Berechnung von Doppelintegralen bei zweidimensionalen Verteilungen

Für die Berechnung einer bestimmten Wahrscheinlichkeit bei einer gemeinsamen Dichtefunktion einer zweidimensionalen Verteilung kommen *doppelte Integrale* zur Anwendung. Dabei ist die Vorgehensweise ähnlich wie bei der Berechnung einfacher Integrale. Zu beachten ist allerdings, dass immer von „innen nach außen“ vorgegangen wird. Beispielsweise kann man sich das Integral

$$\int_{y=c}^{y=d}\int_{x=a}^{x=b} x+y\,dxdy \quad \text{gedanklich vorstellen als} \quad \underbrace{\int_{y=c}^{y=d}\left[\underbrace{\int_{x=a}^{x=b} x+y\,dx}_{\text{„innen“}}\right]dy}_{\text{„außen“}}.$$

Bei der Integration geht man ähnlich wie bei der partiellen Differentiation vor. Man integriert zunächst über x und betrachtet dabei y als Konstante ("innen") und in einem zweiten Schritt wird über y integriert und x als Konstante aufgefasst ("außen").

<u>Beispiel:</u>

Dichtefunktion: $f(x,y)=\frac{1}{2}(x+3y)$ für $0 < X < 1;\ 0 < Y < 1$

$$P(0{,}5 < X < 1;\ 0 < Y < 0{,}3) = \int_0^{0,3}\int_{0,5}^{1} f(x,y)\,dxdy = \int_0^{0,3}\int_{0,5}^{1}\frac{1}{2}(x+3y)\,dxdy$$

Mögliche Berechnungsarten:

1)

$$=\frac{1}{2}\int_0^{0,3}\left[\frac{1}{2}x^2+3xy\right]_{0,5}^{1}dy=\frac{1}{2}\int_0^{0,3}\left[\left(\frac{1}{2}+3y\right)-\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{2}y\right)\right]dy=\frac{1}{2}\int_0^{0,3}\left(\frac{3}{8}+\frac{3}{2}y\right)dy$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{3}{8}y+\frac{3}{4}y^2\right]_0^{0,3}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{10}+\frac{3}{4}\cdot\frac{9}{100}\right)=0{,}09$$

2)

$$=\int_0^{0,3}\int_{0,5}^{1}\frac{1}{2}x\,dxdy+\int_0^{0,3}\int_{0,5}^{1}\frac{1}{2}\cdot 3y\,dxdy$$

$$=\int_0^{0,3}\left[\frac{1}{4}x^2\right]_{0,5}^{1}dy+\int_0^{0,3}\left[\frac{3}{2}xy\right]_{0,5}^{1}dy$$

$$=\int_0^{0,3}\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\,dy+\int_0^{0,3}\frac{3}{2}y-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}y\,dy$$

$$=\int_0^{0,3}\frac{3}{16}\,dy+\int_0^{0,3}\frac{3}{4}y\,dy$$

$$=\left[\frac{3}{16}y\right]_0^{0,3}+\left[\frac{3}{8}y^2\right]_0^{0,3}$$

$$=0{,}05625+0{,}03375=0{,}09$$

Nicht mögliche Berechnungsarten (falsches Ergebnis) ! :

3)

$$= \int_{0,5}^{1} \frac{1}{2} x \, dx + \int_{0}^{0,3} \frac{3}{2} y \, dy$$

$$= \left[\frac{1}{4} x^2\right]_{0,5}^{1} + \left[\frac{3}{4} y^2\right]_{0}^{0,3}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot 0,3^2 = \frac{4}{16} - \frac{1}{16} + \frac{12 \cdot 0,3^2}{16}$$

$$= \frac{3 + 12 \cdot 0,3^2}{16} = 0,255 \neq 0,09$$

4)

$$= \int_{0}^{0,3} \int_{0,5}^{1} \frac{1}{2} x + \frac{3}{2} y \, dx \, dy$$

$$= \left[\left[\frac{1}{4} x^2 y + \frac{3}{4} x y^2\right]_{0,5}^{1}\right]_{0}^{0,3}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 1^2 \cdot 0,3 + \frac{3}{4} \cdot 1 \cdot 0,3^2$$

Obergrenzen von x und y eingesetzt

Untergrenzen von x und y eingesetzt

$$- \left[\frac{1}{4} \cdot 0,5^2 \cdot 0 + \frac{3}{4} \cdot 0,5 \cdot 0^2\right]$$

$$= 0,1425 \neq 0,09$$

Hinweis: Sind *beide Integraluntergenzen* gleich 0, dann liefert Methode 4 ein richtiges Ergebnis. Da es sich dabei aber nur um einen Spezialfall handelt, sollte standardmäßig Methode 1 angewendet werden, um mögliche Fehlerquellen zu vermeiden!