Prof. Dr. Peter von der Lippe

Formelsammlung zur Vorlesung "Einführung in die ökonometrische Datenanalyse" Campus Duisburg (Version Jan. 2010)

1. Einfache lineare Regression

1.1. Modell Regressionsgerade

Grundgesamtheit $\tilde{y}_t = \alpha + \beta x_t$, wahre Störgröße $u_t = y_t - \tilde{y}_t$

Stichprobe $\hat{y}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_t$, geschätzte Störgröße $\hat{u}_t = y_t - \hat{y}_t$

1.2. Punktschätzungen: zu schätzende Parameter des Modells α, β, σ^2 mit den Schätzfunktionen $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ und $\hat{\sigma}^2 = \sum \hat{u}_t^2 / (T-2) = S_{\hat{u}\hat{u}} / (T-2)$

$\hat{\beta} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{\sum (x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sum (x-\bar{x})^2} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$	$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x}$	$\hat{\sigma}^2 = \sum \hat{u}_t^2 / (T-2)$, $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{T-2}\sum \hat{u}_t^2}$ *

* diese Größe heißt auch standard error of regression

Sum of squared residuals (SSR) $\sum \hat{u}_t^2 = S_{\hat{u}\hat{u}} = \sum y_t^2 - \hat{\alpha}\sum y_t - \hat{\beta}\sum x_t y_t$

Korrelationskoeffizient (Bravais Pearson) $r = \frac{s_{xy}}{\sqrt{s_x^2 s y_x^2}} = \sqrt{\frac{S_{\hat{y}\hat{y}}}{S_{yy}}} = \sqrt{R^2}$ (Bestimmtheitsmaß R^2 siehe unten) r und $\hat{\beta}$ haben das gleiche Vorzeichen.

1.3. Intervallschätzung: Bestimmung von Konfidenzintervallen (Stichprobenverteilung ist die t_{T-2}- bzw. die χ^2_{T-2} Verteilung mit den Signifikanzschranken $\pm$ t bei der t-Verteilung bzw. G_u, und G_o (untere bzw. obere Signifikanzschranke) bei der χ^2 Verteilung mit T-2 Freiheitsgraden)

$\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}} = \frac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}$	$\hat{\sigma}^2_{\hat{\alpha}} = \hat{\sigma}^2 \left(\frac{1}{T} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right) = \left(\frac{1}{T}\sum x_t^2\right)\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}}$	Intervallgrenzen $S_{\hat{u}\hat{u}}/G_o$ (unten) und $S_{\hat{u}\hat{u}}/G_u$ (oben)
Intervallgrenzen $\hat{\alpha} - t \cdot \hat{\sigma}_{\hat{\alpha}}$ und $\hat{\alpha} + t \cdot \hat{\sigma}_{\hat{\alpha}}$ entsprechend $\hat{\beta} - t \cdot \hat{\sigma}_{\hat{\beta}}$ und $\hat{\beta} + t \cdot \hat{\sigma}_{\hat{\beta}}$		

1.4. Parameter-Tests

Hypothesen über β (bei α analog)

Hypothese	Prüfgröße
allgemein: **H_0: $\beta = \beta_0$**	$t_{\hat{\beta}} = \frac{\hat{\beta} - \beta_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}}$
speziell: **H_0: $\beta = 0$** (Einflussgröße x ist irrelevant)	$t_{\hat{\beta}} = \frac{\hat{\beta}}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}}$

1.5. Güte der Anpassung, r^2 (einfache Regression) **bzw. R^2** (multiple Regression)

$$R^2 = r^2 = \frac{S_{\hat{y}\hat{y}}}{S_{yy}} = 1 - \frac{S_{\hat{u}\hat{u}}}{S_{yy}}$$

diese Formel gilt auch für die multiple Regression, nicht aber $r^2 = s_{xy}^2 / s_x^2 sy_x^2$

1.6. **Varianzzerlegung** und F-Statistik (einfache Regression ist der Fall K = 1)

Variation (sum of squares)	d.f. = Freiheitsgrade (degrees of freedom)	Varianz (mean squares)
explained $S_{\hat{y}\hat{y}} = \hat{\beta}^2 S_{xx}$	K	$V_2 = S_{\hat{y}\hat{y}} / K$
residual $S_{\hat{u}\hat{u}}$	T - K - 1	$V_1 = S_{\hat{u}\hat{u}} / (T-K-1)$
total $S_{yy} = S_{\hat{y}\hat{y}} + S_{\hat{u}\hat{u}}$	T – 1	Summe nicht sinnvoll

$$F = \frac{S_{\hat{y}\hat{y}} / K}{S_{\hat{u}\hat{u}} / (T-K-1)}$$

Andere Formeln für die F-Statistik $F = \frac{V_2}{V_1} = \frac{R^2/K}{(1-R^2)/(T-K-1)} = \frac{R^2(T-K-1)}{(1-R^2)K}$

Die F-Statistik ist $F_{K,T-K-1}$ verteilt und dient der Prüfung der Hypothese H_0: $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_K = 0$

Zusammenhang zwischen t und F Test bei K = 1 Regressor (einfache Regression):

$$t^2 = \frac{\hat{\beta}^2 S_{xx}}{S_{\hat{u}\hat{u}} / (T-2)} = \frac{S_{\hat{y}\hat{y}}}{\hat{\sigma}^2} = F \sim F_{1,T-2}.$$

1.7. Prognoseintervall

a) Schätzung des *Regresswerts* $\hat{y}_o = E(Y|x_o)$: geschätzte Varianz $\hat{\sigma}^2 \left[\frac{1}{T} + \frac{(x_o - \bar{x})}{S_{xx}} \right] = \hat{\sigma}^2_{\hat{y}_0}$

b) Schätzung *eines individuellen Werts* $y_o = \hat{y}_o + u_o$

geschätzte Varianz jetzt wegen der Varianz von u_0 um $\hat{\sigma}^2$ größer $\hat{\sigma}^2 \left[1 + \frac{1}{T} + \frac{(x_o - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right]$

1.8. **Konfidenzellipse** (vgl. Übungsblatt F)

Simultanere Konfidenzbereich für α und β: Die Größe $\frac{S}{2\hat{\sigma}^2}$ ist $F_{2,T-2}$ verteilt, wobei S definiert ist als $S = T(\hat{\alpha} - \alpha)^2 + 2(\hat{\alpha} - \alpha)(\hat{\beta} - \beta) \sum x_t + (\hat{\beta} - \beta)^2 \sum x_t^2$.

2. Multiple Regression

2.1. Modell

$$y = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 x_1 + \ldots + \hat{\beta}_K x_K + \hat{u}$$

andere Symbolik (z.B. bei K=3) $y = \hat{\alpha}_{y.123} + \hat{\beta}_{y1.23} x_1 + \hat{\beta}_{y2.13} x_2 + \hat{\beta}_{y3,12} x_3 + \hat{u}$ statt $\hat{u}$ auch $\hat{u}_{y.123}$

um dies zu unterscheiden von $\hat{y} = \hat{\alpha}_{y.12} + \hat{\beta}_{y1.2} x_1 + \hat{\beta}_{y2..1} x_2 + \hat{u}_{y.12}$ bei K = 2 Regressoren.[1]

Zum Vergleich; einfache Regression $\hat{y} = \hat{\alpha}_{y.1} + \hat{\beta}_{y1} x_1 + \hat{u}_{y.1}$

[1] hier treten jetzt partielle Regressionskoeffizienten *erster* Ordnung auf (oben *zweiter* Ordnung {zwei Variablen nach dem Punkt}),

standardisierte Regressionskoeffizienten $\hat{\beta}^*_{yi.jk...} = \hat{\beta}_{yi.jk...}\frac{s_i}{s_y}$

2.2. Punktschätzung

Varianz der Störgröße σ^2 (allgemein, bei K Regressoren)

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum \hat{u}_t^2}{T-K-1} = \frac{S_{\hat{u}\hat{u}}}{T-(K+1)}$$

Regressionskoeffizienten bei K = 2 (Rekursionsformel)

$\hat{\beta}_{y.12} = \frac{\hat{\beta}_{y1} - \hat{\beta}_{y2}\hat{\beta}_{21}}{1-\hat{\beta}_{12}\hat{\beta}_{21}}$ und $\hat{\beta}_{y2.1} = \frac{\hat{\beta}_{y2} - \hat{\beta}_{y1}\hat{\beta}_{12}}{1-\hat{\beta}_{12}\hat{\beta}_{21}}$ (dabei ist $\hat{\beta}_{12}\hat{\beta}_{21} = r_{12}^2$ das Bestimmtheitsmaß)

Für $\hat{\alpha}$ gilt wieder die Schwerpunktbeziehung $\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}_{yi.2}\bar{x}_1 - \hat{\beta}_{y2.1}\bar{x}_2$.

2.3. Intervallschätzungen und t-Test[2] mit $t_{T\text{-}K\text{-}1}$ Verteilung

Konfidenzintervall für σ^2 mit χ^2 Verteilung bei T-K-1 Freiheitsgraden (K jetzt >1), analog zu Abschnitt 1.3.

Konfidenzintervall und t-Test für *einen* Regressionskoeffizienten (Beispiel K = 2)

geschätzte Varianzen der Regressionskoeffizienten: $\sigma^2_{\hat{\beta}_1} = \frac{\hat{\sigma}^2}{S_{11}(1-R^2_{1.2})}$ bei $\hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_{y1.2}$ und

$\sigma^2_{\hat{\beta}_2} = \frac{\hat{\sigma}^2}{S_{22}(1-R^2_{1.2})}$ bei $\hat{\beta}_2 = \hat{\beta}_{y2.1}$ und für $\hat{\alpha}$ gilt $\hat{\sigma}^2_{\hat{\alpha}} = \frac{\hat{\sigma}^2}{T} + (\bar{x}_1)^2\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_1} + (\bar{x}_2)^2\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_2} + 2\bar{x}_1\bar{x}_2\hat{\sigma}_{\hat{\beta}1\hat{\beta}2}$

t Verteilung mit T-K-1 = T – 3 Freiheitsgraden (bei zwei Regressoren, also K = 2):

Hypothese	Prüfgröße
allgemein: H_0: $\beta_i = \beta_i^*$ (i = 1, …, K)	$t_{\hat{\beta}_i} = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i^*}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}}$
speziell H_0: $\beta_i = 0$ (Irrelevanz des Regressors X_i)	$t_{\hat{\beta}_i} = \hat{\beta}_i / \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}$

Entsprechend bei Hypothesen über α.

Konfidenzintervall und t-Test für *eine* (L = 1) Linearkombination (lk) **von Regressionskoeffizienten** (Beispiel $r_1\hat{\beta}_1 + r_2\hat{\beta}_2 = q$ oder $\begin{bmatrix} r_1 & r_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2\end{bmatrix} = r'\hat{\beta} = q$): die geschätzte Varianz dieser lk ist $\hat{\sigma}^2_{lk} = r_1^2\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{11}(1-R^2_{1.2})} + r_2^2\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{22}(1-R^2_{1.2})} + 2r_1r_2\frac{-\hat{\sigma}^2 R^2_{1\cdot 2}}{S_{12}(1-R^2_{1.2})}$.

[2] mehr dazu ***Download 2*** (dort Abschnitt D) und ***Download 7*** sowie in den Übungsbeispielen D, E und F.

2.4 Parametertests (F-Tests)

a) ***alle*** **Regressoren irrelevant** (z.B. bei K = 4: H_0: $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$)

$$F = \frac{S_{\hat{y}\hat{y}}/K}{S_{\hat{u}\hat{u}}/(T-K-1)} = F = \frac{S_{\hat{y}\hat{y}}/4}{S_{\hat{u}\hat{u}}/(T-5)} \sim F_{4,T-5}$$

b) ***einige*** **Regressoren irrelevant** (z.B. bei K = 4 Regressoren und L = 2 Restriktionen H_0: $\beta_1 \neq 0$, $\beta_2 \neq 0$ und $\beta_3 = \beta_4 = 0$) (Anwendungsbeispiele im Übungsblatt F und H)

$$F = \frac{(S^0_{\hat{u}\hat{u}} - S_{\hat{u}\hat{u}})/L}{S_{\hat{u}\hat{u}}/(T-K-1)} \sim F_{L,T-K-1} \text{ im Beispiel } F = \frac{(S^0_{\hat{u}\hat{u}} - S_{\hat{u}\hat{u}})/2}{S_{\hat{u}\hat{u}}/(T-5)} \sim F_{2,T-5}$$

Äquivalent wäre auch $F = \dfrac{(S_{\hat{y}\hat{y}} - S^0_{\hat{y}\hat{y}})/L}{S_{\hat{u}\hat{u}}/(T-K-1)} = \dfrac{(R^2 - (R^2)^0)/L}{S_{\hat{u}\hat{u}}/(T-K-1)}$; das Superskript (= die hochgestellte) 0 bei $S^0_{\hat{u}\hat{u}}$, $S^0_{\hat{y}\hat{y}}$ oder $(R^2)^0$ heißt immer: bei Geltung von H_0 also im restringierten Modell.

2.5. Güte der Anpassung R^2 (multiples Bestimmtheitsmaß) und $\bar{R}^2 = R^2_{adj}$ (korrigiertes [adjusted] multiples Bestimmtheitsmaß)

unkorrigiert $R^2 = \dfrac{S_{\hat{y}\hat{y}}}{S_{yy}} = 1 - \dfrac{S_{\hat{u}\hat{u}}}{S_{yy}}$

Korrigiertes R^2: $\bar{R}^2 = 1 - \dfrac{S_{\hat{u}\hat{u}}/(T-K-1)}{S_{yy}/(T-1)}$ statt $R^2 = 1 - S_{\hat{u}\hat{u}}/S_{yy}$; andere äquivalente Formeln:

$\bar{R}^2 = 1 - (1-R^2)\dfrac{T-1}{T-K-1}$ oder[3] $\bar{R}^2 = R^2 - (1-R^2)\dfrac{K}{T-K-1}$

2.6. Prognoseintervall

Statt $\hat{\sigma}^2\left[1 + \dfrac{1}{T} + \dfrac{(x_o - \bar{x})^2}{S_{xx}}\right] = \hat{\text{var}}(y_o)$ bei einfacher Regression (siehe Punkt 1.7) gilt jetzt (verallgemeinert) $\hat{\sigma}^2\left[1 + \mathbf{x}_o'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}_o\right]$ mit $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ x_0 \end{bmatrix}$

2.7. J-Test (non-nested) zwei konkurrierende Modelle (⇒ download H)

Modell 1: $y = f_1(x_1,x_2,x_3)$, Modell 2: $y = f_2(x_2,x_3,x_4)$, (nicht "nested" in Modell 1) Der im Modell 1 bzw. 2 geschätzte Regresswert $\hat{y}$ sei $\hat{y}$ bzw. $\hat{y}$ genannt, dann kann man jetzt mit diesen Größen zwei Regressionsfunktionen schätzen mit 3 + 1 = 4 Regressoren

(1) $\hat{y} = \hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_{11}x_1 + \hat{\beta}_{12}x_2 + \hat{\beta}_{13}x_3 + \hat{\gamma}_{12}\hat{y}_2$ (H_{01}: $\gamma_{12} = 0$)

(2) $\hat{y} = \hat{\alpha}_2 + \hat{\beta}_{22}x_2 + \hat{\beta}_{23}x_3 + \hat{\beta}_{24}x_4 + \hat{\gamma}_{21}\hat{y}_1$ (H_{02}: $\gamma_{21} = 0$)

	H_{02} angenommen	H_{02} verworfen
H_{01} angenommen	kein Modell gilt	x_4 relevant, Modell 2 gilt
H_{01} verworfen	x1 relevant, deshalb Modell 2 verworfen, Modell 1 gilt	beide Modelle gültig (am besten alle vier Regressoren nehmen)

[3] diese Formel macht deutlich, dass das korrigierte R^2 kleiner ist als R^2.

3. Annahmeverletzungen (Einige Tests)

3.1. RESET-Test[4]

Anwendung bei Verletzung von A2 (Nichtlinearität), omitted variables (also einer ***Fehlspezifikation***, [underfitted model] mit der Konsequenz, dass auch B1 verletzt ist) oder bei Korreliertheit zwischen x_t und u_t (Verletzung von C1). Zwei Schritte

1. Schätzung von $\hat{y}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_t$ (oder allgemeiner $\hat{y}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 x_{1t} + \hat{\beta}_2 x_{2t} + ... + u_t^0$)
2. $y_t = \alpha + \beta x_t + \gamma_1 \hat{y}_t^2 + \gamma_2 \hat{y}_t^3 + ... + \gamma_L \hat{y}_t^{L+1} + u_t$

EViews fragt nach der Anzahl L der fitted terms = powers of $\hat{y}_t$ (gibt man 1 an so rechnet es nur mit $\hat{y}_t^2$ als Regressor). Die Gleichung unter 1 ist restricted im Vergleich zur Gl. unter 2 (daher Störgröße u_t^0 bzw. u_t), d.h. bei Geltung von H_0: $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_L = 0$ (es gibt jetzt L Restriktionen) und $K^* = K + L$ Regressoren (in obiger Gl. bei Schritt 2 ist K=1 weil es nur den Regressor x_t gibt). Prüfgröße (F verteilt) $F = \frac{\left(S_{\hat{u}\hat{u}}^0 - S_{\hat{u}\hat{u}}\right)/L}{S_{\hat{u}\hat{u}}/(T - K^* - 1)}$

3.2. Chow's Breakpoint Test[5]

Nimmt man die Gesamtstichprobe ohne Unterteilung in Teilintervalle erhält man die restricted sum of squared residuals $S_{\hat{u}\hat{u}}^0$ (unter der Annahme H_0, dass kein ***Strukturbruch*** vorliegt, also für beide Teilzeiträume I und II (vom Umfang T_I bzw. T_{II}) die gleichen Parameter α und, β (bzw. α, β_1, … ,) gelten. Entsprechend erhält man bei der getrennten Schätzung für die beiden Teilzeiträume $S_{\hat{u}\hat{u}}^{I}$ und $S_{\hat{u}\hat{u}}^{II}$. Prüfgröße $F = \frac{\left(S_{\hat{u}\hat{u}}^0 - \left(S_{\hat{u}\hat{u}}^I + S_{\hat{u}\hat{u}}^{II}\right)\right)/(K+1)}{\left(S_{\hat{u}\hat{u}}^I + S_{\hat{u}\hat{u}}^{II}\right)/(T - K - 1)}$

3.3. Goldfeld Quandt Test

Prüft ob ***Heteroskedastizität*** vorliegt in dem Sinn, dass für zwei Teilstichproben (etwa danach gebildet ob $x_t < c$ oder $x_t \geq c$) mit den Umfängen T_I und T_{II} eine unterschiedliche Streuung der Störgröße in der Grundgesamtheit vorliegt $\sigma_I^2 \neq \sigma_{II}^2$. Die Nullhypothese lautet $H_0: \sigma_I^2 = \sigma_{II}^2$ (also Streuungsgleichheit = Homoskedastizität). Prüfgröße $F = \frac{S_{\hat{u}\hat{u}}^{II}/\left(T_{II} - K - 1\right)}{S_{\hat{u}\hat{u}}^{I}/(T_I - K - 1)}$-

3.4. Breusch Pagan Test (BP-Test)

Wie White (→ **3.5**) und Breusch Godfrey Test (→ **3.7**) ein Residual Test, der Residuen $\hat{u}_t$ aus einer ersten Regression (Schritt 1 wie beim RESET-Test) benötigt. Dient der Prüfung auf Verletzung von Annahme B2 (H_0: Homoskedastizität $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = ... = \sigma_T^2 = \sigma^2$). Im zweiten Schritt wird geschätzt mit den quadrierten Residuen des ersten Schritts als abhängige Variable (y-Variable), auch der Kürze halber genannt, und der Störgröße ε_t: Geschätzt wird (bei einfacher Regression)

$$\hat{u}_t^2 = e_t^2 = \gamma_0 + \gamma_1 x_t + \gamma_2 x_t^2 + \gamma_3 x_{t-1} + \gamma_4 x_{t-1}^2 + \varepsilon_t$$

Über H_0: $\gamma_1 = \ldots = \gamma_p = 0$ wird entschieden mit der Prüfgröße TR^2 (T mal Bestimmtheitsmaß) die χ^2 verteilt ist mit p Freiheitsgraden (oder asymptotisch mit F-Test).

---

4 Regression Specification Error Test

5 Zeitpunktpunkt(e) des Strukturbruchs (der Strukturbrüche) werden angegeben, nicht gesucht wie beim "prognostischen Chow Test (= Chow's Forecast Test)

3.5. White Test

Dies ist auch ein Test auf Verletzung von B2 (Homoskedastizität), er gilt aber als allgemeiner (auch Verletzung von B3). Die Schätzgleichung im Schritt 2 ist ähnlich wie bei BP und kann bei zwei Regressoren x_1 und x_2 sein:

$$\hat{u}_t^2 = \gamma_0 + \gamma_1 x_{1t} + \gamma_2 x_{2t} + \gamma_3 x_{1t}^2 + \gamma_4 x_{2t}^2 + \gamma_5 x_{1,t-1} + \gamma_6 x_{1,t-1}^2 + \gamma_7 x_{2,t-1} + \gamma_8 x_{2,t-1}^2 + \varepsilon_t \,.$$

Die Prüfgröße ist wieder TR^2 und χ^2 verteilt mit 8 (bei der Beispiel-Gleichung) Freiheitsgraden. Man kann auch interaction terms (oder "cross terms") in die Gleichung einbauen, etwa

$$\hat{u}_t^2 = \gamma_0 + \gamma_1 x_{1t} + \ldots + \gamma_8 x_{2,t-1}^2 + \lambda_1 (x_{1t} x_{2t}) + \ldots + \varepsilon_t \,.$$

3.6. Durbin Watson Test (Autokorrelation = serial correlation)

Die Prüfgröße $d = \frac{\sum_{t=2} (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1} \hat{u}_t^2}$ hängt zusammen mit $\rho = \frac{\sum_{t=2} \hat{u}_{t-1}\hat{u}_t}{\sum_{t=2} \hat{u}_t^2}$, dem Autokorrelationskoeffizienten erster Ordnung $d \approx 2(1-\rho)$ und ist mit den Tabellenwerten d_L (low) und d_H (high) zu vergleichen wobei gilt

H_0: $\rho = 0$ H_1: $\rho > 0$			**H_0: $\rho = 0$ H_1: $\rho < 0$**		
$d < d_L$	$d_L \le d \le d_H$	$d > d_H$	$d < 4 - d_H$	$4-d_H \le d \le 4-d_L$	$d > 4-d_L$
H_0 verwerfen H_1 annehmen	Unbestimmtheit	H_0 annehmen		Unbestimmtheit	H_0 verwerfen H_1 annehmen

Prüfgröße beim h Test (einfache Regression)

3.7. Breusch Godfrey Test

Der BG-Test prüft auf Autokorrelation (umfassender als der Durbin Watson Test)

$$\hat{u}_t = \gamma_0 + \gamma_1 x_{1t} + \gamma_2 x_{1,t-1} + \gamma_3 x_{2,t-1} + \gamma_4 x_{2,t-2} + \gamma_5 x_{2,t-3} + \lambda_1 \hat{u}_{t-1} + \lambda_2 \hat{u}_{t-2} + \lambda_3 \hat{u}_{t-3} + \varepsilon_t$$

In dieser Form spricht man auch vom BG(3) Test (weil bis $\hat{u}_{t-3}$ und damit λ_3 gerechnet wird). Die Prüfgröße ist wieder TR^2 und χ^2 verteilt mit (hier im Beispiel) 3 Freiheitsgraden. Annahme von H_0 (TR^2 kleiner als im kritischen Bereich) heißt wieder keine Annahmeverletzung (also keine Autokorrelation.

3.8. Box-Pierce (Q*) und Ljung Box (Q) Test

Auch hier geht es um Autokorrelation. $\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \ldots$ ist die Folge der Autokorrelationskoeffizienten erster, zweiter,… Ordnung. Dann ist $Q = T(T+2)\sum_{i=1}^{p} \frac{\hat{\rho}_i^2}{T-i}$ bzw. $Q^* = T\sum_{i=1}^{p} \hat{\rho}_i^2$ jeweils χ^2 verteilt mit p Freiheitsgraden

3.9. Jarque Bera Test (Normalitätstest)

Mit $S = \frac{1}{T}\sum \hat{u}_t^3 \big/ \left(\frac{1}{T}\sum \hat{u}_t^2\right)^{3/2} = z_3/\sigma^3$ als Schiefemaß[6] und $K = \frac{1}{T}\sum \hat{u}_t^4 \big/ \left(\frac{1}{T}\sum \hat{u}_t^2\right)^{4/2} = z_4/\sigma^4$ als Maß der Kurtosis (Wölbung) – z_i ist das i-te zentrale Moment – ist die Prüfgröße[7]

$$JB = T\left[\frac{S^2}{6} + \frac{(K-3)^2}{24}\right] \sim \chi^2_{(2)} \qquad (\chi^2 \text{ verteilt mit 2 Freiheitsgraden})$$

---

[6] oder Asymmetriemaß

[7] Bei Vogelvang ist der Faktor nicht T, sondern T-K

3.10. Hausman-Spezifikationstest

Schätzer der Instrumentvariablen Methode (IV Methode) $\hat{\beta}^{IV}$ sind konsistent, aber nicht effizient (d.h. die geschätzte Varianz $\hat{V}(\ )$ ist größer als bei Methode der kleinsten Quadrate (LS)) und nicht notwendig erwartungstreu. Mit m wird geprüft ob IV-Schätzung signifikant abweicht von LS-Schätzung, die Störgröße mithin auch kontemporär mit einem Regressor korreliert ist oder nicht (das ist H_0) $m = \frac{\left(\hat{\beta}^{IV} - \hat{\beta}^{LS}\right)^2}{\hat{V}\left(\hat{\beta}^{IV}\right) - \hat{V}\left(\hat{\beta}^{LS}\right)} \sim \chi^2_{(1)}$.

4. Mehrgleichungsmodelle (nur Grundlagen)

4.1. Interdependente Modelle

(1) exakt identifiziert	(2) unteridentifiziert	(3) überidentifiziert
strukturelle Form $y_1 = \alpha_1 + \beta_{12}y_2 + \gamma_1 x_1 + u$ $y_2 = \alpha_2 + \beta_{21}y_1 + \gamma_2 x_2 + v$	strukturelle Form $y_1 = \alpha_1 + \beta_{12}y_2 + u$ $y_2 = \alpha_2 + \beta_{21}y_1 + \gamma_2 x_2 + v$	strukturelle Form $y_1 = \alpha_1 + \beta_{12}y_2 + \gamma_1 x_1 + u$ $y_2 = \alpha_2 + \beta_{21}y_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 + v$
reduzierte Form mit $\Delta = 1 - \beta_{12}\beta_{21}$ = Determinante von **B** $y_1 = \pi_1 + \pi_2 x_1 + \pi_3 x_2 + u^*$ $y_2 = \pi_4 + \pi_5 x_1 + \pi_6 x_2 + v^*$ $\Delta\pi_1 = \alpha_1 + \beta_{12}\alpha_2$ $\Delta\pi_2 = \gamma_1$, $\Delta\pi_3 = \beta_{12}\gamma_2$ $\Delta\pi_4 = \alpha_2 + \beta_{21}\alpha_1$ $\Delta\pi_5 = \beta_{21}\gamma_1$, $\Delta\pi_6 = \gamma_2$ $\Delta u^* = u + \beta_{12}v$, $\Delta v^* = v + \beta_{21}u$	reduzierte Form $y_1 = \pi_1 + \pi_3 x_2 + u^*$ $y_2 = \pi_4 + \pi_6 x_2 + v^*$ $\Delta\pi_1 = \alpha_1 + \beta_{12}\alpha_2$ $\Delta\pi_3 = \beta_{12}\gamma_2$ $\Delta\pi_4 = \alpha_2 + \beta_{21}\alpha_1$ $\Delta\pi_6 = \gamma_2$ (u^*, v^* wie bei (1)) zu schätzen $\alpha_1, \alpha_2, \beta_{12}, \beta_{21}, \gamma_2$ verfügbare zur Schätzung nur $\pi_1, \pi_3, \pi_4, \pi_6$	reduzierte Form $y_1 = \pi_1 + \pi_2 x_1 + \pi_3 x_2 + \lambda_1 x_3 + u^*$ $y_2 = \pi_4 + \pi_5 x_1 + \pi_6 x_2 + \lambda_2 x_2 + v^*$ Sie liefert Schätzwerte für 8 Koeffizienten der reduzierten Form um mit ihnen 7 Koeffizienten der Strukturform zu schätzen: das Modell (genauer Gleichung 1 für y_1) ist überidentifiziert

In Matrixschreibweise für Modell (1) $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_{12} \\ -\beta_{21} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & \gamma_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{B}y + \Gamma x$

4.2. Abzählkriterium

K° = Anzahl der (system)exogenen Variablen im *gesamten* Modell
K* = Anzahl der (system)exogenen Variablen *in der betreffenden Gleichung* des Modells
(jeweils einschließlich der für α verantwortlichen dummy Variable $x_0 = 1$)
M = Anzahl der endogenen Variablen (im Modell) (oben M = 2)

exakt identifiziert	unteridentifiziert	überidentifiziert
K° - K* = M - 1	K° - K* < M – 1	K° - K* > M – 1

im obigen Beispiel gilt (M-1= 2-1 = 1)

Modell	Gl.	K°(vorhanden)	K* (enthalten)	K° - K*	Diagnose
(1)	$y_1 =$	3	2 (x_0, x_1)	1 = M-1	exakt identifiziert
	$y_2 =$	(x_0, x_1, x_2)	2 (x_0, x_2)	1 = M-1	exakt identifiziert
(2)	$y_1 =$	2	1 (x_0)	1 = M-1	exakt identifiziert
	$y_2 =$	(x_0, x_2)	2 (x_0, x_2)	0 < M-1	unteridentifiziert
(3)	$y_1 =$	4	2 (x_0, x_1)	2 > M-1	überidentifiziert
	$y_2 =$	(x_0, x_1, x_2, x_3)	3 (x_0, x_2, x_3)	1 = M-1	exakt identifiziert