungen nötig.

Kapitel 12

12.1 a) F_{om} = 5,25; $\overline{B}$ = 5,25/4 = 1,3125; $\overline{d}$ = 5,25/5 = 1,05, U = 3,8095
c) B_o = 1 (Person D), B_m = 2 (Person C,D), $\overline{d}_o$ = 0,25, $\overline{d}_m$ = 0,875, $\overline{d}_N$ = 3,75/3 = 1,25; Zugänge im Intervall [10,11] : 2, deren durchschn.Verweildauer: 1,125 Std.

12.2 nach Gl.12.12: $\overline{B}$ = 2.217.365,6; Z_{om} = 22.197.597, A_{om} = 21.593.229 also $\overline{d}$ = 0,50635 Jahre und U = m/$\overline{d}$ = 5/0,506 = 9,8745.

12.3

x	l_x	d_x	T_x^*	e_x^*
0	5	1	13	2,6
1	4	1	8	2
2	3	2	4	1,33
3	1	1	1	1

e_x = e_x^*-½; T_2^* = 4 heißt jeweils 1 Jahr für Boris und Clara, 2 für Augustus.

12.4 Fall a)

Fall a)	
d_i	4
n_i	8

Fall b)		
d_i	2	4
n_i	8	4

U = 8/4 = 2
$\overline{d}$ = 2,67 (harmonisches Mittel von 2 und 4) U = 8/2,67 = 3 .

12.5 Ausführliche Lösung im UTB-Buch (Beispiel 12.2).

12.6 A,B,C, $T_{o\ max}$ 250 (e_o:5), $T_{o\ min}$ 50 (e_o:1), q_x:B; T_x:A,D; e_x:A,C .