

**Peter von der Lippe**

# **Teil II Übungsaufgaben zur Induktiven Statistik**

**Lösungen ab S. 77**

## **Gliederung von Teil II**

- Kap.1: Einführung, Stichprobenraum
- Kap.2: Kombinatorik
- Kap.3: Ereignisalgebra, Wahrscheinlichkeit
  - 3.1. Mengenoperationen mit Ereignissen
  - 3.2. Wahrscheinlichkeitsbegriff
  - 3.3. Additionssätze
  - 3.4. Multiplikationssätze, bedingte Wahrscheinlichkeiten, Unabhängigkeit
  - 3.5. Totale Wahrscheinlichkeit, Theorem von Bayes
- Kap.4: Zufallsvariablen, Wahrscheinlichkeitsverteilung
  - 4.1. Eindimensionale Zufallsvariable
  - 4.2. Zweidimensionale Zufallsvariable
  - 4.3. Linearkombination und -transformation
  - 4.4. Erzeugende Funktionen
- Kap.5: Spezielle diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen
  - 5.1. Zweipunktverteilung
  - 5.2. Geometrische Verteilung, Binomialverteilung
  - 5.3. Hypergeometrische Verteilung
  - 5.4. Poissonverteilung
- Kap.6: Spezielle stetige Verteilungen
  - 6.1. lineare Verteilungen, Gleichverteilung (stetig)
  - 6.2. Normalverteilung
- Kap.7: Grenzwertsätze, Stichprobenverteilung
  - 7.1. Tschebyscheffsche Ungleichung, Grenzwertsätze, stochastische Konvergenz
  - 7.2. Stichprobenverteilungen
- Kap.8: Schätztheorie
  - 8.1. Maximum-Likelihood-Methode
  - 8.2. Punktschätzung
  - 8.3. Intervallschätzung (Mittel- und Anteilswert)
  - 8.4. Konfidenzintervallschätzung für die Differenz von zwei Mittel- bzw. Anteilswerten
- Kap.9: Testtheorie
  - 9.1. Test für Mittel- und Anteilswerte (Ein-Stichproben-Fall)
  - 9.2. Signifikanztests für Mittel- und Anteilswertdifferenzen (zwei unabhängige Stichproben)
- Kap.10: Stichprobentheorie
  - 10.1. Notwendiger Stichprobenumfang
  - 10.2. Hochrechnung
  - 10.3. Geschichtete Stichproben

## Aufgaben zu Kapitel 1 und 2

### Aufgabe 1.1

Drei Personen spielen zwei Runden eines Glücksspiels. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person A zweimal gewinnt?

### Aufgabe 1.2

In der Mensa X kann man aus drei Beilagen (A,B,C) zwei auswählen (auch dieselbe Beilage zweimal). Wie wahrscheinlich wählt man die Kombination AA (wenn alle Beilagen als gleich gut oder gleich schlecht empfunden werden)?



### Aufgabe 2.1

Vier Freunde schreiben sich gegenseitig Weihnachtsgrüße ( Postkarten). Wieviele Postkarten muß die Post befördern?

### Aufgabe 2.2

In wievielen verschiedenen Reihenfolgen kann man 4 Flaschen Pils, 3 Flaschen Alt, 2 Wodka und 1 Doppelkorn trinken?



### Aufgabe 2.3

- Wieviele Möglichkeiten gibt es beim Zahlenlotto 6 aus 49?
- Wieviele dieser Möglichkeiten enthalten die Zahl 17?

### Aufgabe 2.4

Im Morsealphabet sind Buchstaben Kombinationen von Punkt und Strich. Wievieltellig müssen die Kombinationen sein, damit hierdurch 26 Buchstaben gebildet werden können?

**Aufgabe 2.5**

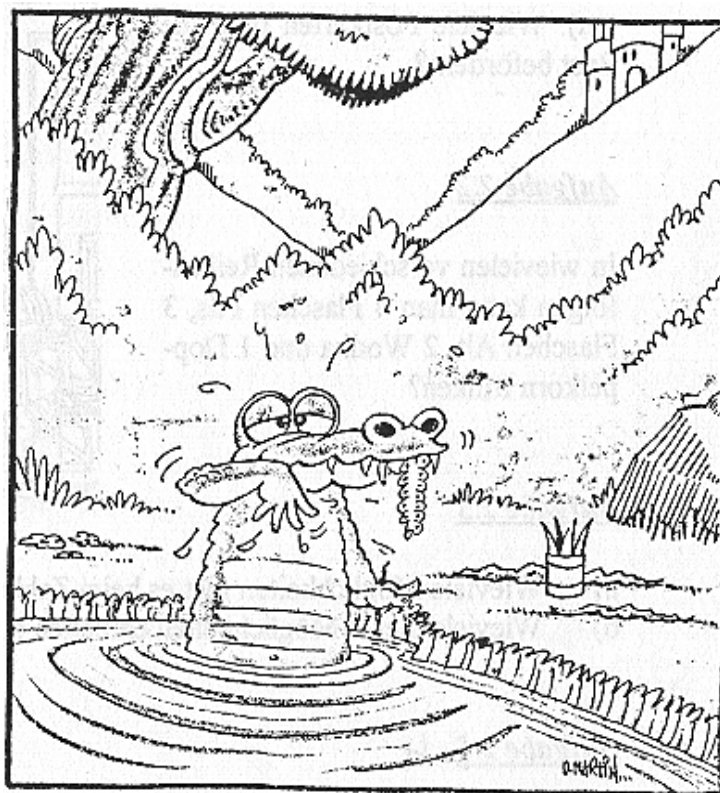
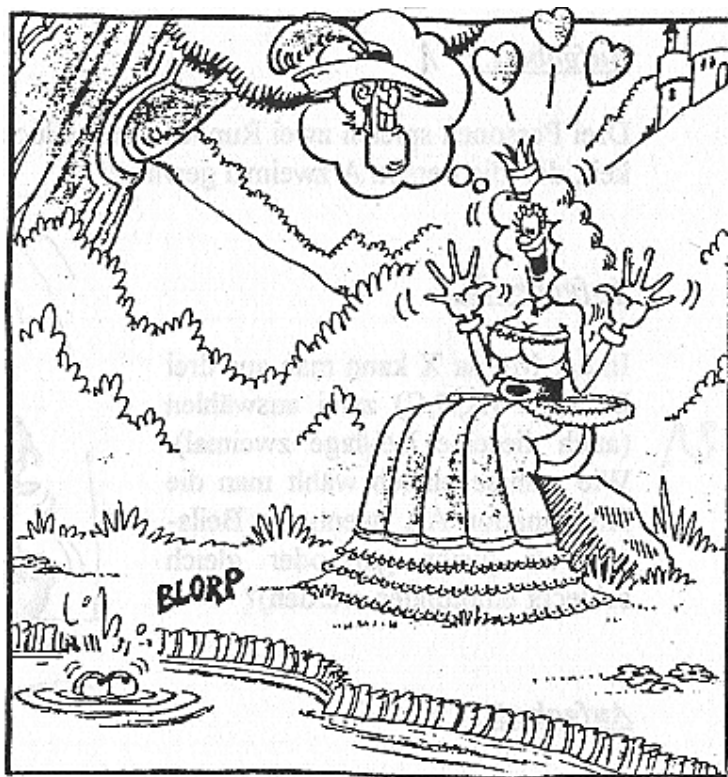
Die Condesa (Gräfin) Alma de Rano aus Amphibien glaubte fest an das Märchen vom Froschkönig aus dem fernen Deutschland. In den 20 Teichen, 8 Seen und 2 Flüssen von Amphibien lebten ... Frösche (F), ... Spitzkrokodile (K) und ... Fische (piscis P). Es war das Lebenswerk des schrulligen Statistikers Pedro de las Tablas, diese Zahlen festzustellen.

- a) Eines Tages beschließt die Gräfin, sich einer Stichprobe von 5 Teichen, 3 Seen und einem Fluß küssend zu nähern, um dort eben den Frosch zu finden, der sich beim Kuß in einen Prinzen verwandelt.

Wieviele Stichproben aus den entsprechenden Gewässern Amphibiens sind dabei möglich?

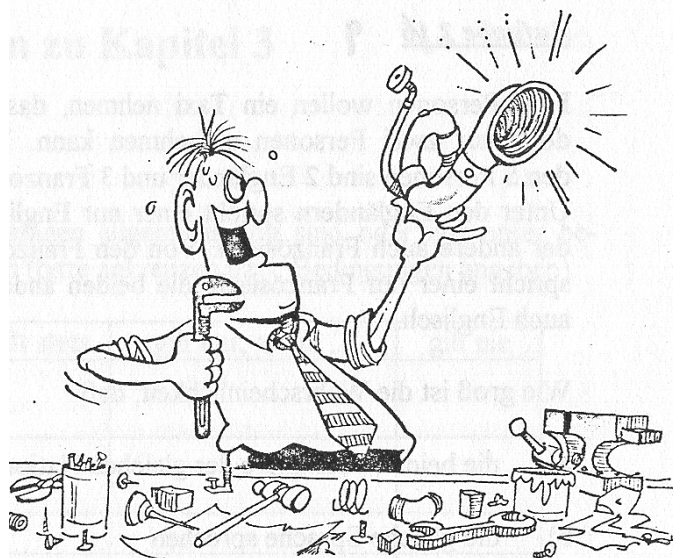
- b) Ein Untertan belehrte die Gräfin, dass es weniger wahrscheinlich sei, den besagten Frosch in einem Fluß zu finden als in einem Teich oder See. Am ehesten sei der "Froschkönig" in den Teichen  $T_1, T_2$  oder  $T_3$  zu erwarten, vielleicht auch in den Seen  $S_1$  oder  $S_2$ .

Alma entschließt sich, wieder 3 Seen und 5 Teiche aufzusuchen, wobei jedoch  $T_1, T_2, T_3, S_1$  und  $S_2$  in jedem Fall in die Stichprobe fallen sollen. Wieviel Möglichkeiten gibt es jetzt?



**Aufgabe 2.6**

Diplom-Kaufmann K aus E schickte vor der Wende sieben mit viel Liebe selbstgebastelte Geschenke an fünf Verwandte in der DDR, um ihnen drüben zu Weihnachten eine Freude zu machen. In dem beigefügten Brief war genau beschrieben, wie die 7 Geschenke auf die 5 Verwandten aufgeteilt werden sollten. Leider ging jedoch der Brief verloren, nachdem er von den Geheimdiensten hüben und drüben gelesen worden war.



- Angenommen, die 7 Geschenke seien durchaus sehr unterschiedlich, gleichwohl ist aber aus der Art des Geschenks noch nicht erkennbar, wem (z.B. Onkel, Tante, Vetter etc.) es gewidmet sein könnte. Wenn die Verwandten in der DDR alle Möglichkeiten, die Geschenke aufzuteilen, ausprobieren wollten, hätten sie viel zu tun! Wieviele Möglichkeiten gibt es?
- Diplom-Kaufmann K aus E ist aus ökonomischen Gründen bei seiner Bastelarbeit zur preisgünstigeren Serienproduktion übergegangen und hatte sieben gleiche Geschenke gebastelt. Wieviele Möglichkeiten gibt es jetzt die Geschenke für die 5 Verwandten zu verteilen? Auch hier ist wieder der Fall zu berücksichtigen, dass sich auf eine Person mehrere Geschenke, bis zu 7, kumulieren können.

**Aufgabe 2.7**

Auf einem Parkplatz stehen  $n$  Fahrzeuge in einer Reihe nebeneinander. Auf Platz  $i$  (mit  $i \neq 1, n$ ) steht die Luxuskarosse von Direktor D. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach einigen Stunden bei völlig zufälligem Kommen und Gehen die Plätze unmittelbar neben D beide leer sind, wenn am Schluß noch  $r$  Fahrzeuge ( $r < n$ ) auf dem Parkplatz verbleiben?

**Aufgabe 2.8**

Wieviele Möglichkeiten gibt es, fünf Personen

- in einer Reihe
- an einem runden Tisch anzuordnen?

**Aufgabe 2.9**

Fünf Personen wollen ein Taxi nehmen, das jedoch nur zwei Personen aufnehmen kann. Von den 5 Personen sind 2 Engländer und 3 Franzosen. Unter den Engländern spricht einer nur Englisch, der andere auch Französisch. Von den Franzosen spricht einer nur Französisch, die beiden anderen auch Englisch.

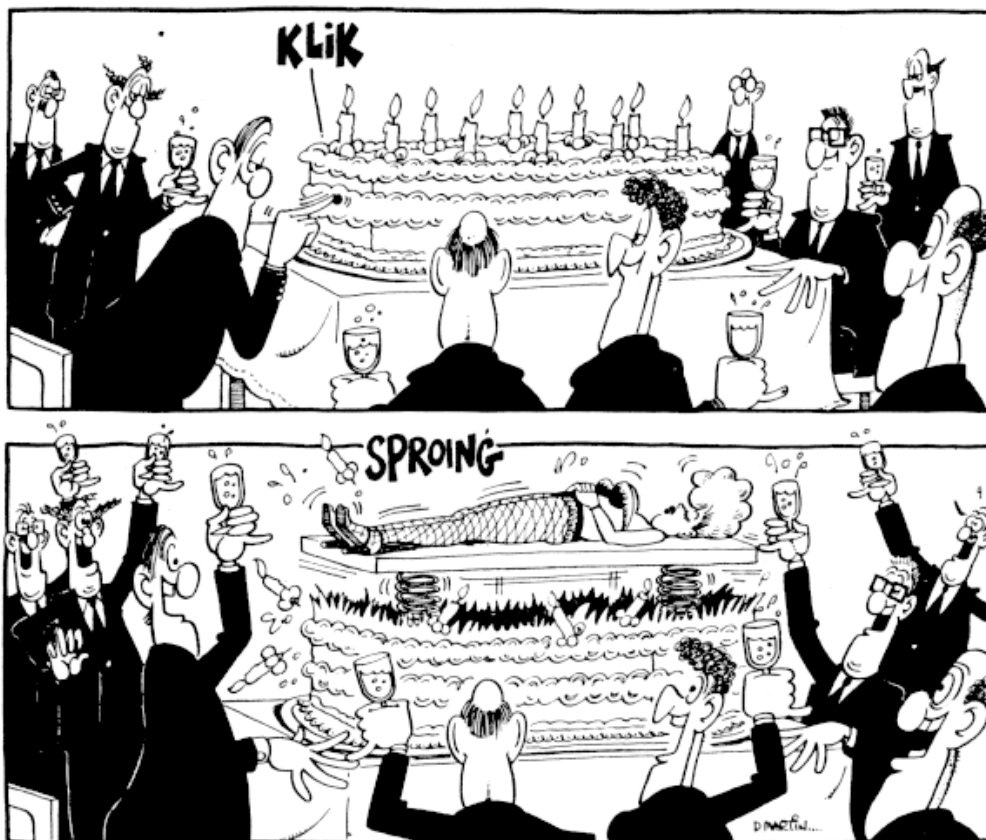


Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

- a) die beiden Passagiere der gleichen Nationalität sind
- b) die gleiche Sprache sprechen
- c) von verschiedener Nationalität sind und trotzdem die gleiche Sprache sprechen?

**Aufgabe 2.10**

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 10 beliebig ausgewählten Personen mindestens zwei am selben Tag Geburtstag haben?



## Aufgaben zu Kapitel 3

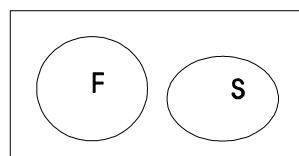
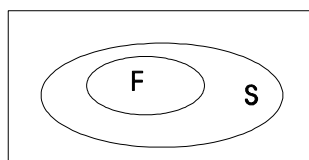
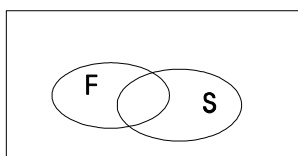
### Aufgabe 3.1.1

Man untersuche, ob die folgenden Aussagen allgemeingültig sind oder nur unter bestimmten Bedingungen (welchen?) gelten (bitte ankreuzen bzw. Bedingungen angeben).

	Aussage	gilt stets	gilt nur, wenn ...	gilt nie
1	wenn $AB \subset AC$ , dann $B \subset C$			
2	wenn $ABC=AB$ dann $B \subset C$			
3	$(A \cup B) - A = B$			
4	$\Omega - (A \cup C) =$ $\overline{A \cap B}$			
5	$(A-B) \cup (A-C)$ $= A-BC$			
6	$\overline{AB - AC} = BC$			
7	$AB - AC =$ $AB - ABC$			
8	$A - B = B - A$			

### Aufgabe 3.1.2

In den folgenden Venn-Diagrammen



sind die Ereignisse    a)  $F \setminus S$     b)  $\overline{F} \cup S$     c)  $F \cap \overline{S}$     d)  $\overline{F} \setminus \overline{S}$

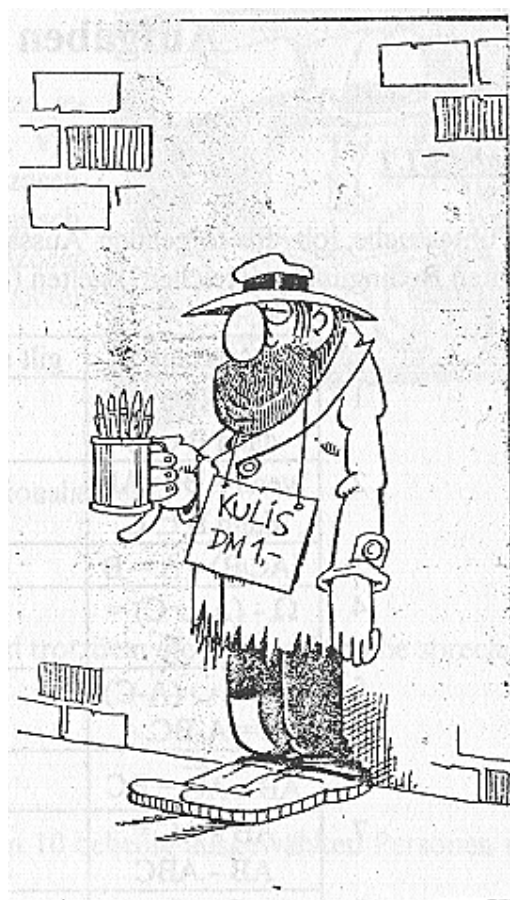
durch Schattierungen hervorzuheben!

**Aufgabe 3.1.3**

Nach langjähriger intensiver Forschungs-  
tätigkeit gelangte ein namhafter Experte  
der Allgemeinen Betriebswirtschaftslehre  
zur fundamentalen Erkenntnis, dass ein  
Betrieb ein System sei, welches mit sei-  
ner Umwelt in einen Leistungsaustausch  
tritt.

Im Falle eines Straßenhändlers der  
Schreibwarenbranche habe man es aber  
mit einem Potential- und nicht einem  
Permanenzbetrieb zu tun, da sich die  
Umwelt in Gestalt von Kunden nur von  
Zeit zu Zeit dem Einwirkungsbereich des  
Systems nähere.

Hinzukommt, dass es einige Potentialbe-  
triebe (Ereignis P) gäbe, die ohne Gewer-  
beschein betrieben werden (sog. Krypto-  
betriebe [Ereignis K]), während es ande-  
rerseits auch Kryptobetriebe gäbe, die  
keine Permanenzbetriebe seien.



Symbolisieren Sie im Venn-Diagramm die folgenden Ereignisse und beschreiben Sie diese in Worten:

Ereignis	Venn-Diagramm
$P \cap K$	
$\bar{P} \cap K$	
$\bar{K}$	
$\bar{K} \cup P$	
$\bar{K} \cup \bar{P}$	

**Aufgabe 3.2.1**

Die Menge  $\Omega$  werde durch vier Ereignisse A, B, C und D vollständig zerlegt. Für die Wahrscheinlichkeiten gelte  $P(A)=1/3$ ,  $P(B)=1/4$ ,  $P(C)=0$ ,  $P(D)=3/12$ ,  $P(A \cup B)=7/12$ ,  $P(A \cup D)=1/2$ . Sind die Axiome von Kolmogoroff erfüllt?

**Aufgabe 3.2.2**

Karl Meier, statistisch vorgebildeter Angestellter einer Sterbekasse, hat folgende Berufskrankheit: beim Anblick eines PKW erkennt er blitzschnell, welche möglichen Todesfälle auftreten können und schreibt eine entsprechende Liste auf, die man als Statistiker ..... nennt.

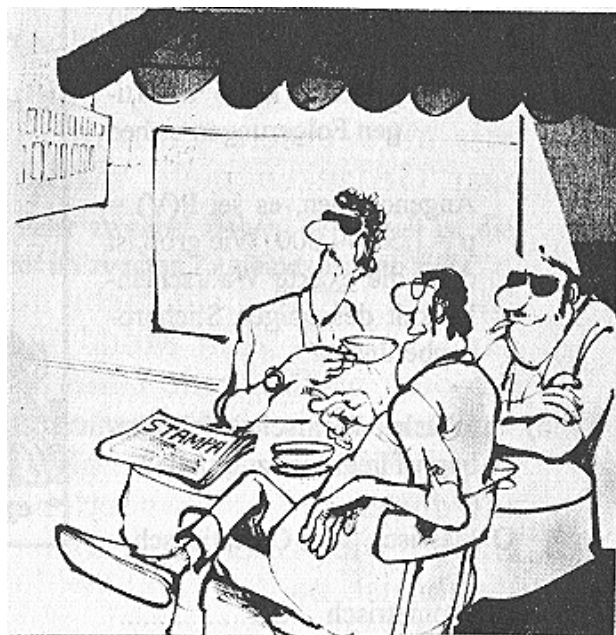
Eines Tages sieht er in einem Auto Vater (V), Mutter (M), Schwiegermutter (S) und Kind (K) sitzen. Wie lautet Meiers Liste?

Man zeige an einem Beispiel, dass für beliebige Teilmengen aus dieser Liste gilt, dass Vereinigung, Durchschnitt, Differenz und Komplement selbst wieder Elemente dieser Liste darstellen!

**Aufgabe 3.2.3**

In einem Straßencafé sitzen drei Männer und machen sich Gedanken darüber ob die vorbeiziehende Passantin P eine "Klassefrau" sei (Ereignis K). Kann man die Wahrscheinlichkeit  $P(K)$  bestimmen nach dem

- a) klassischen ...
- b) statistischen ...
- c) subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriff?



**Aufgabe 3.2.4**

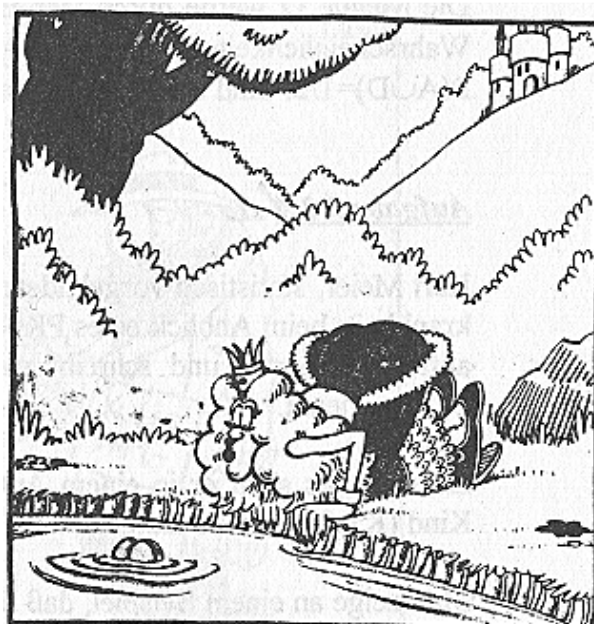
Kann man eine Wahrscheinlichkeit P über einen Stichprobenraum  $\Omega$  dergestalt definieren, dass für zwei Elemente A und B von  $\Omega$  gilt:

- a)  $P(A) = 0,9$ ,  $P(B) = 0,05$  und  $P(A \cap B) = 0,3$
- b)  $P(A) = 0,9$ ,  $P(B) = 0,3$  und  $P(A \cap B) = 0,05$
- c)  $P(A) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ,  $P(B) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ,  $P(A \cap B) = 0,5$  und  $P(A \cup B) = \sqrt{2} - 1/2$  ?



**Aufgabe 3.2.5**

Bekanntlich treten in Märchen Ereignisse auf, die im Alltagsleben so gut wie nie auftreten, z.B. die Verwandlung eines Frosches in einen Prinzen (Ereignis V).



- a) Gleichwohl ist auch im Alltagsleben das Ereignis V nicht im logisch-wissenschaftlichen Sinne unmöglich, wenn gleich  $P(V)$  praktisch Null sein dürfte.

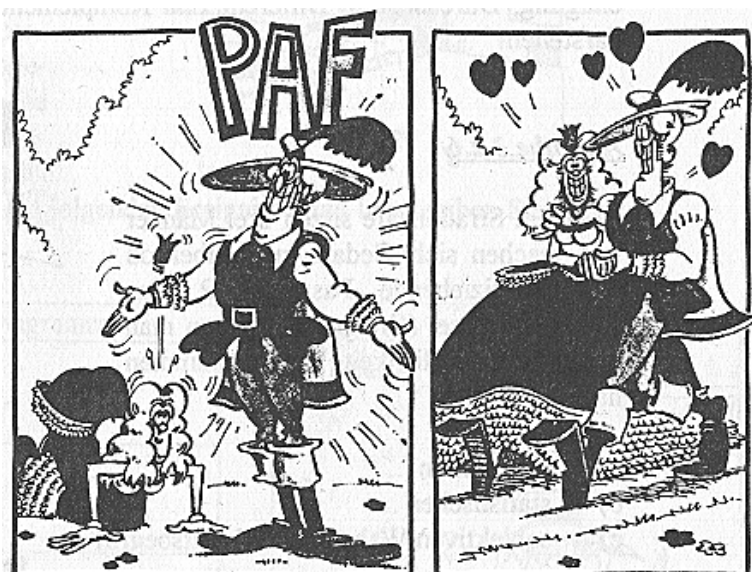
Ein Statistiker habe eine Millionen Frosch-Küsse von Prinzessinnen beobachtet, aber trotzdem keinen Fall erlebt, in dem sich ein Frosch in einen Prinzen verwandelt hat. Er kann daraus folgern:

- $P(V) = 0$
- $0 \leq P(V) \leq 1/1.000.000$
- er kann keine derartigen Folgerungen ziehen

Angenommen, es sei  $P(V) = p = 1/5.000.000$ . Wie groß ist dann die exakte Wahrscheinlichkeit des obigen Stichprobenbefundes?

- b) Welcher Wahrscheinlichkeitsbegriff liegt hier zugrunde?

- klassisch       statistisch
- geometrisch     .....



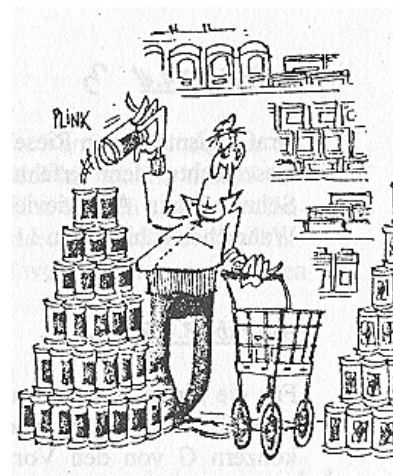
- c) Die folgenden Ereignisse mögen eine vollständige Zerlegung  $\Omega$  bilden:

G: Verwandlung in einen Grafen  
 K: Verwandlung in (leider nur) einen Diplom-Kaufmann  
 $\bar{V}$ : keine Verwandlung

Wie lautet das sichere Ereignis? Nennen Sie ein unmögliches Ereignis! Warum ist  $\{ \Omega, K, K \cup G \}$  keine  $\sigma$ -Algebra?

**Aufgabe 3.3.1**

Die Kunden eines Kaufhauses kaufen im 1.Stock (nicht: nur im ersten Stock) mit einer Wahrscheinlichkeit von  $P(A)=0,25$ , im 2.Stock mit  $P(B)=0,3$  und sowohl im ersten als auch im zweiten Stock mit  $P(A \cap B)=0,05$ . Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit  $P(A \cup B)$ , dass ein Kunde entweder im ersten oder im zweiten Stock einkauft? Kann man aus den Zahlen erkennen, dass das Kaufhaus noch mehr Stockwerke haben muß, z.B. einen dritten Stock oder einen Keller?

**Aufgabe 3.3.2**

Für die Ereignisse A, B, C aus einem Ereignissystem gilt

$$\begin{array}{lll} P(A) = 0,5 & P(A \cup B) = 0,6 & P(A \cap B \cap C) = 0,02 \\ P(B) = 0,2 & P(A \cup C) = 0,6 & \\ P(C) = 0,3 & P(B \cap C) = 0,1 & \end{array}$$

Man berechne die Wahrscheinlichkeiten für:

$$P(B \cup C) = \quad P(A \cap C) = \quad P(A \cap B) = \quad P(A \cup B \cup C) =$$

**Aufgabe 3.4.1**

Bei einem Kartenspiel mit 32 Karten darf ein Spieler zweimal ziehen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er entweder im ersten oder im zweiten Zug einen Buben zieht

- bei Ziehen ohne Zurücklegen?
- bei Ziehen mit Zurücklegen?

(Wie lauten die Wahrscheinlichkeiten, wenn es heißt: entweder im ersten oder im zweiten Zug oder in beiden Zügen?)

**Aufgabe 3.4.2**

Von einem dreimotorigen Fluggerät älterer Bauart ist anzunehmen, dass jeder Motor während eines geplanten Fluges von 10 Stunden mit einer konstanten Wahrscheinlichkeit von 0,9 ungestört laufen wird.

- Wie wahrscheinlich ist es, dass  $x=0$ ,  $x=1$ ,  $x=2$  bzw.  $x=3$  Motoren während des Fluges ausfallen werden?
- Es ist zu erwarten, dass im Durchschnitt ... Motoren ausfallen werden.
- Geben Sie das zu dieser Aufgabe passende Urnenmodell an.

**Aufgabe 3.4.3**

Graf Sigismund von Rieselkalk sorgt sich um den Fortbestand seines uralten vornehmen Geschlechts, denn erfahrungsgemäß setzt dies in einer Generation mindestens zwei Söhne voraus. Auf wieviele Kinder sollten sich die Rieselkalks einrichten, um mit einer Wahrscheinlichkeit von  $11/16$  (also 68,75%) mindestens zwei Söhne zu haben?

**Aufgabe 3.4.4**

Für die Firma X bemühen sich drei Vertreter (A,B,C) unabhängig voneinander den Großkonzern G von den Vorzügen der Produkte von X zu überzeugen. Die Wahrscheinlichkeit, dass es A gelingt G vom Kauf zu überzeugen sei  $1/8$ . Bei B sei diese Wahrscheinlichkeit  $1/6$  und bei C sei sie  $1/5$ . Es bestehe stochastische Unabhängigkeit.

Wie wahrscheinlich ist es, dass G

- von keinem der drei Vertreter (sei es A, B oder C) zum Kauf überredet wird?
- von einem der drei Vertreter (sei es A, B oder C) zum Kauf überredet wird?



**Aufgabe 3.4.5**

Auf einer einsamen Insel sitzt der schiffbrüchige Diplom-Kaufmann K aus E. Dank seiner vorzüglichen Statistikausbildung ist er in der Lage, die Wahrscheinlichkeit dafür zu berechnen, dass er im Verlaufe des nächsten Jahres gerettet wird (Ereignis R), was jedoch voraussetzt, dass ein Schiff in Sichtweite vorbeifährt (S), was K an jedem Tag des Jahres für gleich wahrscheinlich hält. Für die Ereignisse R und S gilt dann: R ist ...

- abhängig von S
- ein Teilereignis von S
- unverträglich mit S
- ein sicheres Ereignis
- kein Zufallsereignis
- $P(R) < P(S)$
- $P(RS) = P(R) P(S)$
- $P(R) = P(RS)$

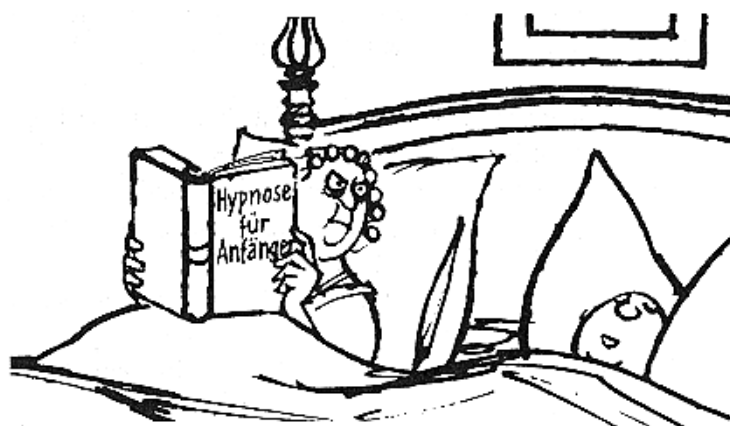


**Aufgabe 3.4.6**

Der Chevalier de Méré, ein Freund Blaise Pascals, gewann ein Vermögen, indem er darauf setzte, mit 4 Würfeln mindestens eine 6 zu erhalten. Méré hat intuitiv darauf vertraut, dass bei 4 Würfeln eine 6 zu erreichen sein müsste. Eine ähnlich hohe Gewinnchance vermutete er daraufhin in folgender Wette: eine Doppelsechs (Pasch) bei 24 Würfeln mit zwei Würfeln. Er machte hiermit jedoch bankrott. Mit welchem Argument hätten Sie dem Chevalier von seinem zweiten Spiel abgeraten?

**Aufgabe 3.4.7**

Der eifersüchtigen Hausfrau H gelingt es trotz verfeinerter Techniken der Befragung und Beeinflussung ihres Ehemannes E nicht, sich Klarheit über gewisse Vorgänge auf einer Geschäftsreise des E zu verschaffen. Bei den allabendlichen Verhören schläft E mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,75 frühzeitig und stumm ein, ohne dass es zu einem klärenden Gespräch kommt.



Sofern E nicht einschlft, besteht auch nur eine geringe Wahrscheinlichkeit von 0,2 dafür, dass es zu einem Gespräch kommt. Wie wahrscheinlich ist es, dass E einem Verhör seiner eifersüchtigen Gattin nicht ausweicht?

**Aufgabe 3.4.8**

Ein Zufallsexperiment besteht aus dem Werfen dreier idealer Würfel. Es wird behauptet, die Augensummen 9 und 10 erscheinen nicht gleich häufig, obwohl beide Summen auf 6 Arten eintreten können (man spricht auch von Partitionen der Summe 9 bzw. 10):

$$\begin{aligned} \text{"9"} &= 1+2+6 = 1+3+5 = 1+4+4 = 2+2+5 = 2+3+4 = 3+3+3 \\ \text{"10"} &= 1+3+6 = 1+4+5 = 2+2+6 = 2+4+4 = 2+3+5 = 3+3+4 \end{aligned}$$

Man erkläre den Sachverhalt!

**Aufgabe 3.4.9**

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens einer von zwei Würfeln die Augenzahl 2 zeigt (Ereignis A), wenn zugleich die Summe der Augenzahlen beider Würfel 6 ist (Ereignis B). Man zeige, dass A und B nicht stochastisch unabhängig sind.

**Aufgabe 3.4.10**

Wie groß ist die Summe der bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$P(A | B) + P(\bar{A} | B) \quad \text{und} \quad P(A | B) + P(A | \bar{B})$$

- wenn
- a) beide Ereignisse stochastisch unabhängig sind,
  - b) beide Ereignisse nicht stochastisch unabhängig sind ?

**Aufgabe 3.4.11**

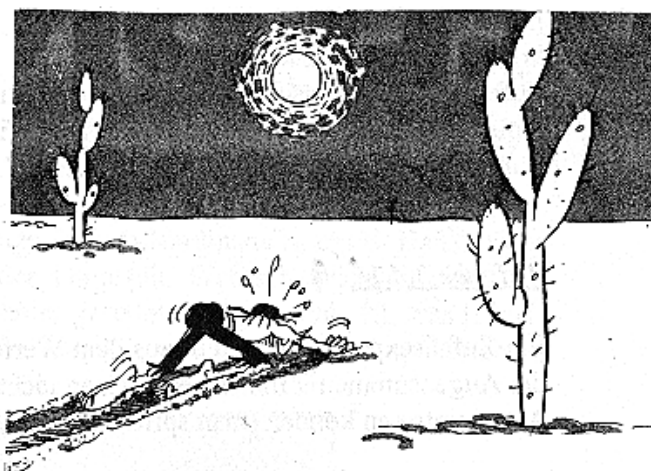
Auf einen Regentag (R) folge mit  $P(S | R) = 0,3$  ein Sonnentag (S) und auf einen Sonnentag mit  $P(R | S) = 0,25$  ein Regentag.

- a) Wie wahrscheinlich ist es, dass (heute sei ein Regentag und ein Tag ist stets entweder ein Sonnentag oder Regentag)
  - übermorgen wieder ein Regentag ist?
  - nach sieben Regentagen am achten Tag nach heute erstmals wieder die Sonne scheint? (Ansatz genügt)
  - ab morgen eine ganze Woche lang, insgesamt sieben Tage das gleiche Wetter herrscht?
- b) Sind die Ereignisse R und S stochastisch unabhängig oder nicht? (Begründung erforderlich)

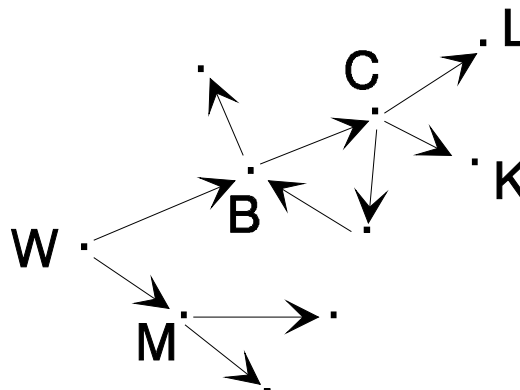
**Aufgabe 3.4.12**

Diplom-Kaufmann K aus E hatte für die Gasfirma R in E, bei welcher er beschäftigt ist, 20 Erdgaslieferanten im Nahen Osten zu besuchen.

Auf dem Weg zum Lieferanten L hat er sich leider in der Wüste verirrt (vgl. Bild).



An jeder Verzweigung des Weges von W (Standort) nach L (Ziel) setzt K Seinen Weg ganz nach dem Prinzip des Zufalls fort. Er kann an der Stelle C auch über B zurückkehren und sich so evtl. mehrmals im Kreis bewegen.



Wie wahrscheinlich ist es, dass K unter diesen Umständen nicht zu L gelangt?

**Aufgabe 3.4.13**

In einer entlegenen Ecke in den Karpaten liegen die Höfe der beiden verfeindeten Bauern Andrzej und Boguslaw unmittelbar nebeneinander. Beide müssen von Zeit zu Zeit eine bestimmte Brücke überqueren und weil sie spinnefeind sind, kann es passieren, dass es dabei zu tätlichen Auseinandersetzungen (Ereignis T) kommt. Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt, wenn sie sich treffen, 0,8.



Die Wahrscheinlichkeit, dass A an einem beliebigen Tag die Brücke überquert, betrage  $P(A) = 0,3$ . Die entsprechende Wahrscheinlichkeit sei bei Boguslaw  $P(B) = 0,2$ . Die Ereignisse A und B seien (schon wegen der durch die Feindschaft bedingte Kontaktarmut zwischen A und B) unabhängig.

- a) Man trage ein Symbol für das gefragte zusammengesetzte Ereignis, sowie den Zahlenwert für die Wahrscheinlichkeit in die Tabelle ein:

	Wie wahrscheinlich ist es, dass	Symbol	Wahrsch.
1	A die Brücke überquert, wenn auch B sie überquert		
2	A und B sich beim Überqueren der Brücke begegnen		
3	es zu einer tätlichen Auseinandersetzung kommt, wenn sie sich nicht begegnen		
4	wenigstens einer von beiden die Brücke überquert		
5	einer von beiden, aber nicht beide zusammen die Brücke überqueren		
6	weder A noch B die Brücke überqueren		
7	zwar Andrzej, aber nicht Boguslaw die Brücke überquert		
8	dass die beiden sich begegnen, es aber nicht zu einer tätlichen Auseinandersetzung kommt		
9	dass es zu einer tätlichen Auseinandersetzung kommt		

- b) Wegen seiner überlegenen Körpergröße und -stärke besteht eine Wahrscheinlichkeit von  $P(S)=0,6$ , dass Boguslaw im Kampf gegen Andrzej siegt. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Kampf zwischen beiden unentschieden ausgeht, sei  $P(U) = 0,1$  und die Wahrscheinlichkeit, dass Boguslaw verliert sei  $P(V) = 0,3$ . Die drei Wahrscheinlichkeiten seien konstant.

Die drei Ereignisse bilden

- einen Stichprobenraum
- ein Ereignisfeld
- eine  $\sigma$ -Algebra
- eine Zerlegung

Je zwei Ereignisse, etwa U und S sind

- unabhängig
- unverträglich



*Vorgriff auf Kapitel 5*

- c) Wie wahrscheinlich ist es, dass Andrzej spätestens nach dem 5-ten Kampf erstmals Boguslaw besiegt? (Ansatz genügt)
- d) Wie wahrscheinlich ist es, dass Andrzej von 10 Kämpfen nur höchstens zwei siegreich für sich entscheiden kann? (Ansatz genügt)

**Aufgabe 3.4.14**

Der Haushalt des arbeitslosen Diplom-Kaufmanns K auf E befindet sich wirtschaftlich in einer sehr prekären Lage. Am morgigen Tag könnten sich die Ereignisse im guten wie im schlechten Sinne dramatisch zuspitzen. Es kann nämlich sein, dass morgen

- der Gerichtsvollzieher erscheint (Ereignis A [Amtsperson]),



- es kann aber auch sein, dass die reiche Erbtante Beate (B) zu Besuch kommt, deren Gunst K jedoch seinerzeit verspielt hatte, als er in der Statistik-Klausur durchfiel.

Es sei  $P(A) = 0,6$ ,  $P(B) = 0,2$  und  $P(B | A) = 0,3$ .

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

- a) A und B
- b) einer von beiden (A oder B) oder beide
- c) einer von beiden, aber nicht beide zusammen
- d) keiner von beiden (weder A noch B) zu Besuch kommt?



**Aufgabe 3.4.15**

Mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit komme es zu einem sogenannten "Streik" von Studenten, d.h. zu einer kollektiven Verweigerung der Leistung (!) "Anhören einer Vorlesung".

- a) Wie wahrscheinlich ist es bei der konstanten Streikwahrscheinlichkeit von  $p = 0,3$  jedes Semester, d.h. stochastisch unabhängigen Streiks, dass Sie in den nächsten sechs Semestern noch mindestens einen Streik miterleben werden? (Pro Semester gibt es immer entweder 0 oder 1 Streik)
- b) Wie wahrscheinlich ist es, dass die Studenten in den nächsten drei Semestern noch wenigstens einen (höchstens zwei) Streiks erleben werden, wenn für drei Streiks  $S_1, S_2, S_3$  gilt:  $P(S_1) = 0,3$ ,  $P(S_2 | S_1) = 0,4$ ,  $P(S_2 | \bar{S}_1) = 0,7$ ,  $P(S_3 | S_1 \cap S_2) = 0,8$ , und  $P(S_3 | \bar{S}_1 \cap \bar{S}_2) = 0,9$ ?
- c) Angenommen, bei dem Ereignis "Streik" (S) käme es mit großer Wahrscheinlichkeit  $P(A | S) = 0,8$  zu heftigen Auseinandersetzungen (A) mit einem als rechtsradikalem Psychopathen bekannten Professor. Es kann aber auch zu solchen Auseinandersetzungen kommen, ohne dass gestreikt wird, denn  $P(A | \bar{S}) = 0,4$ . Es sei weiter  $P(S) = 0,4$ . Man berechne die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:  
 $P(A \cap S) =$      $P(A) =$      $P(S | A) =$      $P(A \cup \bar{A}) =$      $P(A | S) =$
- d) Es gelte  $P(A \cap S) = 0,3$ ,  $P(A) = 0,4$  sowie  $P(S) = 0,6$ . Welche Ereignisse bilden eine vollständige Zerlegung und welche Wahrscheinlichkeiten müssen für diese Ereignisse gelten, damit die Kolmogoroffschen Axiome erfüllt sind?  
 Gegen welches der Kolmogoroffschen Axiome verstößt man, wenn man folgende Wahrscheinlichkeiten annimmt:  
 $P(A \cap S) = 0,4$ ,     $P(A) = 0,3$     sowie     $P(S) = 0,6$  ?



Aufgabe 3.4.16

Der im Außendienst (Versicherungen!) beschäftigte Dipl. Kaufmann K aus E ist leider sehr eifersüchtig, da seine Gattin Kontakt mit einem Nebenbuhler pflegt.

Die zu betrachtenden Ereignisse sind wie folgt definiert: N = Nebenbuhler zu Hause; K = Dipl.-Kfm. K zu Hause

Für die Wahrscheinlichkeiten gilt:  
 $P(N|K) = 0,01$ ,  $P(N|\bar{K}) = 0,85$  und  
 $P(K) = 0,6$ .



Wie wahrscheinlich ist es, dass N im Hause ist und wie wahrscheinlich ist es, dass K in seinem Haus den Nebenbuhler N trifft?

Aufgabe 3.4.17

Man spiele mit zwei Würfeln und es seien drei Ereignisse wie folgt definiert

- $A_1$ : der erste Würfel zeigt eine ungerade Augenzahl,
- $A_2$ : der zweite Würfel zeigt eine ungerade Augenzahl,
- $A_3$ : die Summe der beiden Augenzahlen ist ungerade.

- a) Welche der drei Ereignisse sind paarweise unabhängig?
- b) Sind alle drei Ereignisse wechselseitig unabhängig?

Aufgabe 3.4.18

Unter den Aktienhändlern der *Frankfurter Wertpapierbörse* ergab eine Umfrage, dass 70% Abonnenten der *FAZ* sind (Ereignis F), während 20% das *Handelsblatt* nicht abonnieren (Ereignis  $\bar{H}$ ). 90% der Abonnenten der *FAZ* abonnieren darüber hinaus auch das *Handelsblatt*.

- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
  - 1) ein zufällig ausgewählter Händler **keine** der beiden Zeitungen abonniert hat?
  - 2) ein zufällig ausgewählter Händler **beide** Zeitungen täglich liest?
  - 3) ein zufällig ausgewählter Händler nur **eine** der beiden Zeitungen abonniert?
- b) Sind die Ereignisse F und H unabhängig?
- c) 10% der *Handelsblatt-Leser* und 5% der *Nicht-Handelsblatt-Leser* kaufen heimlich auch die *Bildzeitung*.  
 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Aktienhändler die *Bildzeitung* liest?

**Aufgabe 3.5.1**

- a) Bei einer Klausur im Fach X gäbe es zwei Gruppen von Teilnehmern: Könnler (Gruppe I, Anteil: 40 vH) und Nichtkönnler (Gruppe II, Anteil: 60 vH). Die Wahrscheinlichkeit die Klausur zu bestehen, sei bei der Gruppe I 0,9 und bei der Gruppe II 0,1.  
Wie wahrscheinlich ist es ...  
... die Klausur zu bestehen?  
... unter denjenigen, die sie bestehen, einen Nichtkönnler anzutreffen?
- b) Führen Sie die gleiche Betrachtung für das Fach Y durch, in dem die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten die Klausur zu bestehen bei Gruppe I 0,6 und bei Gruppe II 0,3 sein mögen und für das Fach Z, in dem die Wahrscheinlichkeiten in beiden Gruppen gleich, nämlich 0,42 sind ?

**Aufgabe 3.5.2**

Bei der Tour de Trance, einer berühmten Radrennfahrt über 21 Etappen starten 180 Teilnehmer. Es ist im allgemeinen davon auszugehen, dass ein Zehntel der Rennfahrer gedopt ist (Ereignis D). Die Wahrscheinlichkeit dafür dass ein gedopter Fahrer einen Etappensieg herausfährt betrage  $P(S | D) = 0,3$  und ohne Doping 0,1.

- a) Sind die Ereignisse S und D stochastisch voneinander unabhängig (Begründung!)?
- b) Wie wahrscheinlich ist es, einen Etappensieg herauszufahren?
- c) Teilnehmer T siegte überraschend bei der ersten Etappe. Wie wahrscheinlich ist es, dass er gedopt war?

**Aufgabe 3.5.3**

Dem Student S steht als letzte Bewährungsprobe auf dem Weg zum Diplomkaufmann noch die mündliche Prüfung im Fache .... bevor, die vor zwei Prüfern abgelegt werden muß. In diesem Fach gibt es fünf Prüfer, wobei drei als milde und zwei als scharf bekannt sind. Die Wahrscheinlichkeit, das Examen zu bestehen (Ereignis B) hängt von der Anzahl X der scharfen, bzw. von  $Y = 2 - X$ , der Anzahl der milden Prüfer, ab. Es sei

$$P(B | x=0) = 0,9, \quad P(B | x=1) = 0,5 \quad \text{und} \quad P(B | x=2) = 0,3.$$

- a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird S seine Prüfung bestehen, wenn er sich die zwei Prüfer frei auswählen kann?
- b) Man zeige, dass S die Prüfung nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,6 besteht, wenn er die Prüfer nicht frei auswählen kann, sondern diese durch Los bestimmt werden (wobei dann  $P(x=0) = 0,3$  und  $P(x=1) = 0,6$ ).
- c) Ein zufällig ausgewählter Student S hat das Examen bestanden. Wie wahrscheinlich ist es, dass er zu den Studenten gehört, die
- nur von milden ( $x=0$ )
  - nur von scharfen ( $x=2$ )
- Prüfern geprüft worden sind, wenn die Prüfer nach dem Zufallsprinzip (durch Los) bestimmt worden sind?

**Aufgabe 3.5.4**

Wie groß ist in Aufg. 3. 4.3 die Wahrscheinlichkeit des Absturzes des Fluggeräts, wenn die Wahrscheinlichkeit des Absturzes beim Ausfallen von

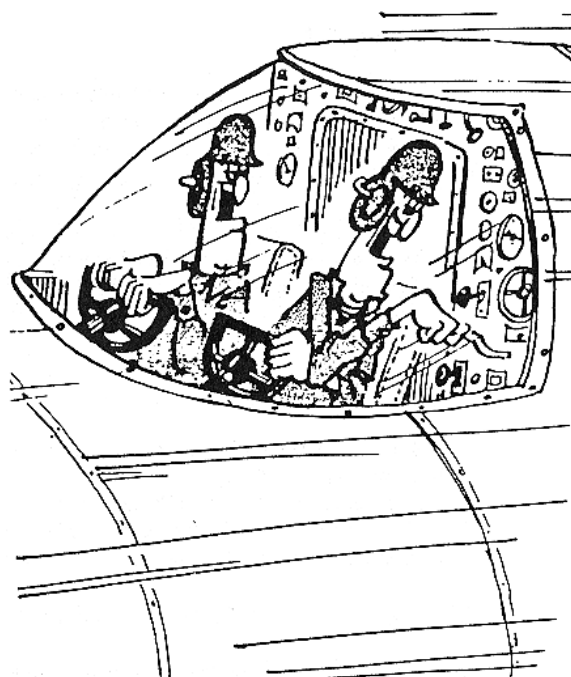
- 0 Motoren 0,01
- 1 Motor 0,1,
- 2 Motoren 0,7
- 3 Motoren 1

beträgt.



**Aufgabe 3.5.5**

Bei einem längeren Flug kann es schon einmal vorkommen, dass eine Crew einen Funkspruch überhört und sich so Ärger mit den Radarlotsen einhandelt oder dass andere Unregelmäßigkeiten eintreten (Ereignis R). Kapitän K fliegt nicht ungerne mit dem Copiloten A. Es kommt dann jedoch bei jedem zweiten Flug zu einer Unregelmäßigkeit, so dass  $P(R | A) = 0,5$  ist, während dies beim schweigsamen Copiloten B nur bei jedem achten Flug der Fall ist.



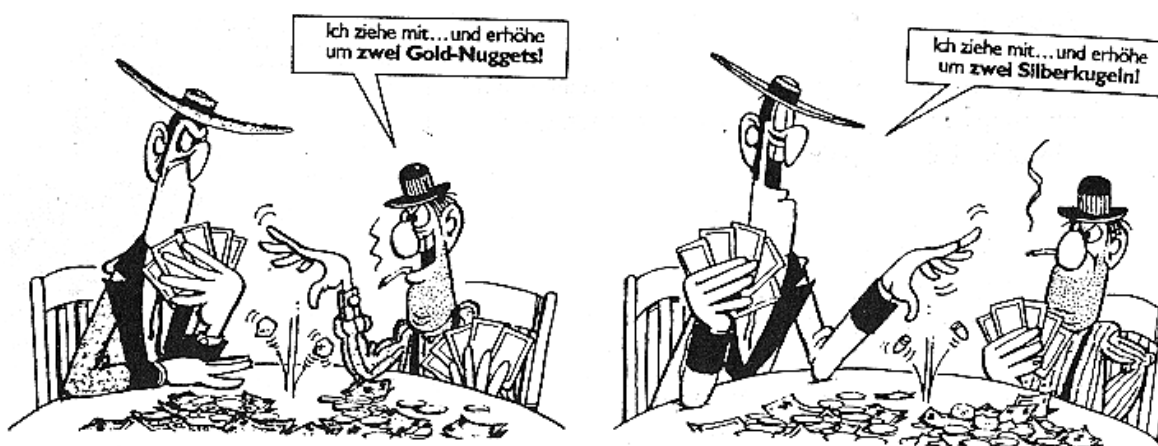
Wenn K bei fünf von neun Flügen mit A und bei vier von neun Flügen mit B zusammen im Cockpit sitzt, wie groß ist dann  $P(R)$  und  $P(A | R)$ ?

**Aufgabe 3.5.6 (für Fortgeschrittene)**

Ein Spieler S versucht beim Werfen einer Münze das richtige Ergebnis (Kopf oder Zahl) vorherzusagen. Gelingt ihm dies, so erhält er 1 DM, andernfalls zahlt er 1 DM. Natürlich kann das Spiel endlos sein. S spielt jedoch so lange, bis er entweder sein Anfangskapital K verspielt hat (Ruin) oder einen vorher vereinbarten Betrag  $B \geq K$  angesammelt hat.

Man zeige, dass die Wahrscheinlichkeit des Ruins hier genau  $1 - K/B$  beträgt.

## Aufgaben zu Kapitel 4



### Aufgabe 4.1.1

- Eine Münze kann auf Kopf K oder Wappen W fallen, so dass  $\Omega_i = \{K, W\}$  der Stichprobenraum beim  $i$ -ten Wurf ist. Man bilde das Produkt aus  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  und  $\Omega_3$  und definiere die Zufallsvariable  $X =$  Anzahl der Wappenwürfe. Welche Ausprägungen kann  $X$  annehmen? Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion für  $X$ !
- Eine Münze sei auf einer Seite (Wappen) beschwert, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze auf das Wappen fällt (d.h. Wappen gezeigt wird)  $P(W)=1/3$  ist.  $x = 0, 1, 2, 3$  sei die Anzahl der bei drei Würfen mit dieser Münze erzielten "Wappen". Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion für  $X$ !
- Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung für die beiden Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Teil a) und b).

### Aufgabe 4.1.2

Die stetige Zufallsvariable  $X$  habe die Dichtefunktion.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion  $F(x)$  und den Erwartungswert  $E(X)$ .
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit  $P(0,5 \leq x \leq 1,5)$ !

### Aufgabe 4.1.3

Gegeben sei die stetige Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{72}x^2 + \frac{1}{12}x + \frac{1}{12} & \text{für } 0 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{für sonstige} \end{cases}$$

- a) Man zeige, dass  $f(x)$  eine Dichtefunktion sein kann!
- b) Man bestimme die Wahrscheinlichkeit  $P(1 \leq x \leq 5)$ !
- c) Man bestimme den Erwartungswert und die Varianz von  $X$ !

**Aufgabe 4.1.4**

Der Geschäftsmann G sucht eine Anlage für einen größeren Geldbetrag. Dabei spielt er mit dem Gedanken, sich an dem Unternehmen des dynamischen aber nicht sehr seriösen Unternehmers U zu beteiligen. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Anlage bei U sicher ist, sei  $P(S)=0,4$  und die Wahrscheinlichkeit, dass sie rentabel ist, sei  $P(R)=0,8$ . Dabei seien R und S stochastisch unabhängig.

Man berechne die Erwartungswerte der Nutzen, wenn die Werte des sich jeweils ergebenden Nutzens wie folgt lauten:

	RS	$\bar{R}S$	$R\bar{S}$	$\bar{R}\bar{S}$
beteiligen	10	2	3	0
nicht beteiligen	0	6	4	20

Kann sich G für eine der beiden Strategien (beteiligen oder nicht beteiligen) aufgrund des Erwartungswertes des Nutzens entscheiden?

**Aufgabe 4.1.5** (Petersburger Spiel)

Bei einer Spielbank wird der Einsatz von Y verlangt. Man erhält eine Auszahlung A in Höhe von  $2^m$ , wenn bei m Würfeln mit einer (regulären) Münze m mal Wappen erscheint. Wie groß sollte der Einsatz Y sein, damit sich das Spiel lohnt, d.h. damit der Gewinn  $X=A-Y$  nicht negativ wird?

**Aufgabe 4.1.6**

Auch entlegenden Ortes wird meist die warme Küche gegenüber der kalten bevorzugt. Da jedoch die Stückzahl X der landesüblichen Speise zufallsbedingt stark schwankt und auf eine frische Zubereitung viel Wert gelegt wird, ist die richtige Dimensionierung der Kochtöpfe ein Problem. Es gelte:



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2^x} & \text{für } x = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass  $f(x)$  eine Wahrscheinlichkeitsfunktion ist und  $E(X)=3$  ist! Hinweis: Für jedes  $0 < q < 1$  gilt mit  $x = 0, 1, 2, \dots$

$$\sum xq^x = \frac{q}{(1-q)^2} \quad \text{und} \quad \sum x^2q^x = \frac{q(1+q)}{(1-q)^3}$$

b) Wie ist dann  $Y=1+X$  verteilt?

**Aufgabe 4.1.7**

Man zeige, dass die Funktion

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 10,02x \text{ für } 0 \leq x \leq 10 \text{ keine Dichtefunktion sein kann.}$$

**Aufgabe 4.1.8**

Es gibt gewisse Situationen, bei denen das Auftreten von Hunden unerwünscht ist und sogar einer Amtsperson bei der Wahrnehmung ihrer Dienstgeschäfte hinderlich sein kann. Die Anzahl  $X$  der auftretenden Hunde sei eine nichtnegative ganzzahlige Zufallsvariable, für die gelten möge

- $P(X=0) = 0,74$
- $P(X=1) = 0,02$
- $P(X=2) = 0,16$
- $P(X=3) = 0,08$



- a) Man bestimme  $E(X)$ !
- b) Es sei  $D$  das Ereignis, dass das Dienstgeschäft durchgeführt werden kann. Ferner

$$\text{gelte } P(D | X=x) = \frac{1}{2^x} \text{ für } x = 0, 1, 2, 3.$$



Diese Wahrscheinlichkeiten  $P(D | X)$  sind

- eine geometrische Verteilung
- in der Summe 1, oder sie sollten zumindest in der Summe 1 sein
- sog. "Likelihoods"
- totale Wahrscheinlichkeiten

- [ ] bedingte Wahrscheinlichkeiten
- [ ] a priori Wahrscheinlichkeiten

Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Dienstgeschäft zur Ausführung gelangt, also  $P(D)$ !



### Aufgabe 4.1.9

Gegeben sei die Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} 4x^3 & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- a) Warum ist  $f(x)$  eine Dichtefunktion? Welche Voraussetzungen sind zu erfüllen, damit  $f(x)$  eine Dichtefunktion sein kann? Kann  $f(x) > 1$  sein?
- b) Man bestimme den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsvariablen  $X$ .

### Aufgabe 4.1.10

Man zeige, dass die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$$

für  $x = 1, 2, \dots$  die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer diskreten Zufallsvariablen ist und dass  $E(X)$  nicht existiert.

### Aufgabe 4.1.11

Man zeige, dass

$$f(x) = \begin{cases} \frac{10}{x^2} & \text{für } x > 10 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

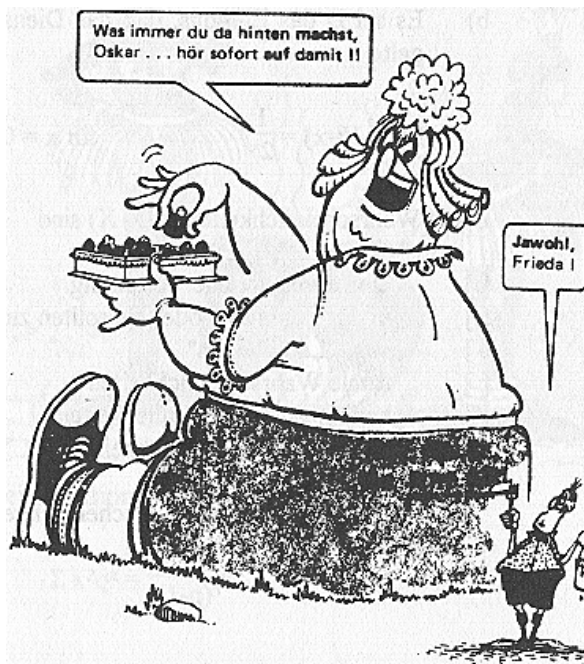
- a) eine Dichtefunktion ist;
- b) keinen Erwartungswert besitzt.

### Aufgabe 4.1.12

Die stark überdimensionierte Hausfrau  $H$  wünscht ihre Figur durch ein Schlankheitsmittel zu korrigieren. Für die tägliche Gewichtsabnahme um  $x$  Kilogramm existiert die folgende Dichtefunktion:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{7}{12} - \frac{1}{6}x & \text{für } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- a) Man zeige, dass es sich bei  $f(x)$  in der Tat um eine Dichtefunktion handelt.
- b) Es gilt, richtige Aussagen anzukreuzen!
  - o Die Wahrscheinlichkeit, nur ein halbes Kilo abzunehmen, beträgt  $f(0,5) = 6/12$ .
  - o Die Wahrscheinlichkeit, bis zu einem halben Kilo an einem Tag abzunehmen, beträgt  $7/12$ .
  - o Die Wahrscheinlichkeit, drei Kilo an einem Tag abzunehmen, beträgt  $1/12$ .
  - o Die obige Dichtefunktion ist eine Normalverteilung.
  - o Die obige Dichtefunktion ist eine Gleichverteilung.
  - o Die Größe  $f(x)$  darf im allgemeinen nicht über eins betragen.
  - o Die Größe  $f(x)$  ist im obigen Beispiel einer Dichtefunktion höchstens  $7/12$  und damit kleiner als eins.
- c) Man bestimme den Erwartungswert  $E(X)$  und die Varianz  $V(X)$ .
- d) Die Hausfrau  $H$  nehme an vier Tagen jeweils unabhängig voneinander die zufällige Menge von  $X$  Kilogramm je Tag ab, also insgesamt  $X + X + X + X = Y$  Kilogramm. Man bestimme Erwartungswert und Varianz der Zufallsvariable  $Y$ , also  $E(Y)$  und  $V(Y)$

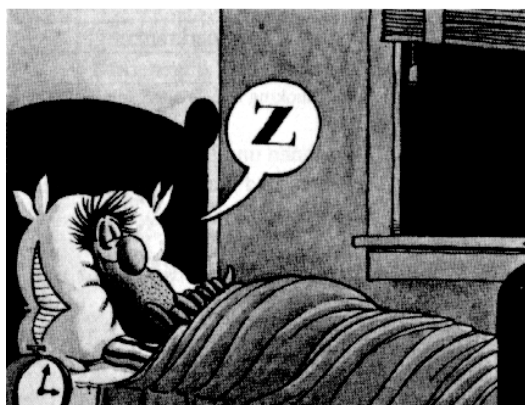


**Aufgabe 4.1.13**

- a) Die Schlafdauer  $X$  (in Stunden) des  $K$  sei wie folgt verteilt:

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \frac{1}{6}x & \text{für } 6 \leq x < 8 \\ 1 - \frac{1}{12}x & \text{für } 8 \leq x \leq 12 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese Verteilung ist:



	diskret		stetig		stückweise linear
	eindimensional		zweidimensional		dreidimensional
	symmetrisch		asymmetrisch		dreigipflig

- b) Zeigen Sie, dass der Erwartungswert  $E(X) = 26/3 = 8,667$  beträgt (Ansatz genügt)! Wie wahrscheinlich ist es, dass  $K$  mehr als zehn Stunden schläft?



c) (Vorgriff auf Kap. 6) Angenommen, X sei wie folgt verteilt:

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-7}{2}\right)^2}$$

Wie wahrscheinlich ist es, dass K mehr als zehn Stunden schläft?

**Aufgabe 4.1.14**

Zeigen Sie, dass der folgende Satz:

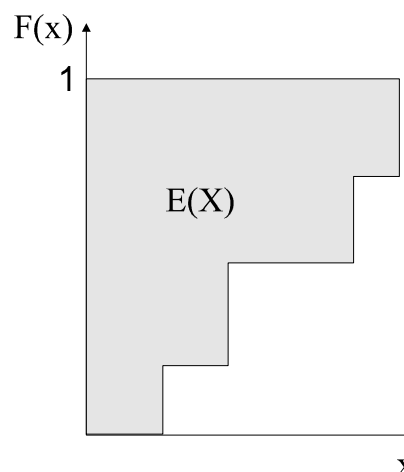
„Der Erwartungswert einer Zufallsvariable ist gleich der Fläche zwischen der Verteilungsfunktion und der Funktion  $F(x) = 1$ “

sowohl im stetigen als auch im diskreten Fall gilt (vgl. als Beispiel Abb. im diskreten Fall), und zwar

a) anhand der Beispiele:

1)  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } x = 1, 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$       diskreter Fall

2)  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$       stetiger Fall



b) allgemein.

**Aufgabe 4.2.1**

Eine Urne beinhalte 4 schwarze und 2 weiße Kugeln und es sei

- beim ersten Zug:  $x=0$  für eine schwarze Kugel,  $x=1$  für eine weiße Kugel
- beim zweiten Zug:  $y=0$  für eine schwarze Kugel,  $y=1$  für eine weiße Kugel

Man bestimme die gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilungen, die bedingten Verteilungen und die Kovarianz, wenn aus dieser Urne zweimal gezogen wird, und zwar ...

- a) ... mit Zurücklegen
- b) ... ohne Zurücklegen.

**Aufgabe 4.2.2**

Die zwei Zufallsvariablen X und Y haben die folgende gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion

	Y=0 (Raucher)	Y=1 (Nichtraucher)
X=0 (Lungenerkrankung)	0,11	0,02
X=1 (keine Lungenerkr.)	0,72	0,15

aus: "Smoking and Health", Wash. D.C., o.J., S.287

- a) Berechnen und interpretieren Sie die beiden Randverteilungen und die bedingten Verteilungen sowie deren Erwartungswerte.
- b) Berechnen Sie die Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten.



**Aufgabe 4.2.3**

Gegeben sei die gemeinsame Dichte

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{21}{8}y^2 & \text{für } 0 \leq x,y \leq 1 \\ 0 & \text{für sonstige} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit  $P(0 \leq x \leq 0,5; 0 \leq y \leq 0,5)$  und die beiden Randverteilungen!

**Aufgabe 4.2.4**

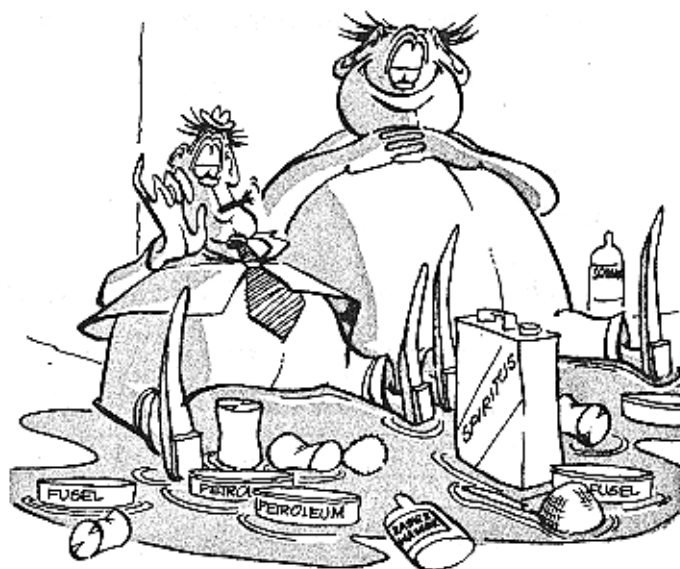
Zwei Penner trinken täglich bestimmte mehr oder weniger zufällig schwankende Mengen  $x_1$  und  $x_2$  von Alkohol der Sorte 1 und 2 mit den (stetigen) Wahrscheinlichkeitsfunktionen  $f(x_1)$  bzw.  $f(x_2)$ . Es seien die Ereignisse

A:  $a_1 \leq x_1 \leq b_1$

B:  $a_2 \leq x_2 \leq b_2$

C:  $c_1 \leq x_1 \leq d_1$

und  $a_1 < c_1 < b_1 < d_1$ .



Drücken Sie mit Hilfe der Dichtefunktionen  $f_1(x_1)$ ,  $f_2(x_2)$  und  $f(x_1, x_2)$  folgende Größen aus:  $P(A)$ ,  $P(C)$ ,  $P(A \cup C)$  sowie die Unabhängigkeit  $P(AB) = P(A)P(B)$ .

**Aufgabe 4.2.5**

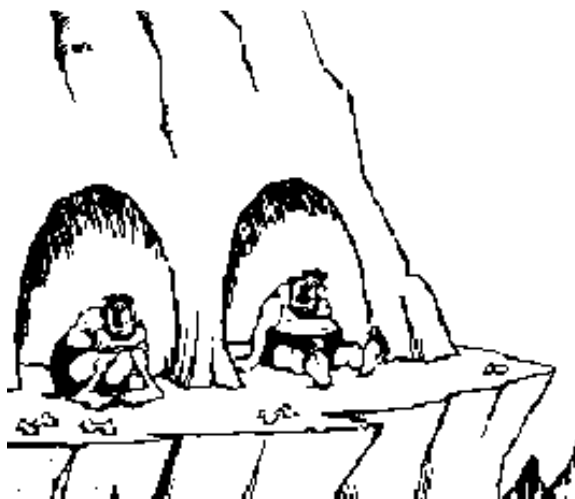
Ein bestimmtes landwirtschaftliches Erzeugnis wird von einer Jury in drei Güteklassen eingeteilt, und zwar sowohl bezüglich seines Gesamteindrucks  $X$  als auch bezüglich des Gehalts  $Y$  an einer gewissen Substanz. Ein Erzeuger rechnet mit folgenden Wahrscheinlichkeiten, dass das von ihm eingereichte Produkt bezüglich der beiden Merkmale  $X$  und  $Y$  in die einzelnen Güteklassen fällt:

	$y=1$	$y=2$	$y=3$
$x=1$	0,05	0,05	0
$x=2$	0,05	0,15	0,1
$x=3$	0	0,15	0,45

- Bestimmen Sie die Randverteilung von  $X$  und  $Y$ .
- Sind der Gesamteindruck  $X$  und der Gehalt  $Y$  stochastisch unabhängig?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das eingereichte Produkt bzgl. des Gesamteindrucks  $X$  und des Gehalts  $Y$  in die Klasse 1 oder 2 fällt?
- Der Erzeuger weiß bereits, dass sein Produkt bezüglich der Substanz in die Klasse 1 gefallen ist. Mit welcher Klasse kann er unter diesem Wissen bezüglich des Gesamteindrucks rechnen?

**Aufgabe 4.2.6**

Der äußerst sensible Diplom-Kaufmann  $K$  aus  $E$  gab seine hoffnungsvolle Managerkarriere auf und unternahm den Versuch, das Leben, sich selbst und die Heranbildung der menschlichen Kultur von Grund auf neu zu erleben. Deshalb quartierte er sich zusammen mit seinem Freund, dem Psychater  $P$ , in eine Höhle ein. Er beobachtete ständig auf einer Skala von 0 bis 100% an sich, wie sich sein Wohlbefinden  $X$  verändert.  $P$  meint für die vorgekommene Zeit von  $Y \leq 2$  Jahre „Aussteigerdasein“ gelte die Dichtfunktion



$$f(xy) = \begin{cases} \frac{3}{2} x^2 y & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \text{ und } 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Man zeige, dass  $f(xy)$  in der Tat eine Dichtfunktion ist.  
Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass  $K$ s Wohlbefinden während des ganzen ersten Jahres ständig über 50% liegt.

- b) Sind die Zufallsvariablen X und Y stochastisch unabhängig?

### Aufgabe 4.3.1

Der Unternehmer U hat die Erfahrung gemacht, dass seine Einnahmen Z (in DM) sehr abhängig sind von der Anzahl der am Betrieb vorbeiziehenden Passanten. Und zwar möge

$$Z = \frac{1}{2} + \frac{1}{50} X$$

gelten, mit  $E(X)=100$  und  $V(X)=900$ . Man bestimme  $E(Z)$  und  $V(Z)$ .

### Aufgabe 4.3.2

Gegeben sei die Zufallsvariable X mit  $E(X)=a$  und  $V(X)=\sigma_x^2=b^2$ . Man berechne Erwartungswert und Varianz der Zufallsvariablen

$$Z = \frac{X - a}{b}.$$

### Aufgabe 4.3.3

Gegeben sei die zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x \ y	0	1	2
1	0,1	0,2	0,3
2	0,2	0	0,2

- Geben Sie die Randverteilungen sowie deren Erwartungswerte und Varianzen an sowie die Kovarianz und die Korrelation!
- Man bestimme für die Zufallsvariablen  $Z_1 = X + Y$  und  $Z_2 = X + 2Y$  die Wahrscheinlichkeitsverteilung sowie Erwartungswert und Varianz!
- Welche Zusammenhänge gelten zwischen den Erwartungswerten und Varianzen von  $Z_1$  und  $Z_2$  einerseits und X und Y andererseits?

### Aufgabe 4.3.4

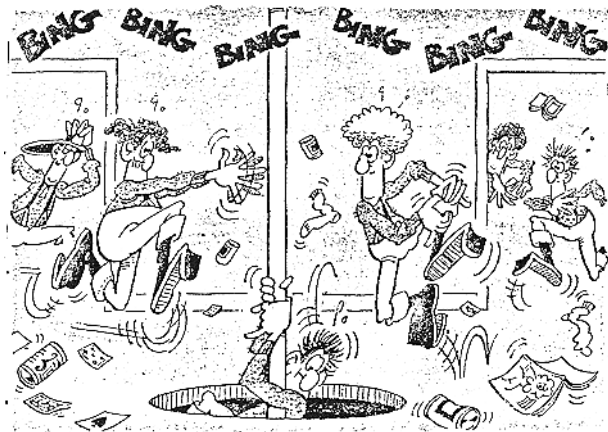
Bekanntlich ist es bei der Brandbekämpfung vorteilhaft, wenn die Feuerwehr möglichst früh am Brandort eintrifft. Dabei treten jedoch zwei Verzögerungen auf, die als Zufallsvariablen zu behandeln sind:

$X_1$ : Zeit zwischen Ausbruch des Brandes und Eingang der Brandmeldung bei der Feuerwehr.

$X_2$ : Zeit zwischen Eingang der Meldung und Eintreffen der Feuerwehr am Brandort.

Die Zeiten  $X_1$  und  $X_2$  seien unabhängig identisch verteilt mit  $E(X) = \mu = E(X_1) = E(X_2) = 25$  und  $V(X) = \sigma^2 = V(X_1) = V(X_2) = 30$ .

Kreuzen Sie bitte an, wie man zutreffend die Varianz der Summe der beiden Zeiten berechnet:  $Z = X_1 + X_2$ .



Es gilt	die Varianz von Z ist also	richtig	falsch
$Z = X + X$	$\sigma_z^2 = 1^2 \sigma_x^2 + 1^2 \sigma_x^2 = 2\sigma_x^2 = 60$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$Z = 2 X$	$\sigma_z^2 = 2^2 \sigma_x^2 = 120$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Begründen Sie ihre Aussage.

**Aufgabe 4.3.5**

X sei die Augenzahl des ersten (grünen) Würfels und Y die Augenzahl des zweiten (gelben) Würfels. Man definiere die Zufallsvariablen

$$Z_1 = X - Y, \quad Z_2 = |X - Y|,$$

$$Z_3 = X + Y, \quad Z_4 = X Y$$

und bestimme jeweils die Wahrscheinlichkeitsverteilung und den Erwartungswert.

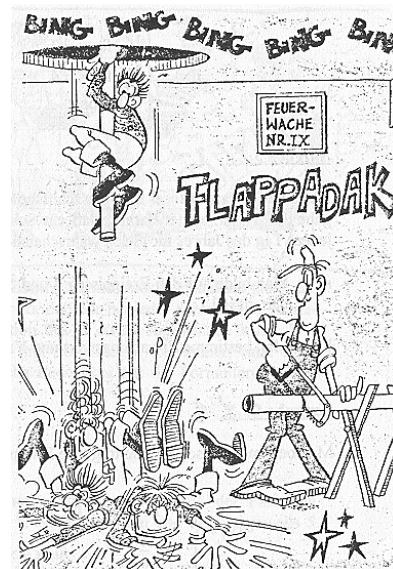
**Aufgabe 4.4.1**

Die folgenden Dichtefunktion hat keinen Parameter

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{für } 0 < x < \infty \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Man zeige, dass für diese Wahrscheinlichkeitsverteilung (es ist der Spezialfall  $\lambda = 1$  der Exponentialverteilung) gilt

$$M_x(t) = (1 - t)^{-2} \quad \text{und} \quad E(X^k) = (k + 1)!$$



## Aufgaben zu Kapitel 5

### Aufgabe 5.1.1

Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der folgenden Zweipunktverteilung

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{für } x = 2 \\ \frac{3}{4} & \text{für } x = 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

### Aufgabe 5.1.2

Auf einer einsamen Insel sitzt der Schiffbrüchige Diplom-Kaufmann K aus E (vgl. Aufgabe 3.4.5). Er wartet darauf, dass ein Schiff in Sichtweite vorbeifährt (S), was K an jedem Tag des Jahres für gleich wahrscheinlich hält [ $P(S) = 1/365$ ].

- Man bilde aus den Ereignissen S und  $\bar{S}$  eine Zufallsvariable X und gebe an, wie X verteilt ist!
- Man bestimme Erwartungswert und Varianz von X!



### Aufgabe 5.1.3

Man bestimme  $x_2$  so, dass die folgende Zweipunktverteilung

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{a} & \text{für } x = x_1 = 0 \\ \frac{1}{a} & \text{für } x = x_2 \end{cases}$$

den Erwartungswert 1 hat. Man bestimme für diese Zweipunktverteilung dann auch die Varianz von X.

### Aufgabe 5.2.1

Wie wahrscheinlich ist es, ein Russisches Roulette (mit einem Trommelrevolver, der 6 Patronen faßt, aber nur mit einer geladen ist) mehr als 5 Runden zu überleben?

**Aufgabe 5.2.2**

Der dipsomane Angestellte D versucht total betrunken sein Auto mit dem passenden Schlüssel zu öffnen. Der Schlüsselbund umfaßt zehn Schlüssel. Wieviele Fehlversuche wird D voraussichtlich unternehmen, um in sein Auto zu gelangen?

**Aufgabe 5.2.3**

Trotz der wegen seines Studiums bei der Verwaltungs- und Wirtschaftsakademie Essen nur spärlich bemessenen Freizeit ist der Bankangestellte B eifrig bemüht, sich körperlich zu ertüchtigen. Es ist ihm dabei nicht unwichtig, Anklang bei der Damenwelt zu finden.



Dabei tritt jedoch das Problem auf, dass der spezifische Charme eines Buchhalters nicht alle Frauen zu überzeugen vermag. Es ist vielmehr so, dass nur bei jeder achten Frau Anzeichen zu verspüren sind, dass sie der Faszination des B etwas abgewinnen kann. Wie wahrscheinlich ist es, dass B bei 5 Versuchen (mit Zurücklegen) bei keiner, einer bzw. höchstens zwei Frauen Anklang findet? Welche Bedeutung hat die Formulierung "mit Zurücklegen" in diesem Zusammenhang?

**Aufgabe 5.2.4**

Bei einer bestimmten Operation starben bisher erfahrungsgemäß 10% der Patienten durch den Eingriff. In der berüchtigten Klinik X wurden im Mai und im Juni jeweils 5 Patienten operiert, wobei

- im Mai keiner
- im Juni nur einer

die Operation überlebte. Mit welcher Wahrscheinlichkeit war mit solchen Vorkommnissen zu rechnen? Der Staatsanwalt will Ermittlungen aufnehmen, wenn solche



Vorfälle nicht mehr "im Rahmen der Wahrscheinlichkeit" sind, also z.B. eine Wahrscheinlichkeit von 5% oder weniger haben. Soll er eine Ermittlung einleiten?

### Aufgabe 5.2.5

Eine binomialverteilte Zufallsvariable  $X$  habe einen Erwartungswert von 2 und eine Varianz von  $4/3$ . Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für  $x=2$ ?

### Aufgabe 5.2.6

Ein Hotel hat 100 Zimmer. Der Besitzer weiß aus Erfahrung, dass 20% der vorbestellten Zimmer nicht belegt werden. Wie viele Bestellungen könnte er entgegennehmen, wenn er mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,95 keinen Gast abweisen möchte?

### Aufgabe 5.2.7

Beim Teil *Wirtschaftsstatistik* der Klausur *Statistik I* werden 24 Multiple-Choice-Fragen gestellt mit jeweils vier Antwortmöglichkeiten, von denen nur eine anzukreuzen ist. Wie wahrscheinlich ist es, bis zu vier Punkten zu erhalten, wenn man nur rät?

### Aufgabe 5.2.8

*Übungsaufgabe zur "Statistischen Mechanik", mit der sich Studenten des Physik-Departments der Technischen Universität München im Sommersemester 1982 beschäftigen mußten:*

Entnommen aus der Fachschaftszeitung (Univ. Essen) "Krisenwirtschaft"

Zwei feindliche Großmächte besitzen jeweils  $N$  Raketen. Die Standorte der feindlichen Raketen sind dem Gegner jeweils bekannt, so dass immer eine Rakete auf eine des Gegners gerichtet ist. Die Trefferwahrscheinlichkeit einer Rakete ist  $\pi$ .

- Einer der Kontrahenten setzt in einem Erstschlag alle seine  $N$  Raketen ein. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit  $\alpha(N, k, \pi)$ , dass genau  $k$  Raketen des Feindes übrigbleiben ( $N = 1000$ ;  $k = 200$ ;  $\pi = 0,9$ )?
- Wie wahrscheinlich ist es dann, dass mindestens eine Rakete übrigbleibt?
- Wieviel Raketen bleiben im Mittel übrig?
- Angenommen, der Angreifer besitzt  $2N$  Raketen, so dass zwei Raketen auf eine des Gegners gerichtet sind. Wieviel Raketen bleiben dem angegriffenen Gegner im Mittel dann noch?

### Aufgabe 5.2.9

Ein Betrieb liefert Glühlampen in Kartons zu je 900 Stück. Es ist bekannt, dass der Betrieb im Mittel 10 % Ausschuß produziert.  $X$  sei die Anzahl der defekten Glühlampen in einem Karton.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich in einem Karton zwischen 70 und 110 defekte Glühlampen befinden?



**Aufgabe 5.2.10**

Nach längerer Beobachtung stellte sich heraus, dass die Sekretärin E im Durchschnitt in jeder Woche (fünf Arbeitstage) zwei Tage wegen Krankheit fehlte. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie an einem beliebigen Arbeitstag fehlt, ist mithin 0,4.

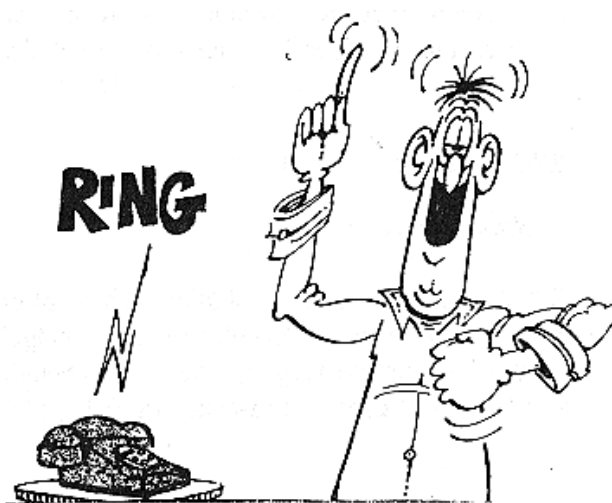
Wie wahrscheinlich ist es dann, dass sie

- eine ganze Woche lang (fünf Tage) an ihrem Arbeitsplatz erscheint und erst dann wieder krank wird?
- höchstens zwei Wochen lang (10 Tage) an ihrem Arbeitsplatz erscheint und erst dann wieder krank wird?
- während einer ganzen Woche nur genau zwei Tage wegen Krankheit fehlt?
- während ihres Urlaubs (20 Tage) überhaupt nicht krank wird (Ansatz genügt)?
- an genau zwei aufeinanderfolgenden Tagen (also Montag/Dienstag, ..., Freitag/Montag,...) fehlt und dann wieder am Arbeitsplatz erscheint?
- an mindestens zwei aufeinanderfolgenden Tagen fehlt?
- innerhalb von sechs Tagen (von Montag bis Montag) an genau zwei aufeinanderfolgenden Tagen fehlt?

**Aufgabe 5.2.11**

Ein Student hofft bei jedem Telefonklingeln, dass seine Freundin ihn anruft. Aus Erfahrung weiß er, dass die Chance jeweils 0,3 beträgt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit

- kommen fünf von den nächsten zehn Anrufen von seiner Freundin?
- sind höchstens vier von den nächsten zehn Anrufen von seiner Freundin?
- kommt in einer Folge von 10 Anrufen der Anruf der Freundin erst ganz am Schluß?
- kommt der Anruf der Freundin frühestens als fünfter und spätestens als zehnter Anruf?

**Aufgabe 5.2.12**

(vgl. Aufgabe 3.4.13: Andrzej und Boguslaw; Aufgabe zur Multinomialverteilung)

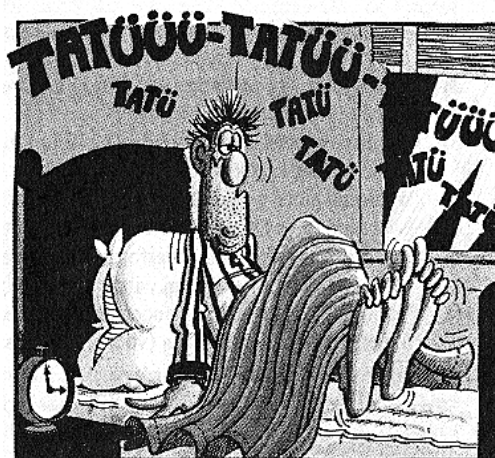
Wegen seiner überlegenen Körpergröße und -stärke besteht eine Wahrscheinlichkeit von  $P(S) = 0,6$ , dass Boguslaw im Kampf gegen Andrzej siegt. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Kampf zwischen beiden unentschieden ausgeht, sei  $P(U) = 0,1$  und die Wahrscheinlichkeit, dass Andrzej siegt, sei  $P(A) = 0,3$ .

lichkeit, dass Boguslaw verliert, sei  $P(V) = 0,3$ . Die drei Wahrscheinlichkeiten seien konstant. Wie wahrscheinlich ist es, dass Andrzej von zehn Kämpfen gegen Boguslaw nur drei siegreich für sich entscheiden kann, zwei unentschieden ausgehen und fünf für ihn verlorengehen?

**Aufgabe 5.2.13**

Was die Länge seines Schlafs betrifft, so ist Diplom-Kaufmann K aus E durchaus als Normalbürger zu bezeichnen. Allerdings plagen ihn hin und wieder Alpträume (Ereignis A) mit einer konstanten Wahrscheinlichkeit  $P(A)=0,2$  je Stunde Schlaf.

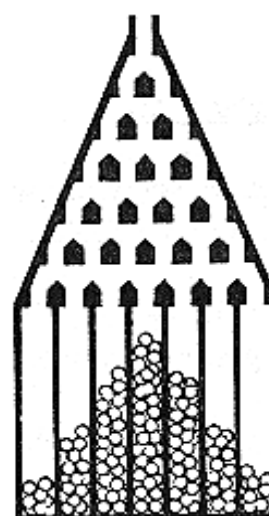
- a) Wie wahrscheinlich ist es, dass K während eines acht-stündigen Schlafs bis zu einen Alptrraum erlebt?
- b) Wie wahrscheinlich ist es, dass er nach sechs Stunden Schlaf, also in der siebten Stunde, erstmals einen Alptrraum hat (Ansatz genügt!)?
- c) Nach wievielen Stunden hat K normalerweise mit seinem ersten Alptrraum zu rechnen? Geben Sie auch die Varianz der Wartezeit an!



**Aufgabe 5.2.14**

(Galtonsches Brett)

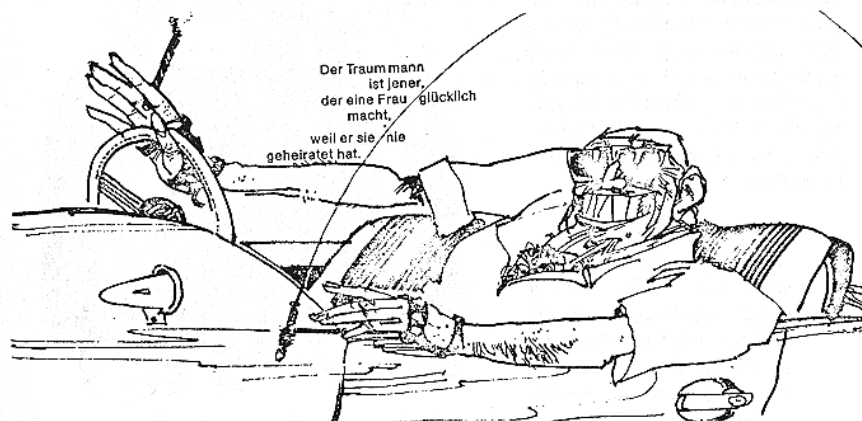
Gegeben sei ein Brett mit  $n$  Nagelreihen. In der ersten Reihe ist ein, in der zweiten sind zwei und in der  $n$ -ten Nagelreihe sind  $n$  Nägel befestigt. Darunter befinden sich ... Auffangbecken für die Kugeln. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kugel in das vom linken Rand des Brettes  $x+1$  -te Becken ( $x=0,1,\dots$ ) fällt beträgt bei  $n$  Reihen allgemein ... . Angenommen, man habe 3 Nagelreihen. Wie wahrscheinlich ist es, dass eine Kugel in das erste ( $x=0$ ) und in das zweite ( $x=1$ ) Auffangbecken (von links) fällt? Wieviele Wege führen über die Nägel, bei denen eine Kugel jeweils nach links oder nach rechts ausweichen kann, in das erste, in das zweite Auffangbecken?



### Aufgabe 5.3.1

Der alternde Playboy Z ist in den letzten Jahren nur 10 Frauen begegnet, bei denen er Anklang gefunden hat. Zwei von ihnen hat er geheiratet. Erfahrungsgemäß ist ihm nur bei jeder fünften Frau ein zufriedenstellendes Zusammenleben möglich.

- a) Wie wahrscheinlich ist es, dass Z beidemale die "falsche" Frau geheiratet hat, wenn er seine Partnerwahl mehr oder weniger dem Zufall überlassen hat?



- b) Ist die Wahrscheinlichkeit halb so groß, wenn Z ceteris paribus 20 statt 10 Frauen begegnet wäre? (vgl. das Lippische Theorem über den Nutzen der Monogamie).

### Aufgabe 5.3.2

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit im Lotto 6 aus 49 jeweils eine, zwei,... richtige Zahlen zu raten?

### Aufgabe 5.3.3

An einem Schwimmwettbewerb nehmen 20 Schwimmer teil. Darunter sind 12 Auszubildende und 8 Schüler.

- a) Wie wahrscheinlich ist es, dass die ersten drei Plätze nur von Auszubildenden eingenommen werden?  
b) Welches Ergebnis ist das Wahrscheinlichste: 1, 2 oder 3 Azubis unter den ersten drei?

### Aufgabe 5.3.4

Die Universität X habe eine Professur zu besetzen und dafür drei Kandidaten vorzuschlagen. Die für diese Stellenbesetzung eingerichtete Kommission von 4 im eigenständigen Denken geübten Herren gerät so sehr in Streit, dass sie sich bei ihrer Auswahl von keinem erkennbaren Prinzip mehr leiten läßt.

- a) Zwei von den 15 Bewerbern sind jedoch für die ausgeschriebene Stelle absolut ungeeignet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass gerade sie in den Besetzungsvorschlag der Kommission mit hineingelangen?
- b) Angenommen, es gäbe eine eindeutige Rangordnung der Bewerber  $B_1 > B_2 > \dots > B_{15}$  ( $>$  i.S.v. besser). Wie wahrscheinlich ist es, dass die Dreierliste dann aus den drei schlechtesten Bewerbern in der Reihenfolge  $B_{15}, B_{14}, B_{13}$  besteht?



### Aufgabe 5.3.5

Eine Multiple-Choice-Klausur bestand aus Aufgaben mit  $N=5$  Antwortmöglichkeiten, wovon  $M=2$  richtig und anzukreuzen waren, wofür es jeweils einen Punkt gab.

- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einer solchen Aufgabe zu 0, 1 oder 2 Punkten zu gelangen, wenn ein Student lediglich rät?
- b) Kann die Wahrscheinlichkeit, durch bloßes Raten die Klausur zu bestehen verringert werden, indem man bei gegebenem  $M$  die Anzahl der Antwortmöglichkeiten  $N$  vergrößert?
- c) Kann man die Anzahl der Antwortmöglichkeiten und die Anzahl der richtigen Antworten so wählen, dass der Erwartungswert der richtig angekreuzten Antworten Null ist, d.h. dass der Student, der nur rät, im Mittel Null Punkte bekommen wird (Begründung)?
- d) Kann man die Anzahl der Antwortmöglichkeiten und die Anzahl der Antworten so wählen (vorgeben), dass es wahrscheinlicher ist, durch Raten Null Punkte zu bekommen als einen Punkt zu erreichen?
- e) Wie lautet die Bedingung für die Anzahl  $N$  der vorgegebenen Antworten und die Anzahl  $M$  der richtigen Antworten (und damit auch für die Anzahl der anzukreuzenden Antworten)? Es sei natürlich unterstellt, dass genauso viele Antworten anzukreuzen sind, wie richtige Antworten vorgegeben sind.

### Aufgabe 5.3.6

Einem Modell von Ernst Heuß ("Markttheorie", S.246f.) zufolge sei die Wahrscheinlichkeit des Auftretens "initiativer" Unternehmer 0,1 und das Auftreten "konservativer" Unternehmer 0,9. Heuß überlegt sodann, wie wahrscheinlich es ist, auf dem Markt ein Kartell vorzufinden, in welchem die Mehrheit der Unternehmer initiativ ist.

Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Kartell von 4 Unternehmern die Mehrheit (2 oder mehr) initiativ sind, ist nach Heuß 0,0523. Dabei rechnet Heuß - ohne dies zu merken - nach dem Ansatz der Binomialverteilung.

- a) Wäre es sinnvoller, mit dem Ansatz der hypergeometrischen Verteilung zu rechnen? (Begründung!)
- b) Wie ändert sich die Wahrscheinlichkeit von 0,0523, wenn man annimmt, dass in dem betreffenden Wirtschaftszweig
  - nur 10
  - nur 20
 Unternehmer tätig sind und für eine Kartellbildung in Frage kämen?
- c) Wie groß müßte der Markt sein, wenn man mit der hypergeometrischen Verteilung zu ähnlichen Ergebnissen wie Heuß gelangen will (Wahrscheinlichkeit: 0,0523)?

**Aufgabe 5.3.7**

Diplom-Kaufmann K aus E ist ein begeisterter Angler. Ihm wird ein Fischteich zur Pacht angeboten und er möchte gerne wissen, wieviele Fische in dem Teich sind. Er kann natürlich nicht einfach den ganzen Teich leerfischen. Deshalb verfährt er, wie ihm ein Statistiker geraten hatte:

Er fischt zunächst (zufällig) 20 Fische, markiert diese mit wasserfester, umweltfreundlicher und für die Fische unschädlicher Farbe und wirft sie zurück in den Teich. Nach ein paar Tagen (nachdem sich die Fische gut durchmischt haben) angelt er erneut 20 Fische, von denen  $x = 4$  markiert waren.

- a) Wie ist  $X$  verteilt?
- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit  $P(x=4) = f(4)$ , wenn sich im Teich 80 Fische befinden?
- c) Angenommen, der Teich enthalte tatsächlich 80 Fische. Ist es unter diesen Voraussetzungen wahrscheinlicher oder weniger wahrscheinlich  $x = 5$  statt  $x = 4$  markierte Fische bei einem Fang von 20 Fischen zu "ziehen" (man zeige dies!)?
- d) Es ist klar, dass es auch "Zufall" sein kann, dass Diplom-Kaufmann K aus E genau vier Fische gefischt hat, die markiert waren. Angenommen, der Teich enthalte 80



Fische und 20 seien markiert. Wie wahrscheinlich ist es dann, dass K in einer Stichprobe von  $n = 20$  zwischen zwei und sechs markierte Fische vorfindet?

- e) Wieviel Fische muß der Teich mindestens enthalten, damit das obige Stichprobenergebnis überhaupt möglich ist und wieviel wird er enthalten, wenn das Ergebnis das wahrscheinlichste ist (Maximum-Likelihood-Prinzip [ML])?

### Aufgabe 5.3.8

- a) Nehmen Sie zu den folgenden Aussagen Stellung:
1. Sehr viele Menschen sind geneigt, beim Lottospiel die Zahlenfolge 1, 2, 3, 4, 5, 6 oder 14, 15, 16, 17, 18, 19 für weniger wahrscheinlich zu halten als irgendeine andere beliebige Zahlenkombination.
  2. Es gibt Leute, die glauben, dass es beim Lotto weniger wahrscheinlich ist, dass eine 17 gezogen wird als etwa eine 23, wenn die 17 bereits 438mal, die 23 aber erst 211mal gezogen wurde.
- b) Man beachte auch folgendes Problem: die Roulette-Kugel ist 10mal nacheinander auf rot gefallen. Wie wahrscheinlich ist es, dass sie beim 11ten Wurf
- auf rot
  - auf schwarz fällt?
- c) Wie wahrscheinlich ist eine Serie von 10mal rot im Vergleich zu fünfmal rot und fünfmal schwarz (etwa R, S, R, R, S, S, R, S, S, R)?

### Aufgabe 5.4.1

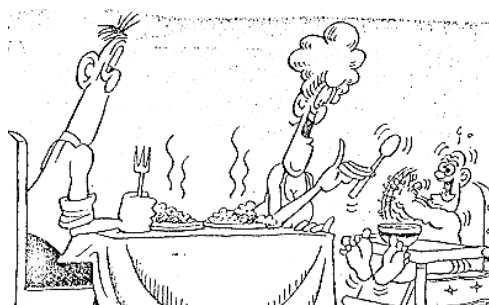
Im Büro des wegen seiner ebenso unkonventionellen wie erfolglosen Arbeitsweise bekannten Privatdetektivs D wurde in den letzten 175 Tagen (25 Wochen) nur einmal angerufen. Deshalb ist anzunehmen, dass die Anzahl  $x$  der pro Woche eintreffenden Anrufe poissonverteilt ist mit  $\lambda = 0,04$ .

Man berechne die Wahrscheinlichkeit für

- a) keinen
- b) einen



Anruf in einer Woche, und zwar nach dem Ansatz der Binomialverteilung und der Poissonverteilung.



**Aufgabe 5.4.2**

Die Krankheit Pankreasfibrose (P) tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,025 vH auf. Wie wahrscheinlich ist es dann, dass unter den 12000 Studenten einer Universität mehr als 5 Erkrankungen an P vorkommen?

**Aufgabe 5.4.3**

Während des zweiten Weltkrieges wurden auf Süd-London insgesamt 537 Bomben abgeworfen. Das Gebiet wurde in 576 homogene Flächen von jeweils ¼ qkm aufgeteilt. Dabei ergab sich folgende Verteilung (zitiert nach *W. Feller, An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, S. 161):

x	Anzahl der Gebiete mit x Bombenabwürfen	
	empirisch	theoretisch
0	229	
1	211	
2	93	
3	35	
4	7	
5 u. mehr	1	

Bestimmen Sie die Anzahl der (theoretisch) zu erwartenden Bombenabwürfe je Gebiet, wenn x poissonverteilt ist mit  $\lambda = 537/576 = 0,9329$  (es ist  $e^{-0,9329} = 0,39365$ )!

**Aufgabe 5.4.4**

Die Frühehe zwischen A und B wurde geschieden. Im Verlauf der folgenden n=40 Jahre begegnen sich A und B jedoch häufiger wieder, wobei allerdings die Wahrscheinlichkeit evtl. wieder zu heiraten in jedem Jahr nur 1/200 beträgt. Wie groß ist dann (bei Unabhängigkeit) die Wahrscheinlichkeit, dass A und B

- nicht wieder heiraten (x=0)
- noch einmal heiraten (x=1)?

**Aufgabe 5.4.5**

Die Eheleute A und B haben sich scheiden lassen. Sie stellen jedoch fest, dass Sie weiterhin Sympathien für einander empfinden, die zudem durch mißliche andere Eindrücke und die schönen Erinnerungen an die gemeinsame Zeit wieder langsam zunehmen. Infolgedessen nimmt die Wahrscheinlichkeit, es nicht noch einmal miteinander zu versu-

chen, ständig ab. Sie ist nach 5 Jahren nur noch  $e^{-5c} = 0,9753$  ( $c$  ist eine Konstante und zwar 0,005) und nach 10 Jahren  $e^{-10c} = 0,9512$ .

Wie wahrscheinlich ist es, dass A und B im Verlaufe von 40 Jahren nach ihrer Scheidung nicht noch einmal heiraten?

**Aufgabe 5.4.6**

Eine Urne enthält  $n-1$  weiße und eine schwarze Kugel.

- a) Wie wahrscheinlich ist es, bei  $n$  Zügen mit Zurücklegen genau  $n$  weiße Kugeln zu ziehen?
- b) Wie groß kann die unter a) gefragte Wahrscheinlichkeit bei großem  $n$  maximal werden? Kann sie gegen 1 streben?
- c) Wie wahrscheinlich ist es, bei  $n$  Zügen mit Zurücklegen  $n$  weiße Kugeln zu ziehen, wenn die Grundgesamtheit aus  $k$  schwarzen und  $n-k$  weißen Kugeln besteht?

**Aufgabe 5.4.7**

L. v. Bortkiewicz untersuchte in einem Zeitraum von 20 Jahren (1875-1894), wieviele Soldaten in 14 Kavallerieregimentern der preußischen Armee durch Hufschlag (bzw. den Folgen hiervon) gestorben sind. Nachdem 4 untypische Regimenter ausgeschlossen wurden, ergaben sich folgende Daten für die verbliebenen 10 Regimenter:

$n = 200$  Beobachtungen ( $10 \times 20$ ),  $n_i =$  Anzahl der Fälle (bezogen auf 10 Regimenter, in denen  $x_i$  Soldaten in einem Jahr gestorben sind)

$x_i$	0	1	2	3	4	$\bar{x}$
$n_i$	109	65	22	3	1	0,61

Lassen sich die Daten durch eine Poissonverteilung mit  $\lambda = 0,61$  beschreiben?

**Aufgabe 5.4.8**

US-amerikanische Statistiker (L.F. Richardson und O. Wright in ihrem Buch Statistics of Deadly Quarrels, zitiert nach H. Bartel, Statistik II, UTB Bd. 30, Stuttgart 1972, S.50) haben herausgefunden, dass es in den 432 Jahren von 1500 bis 1931 auf der Welt 299 Kriege gab. Von den 432 Jahren gab es 223 Jahre, in denen kein Krieg ausbrach, 142 Jahre, in denen ein Krieg ausbrach, usw.

$x_i$	0	1	2	3	4	> 4	$\Sigma$
$n_i$	223	142	48	15	4	0	432
$x_i n_i$	0	142	96	45	16	0	299

Der Mittelwert beträgt  $\bar{x} = 299/432 \approx 0,7$ . Weisen die Daten auf eine Poissonverteilung mit  $\lambda = 0,7$  hin ?



**Aufgabe 5.4.9**

Der polnische Statistiker W. Volk untersuchte die Neubesetzung von Richterstellen am obersten Bundesgericht der USA über 168 Jahre. Insgesamt wurden 93 Richter (im Mittel also  $\bar{x} = 93/168 = 0,5536$  Richter pro Jahr) ernannt.

$x_i$	$n_i$	$x_i n_i$
0	100	0
1	50	50
2	14	28
3	3	9
4	0	0
5	0	0
6	1	6
7	0	0
$\Sigma$	168	93

Es gab 100 der 168 Jahre, in denen kein Richter ernannt wurde ....(Angaben zitiert nach A. Luszczewicz, Statystyka ogólna (Allgemeine Statistik), Warschau 1977, S.72 ff.)

Zeigen Sie, dass sich die gefundene Häufigkeitsverteilung gut durch eine Poissonverteilung mit  $\lambda = 0,5535$  anpassen läßt.



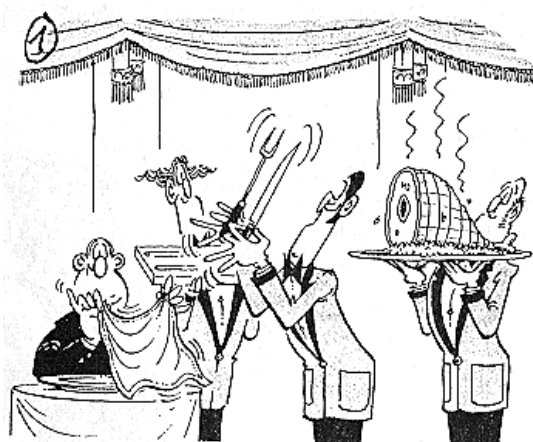
**Aufgabe 5.4.10**

Wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einem Flugzeug  $x = 2$  Terroristen mit zwei Bomben sitzen nur ein Zehntel der Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass  $x = 1$  Terrorist mit einer Bombe im Flugzeug sitzt, dann ist  $X$  poissonverteilt mit  $\lambda = \dots$  ?  
 Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit für drei Terroristen?

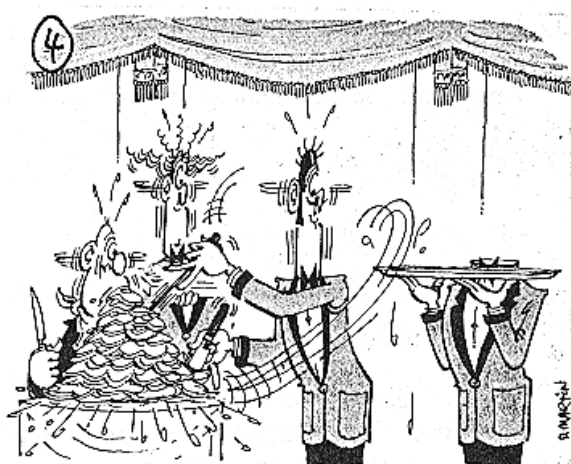
## Aufgaben zu Kapitel 6

### Aufgabe 6.1.1

Ein Oberkellner möge eine größere Menge Fleisch so in Scheiben zerteilen, dass das Gewicht  $x$  (in Gramm) pro Scheibe im Bereich von 0 bis  $2c$  Gramm symmetrisch dreiecksverteilt ist um den Erwartungswert  $E(X) = c$ .



- Man bestimme die Dichtefunktion!
- Man bestimme das mittlere Gewicht pro Scheibe  $c$ , wenn die Varianz  $\sigma^2 = 13,5 \text{ g}^2$  sei!
- Wie wahrscheinlich ist es, dass der Gast eine Scheibe mit mehr als 12 Gramm Gewicht erhält?



**Aufgabe 6.2.1**

Bei einem unbedingten Reflex, etwa dem Patellarsehnen-Reflex, tritt im Durchschnitt nach 0,04 Sekunden eine Reaktion auf. Angenommen, die Reaktionszeit sei normalverteilt mit  $\mu=0,04$  und  $\sigma=0,6$ , wie wahrscheinlich ist es dann, dass eine Reaktion erst nach 1 Sekunde oder später auftritt?

**Aufgabe 6.2.2**

Der Student S war von den Olympischen Spielen in Atlanta derart begeistert, dass er unbedingt als 100m-Läufer nach Sydney fahren will. Daher hat er "Rauchen und Saufen" aufgegeben und verbringt seine Tage auf der Aschenbahn. Seine Leistung X schätzt er wie folgt ein: normalverteilt mit  $\mu = 10,4$  Sekunden und  $\sigma = 0,2$  Sekunden!

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass S

- zwischen 10,2 und 10,6 läuft?
- nicht unter 10,8 läuft?
- schneller als 10,1 läuft?

**Aufgabe 6.2.3**

Die Zufallsgröße X sei binomialverteilt mit  $n = 3$  und  $\pi = 0,25$ . Berechnen Sie nach dem Ansatz der Binomialverteilung und durch Approximation der Binomial- durch die Normalverteilung

- $P(x \leq 2)$ !
- $P(1 \leq x \leq 2)$ !

**Aufgabe 6.2.4**

Der Intelligenzquotient sei normalverteilt mit Mittelwert 100 und zwar so, dass nur 5 vH über einen Intelligenzquotienten von über 140 verfügen. Wieviel Prozent haben einen Intelligenzquotienten unter 80 bzw. zwischen 90 und 110?

**Aufgabe 6.2.5**

Man bestimme die in Aufgabe 5.2.9 gesuchte Wahrscheinlichkeit durch Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung.

**Aufgabe 6.2.6**

Es sei bekannt, dass der Verbrauch an Alkoholika im Durchschnitt 25 Liter pro Kopf und Jahr mit einer Standardabweichung von  $\sigma = 10$  Litern beträgt. Der Alkoholkonsum sei normalverteilt.

- Wie wahrscheinlich ist es, eine Person vorzufinden, deren Alkoholverbrauch über 45 Liter liegt?
- (Vorgriff auf Kap. 7)  
Wie wahrscheinlich wäre ein entsprechendes Ergebnis dann höchstens, wenn nicht bekannt wäre, ob der Alkoholkonsum  $X$  normalverteilt ist, sondern über die Verteilung von  $X$  nichts bekannt wäre?

**Aufgabe 6.2.7**

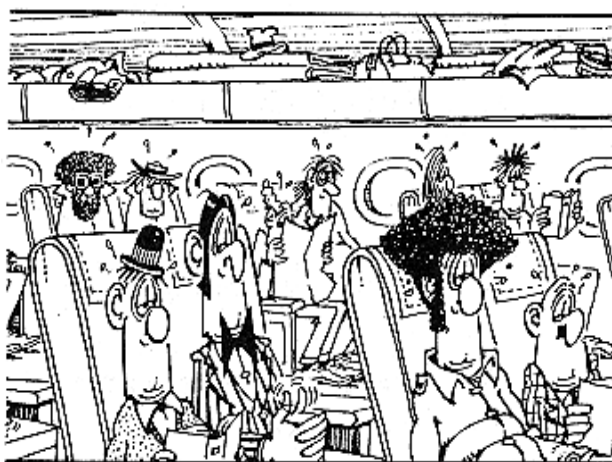
Der Tankinhalt eines PKW der Marke "Popel Turbo" betrage 45 Liter. Die Kilometerreichweite des Popel sei bei einem Durchschnittsverbrauch von 9 Litern pro 100 km normalverteilt mit  $\sigma = 20$  km. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, mit einer Tankfüllung .

- mehr als 530 km weit fahren zu können;
- eine Reichweite zw. 484 und 516 km zu erreichen.

**Aufgabe 6.2.8** (vgl. Aufg. 5.2.6)

Erfahrungsgemäß erscheinen 2,5% aller Fluggäste, die Plätze reservieren, nicht beim Abflug. Die Fluggesellschaft weiß das und verkauft deshalb 200 Tickets für 197 verfügbare Plätze. Man berechne die Wahrscheinlichkeit, dass alle Fluggäste Platz bekommen

- exakt
- mit Hilfe einer geeigneten Näherung (welche ist besser: Poissonverteilung oder Normalverteilung ?) !



**Aufgabe 6.2.9**

Ist  $X$  normalverteilt mit  $E(X)=\mu$  und  $V(X)=\sigma^2$ , so ist  $Z=(X-\mu)/\sigma$  bekanntlich standard-normalverteilt mit  $E(Z)=0$  und  $V(Z)=1$ . Durch diesen Trick kann man es vermeiden, für jedes  $\mu$  und  $\sigma$  eine eigene Normalverteilungstabelle aufzustellen. Es reicht die Tabelle für die Standardnormalverteilung. Warum kann man so nicht einfach auch bei anderen Verteilungen verfahren, etwa bei der Poissonverteilung?

**Aufgabe 6.2.10**

Die Unterschiedlichkeit  $X_1 - X_2$  der Laufgeschwindigkeit in m/sec zweier Personengesamtheiten ist eine Zufallsvariable, die u.a. bei der Wahrung der öffentlichen Sicherheit und Ordnung eine gewisse Rolle spielt. Angenommen

$$X_1 \sim N(5, 16)$$

$$X_2 \sim N(6, \sigma_2^2)$$

seien zwei unabhängige Zufallsvariablen. Wenn  $x_1 \geq x_2$  ist, ist offensichtlich nicht damit zu rechnen, dass eine Person der verfolgenden Gruppe 2 eine solche der ersten einholt, selbst dann nicht, wenn deren Vorsprung gering ist (Ereignis  $\bar{R}$ : der Rechtsstaat kann sich nicht durchsetzen).



- Wie ist  $X_1 - X_2$  verteilt?
- Angenommen  $\sigma_2^2 = 20$ , wie groß ist dann  $P(R)$  ?
- Wie wirkt sich eine (gegenüber Teil b) Vergrößerung der Varianz auf  $P(R)$  aus?
- Entarteter Fall: angenommen:  $\sigma_2^2 = 0$ . Wie ist dann  $X_1 - X_2$  verteilt? Ist  $R$  dann ein sicheres Ereignis?
- Kann man generell sagen, dass  $P(R) < 0,5$  wenn  $\mu_2 < \mu_1$ ?

## Aufgaben zu Kapitel 7

### Aufgabe 7.1.1

Einer alten Volksweisheit zufolge regnet es im Gebiet Y - wenn überhaupt - in der Regel 5 Tage lang.

Wie wahrscheinlich ist es höchstens, dass die Regendauer von dieser Volksweisheit um 2,4 Tage und mehr abweicht? Dabei sei  $E(X - c)^2 = 2,4$ .

Man verifiziere die Tschebyscheffsche Ungleichung, indem man von folgender Verteilung der Regendauer  $x_i$  ausgeht:



$x_i$	2	3	4	5	6	7
$p_i$	0,1	0,1	0,1	0,3	0,2	0,2

### Aufgabe 7.1.2

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit einer absolut genommenen Abweichung der Zufallsvariable X um ihren Mittelwert in Höhe von nicht weniger als 1,5 Standardabweichungen

- a) nach der Tschebyscheffschen Ungleichung?
- b) wenn X normalverteilt ist?
- c) wenn X gleichverteilt ist im Intervall  $0 \leq x \leq 1$ ?
- d) bei einer Zweipunktverteilung mit  $\pi = 1 - \pi = 1/2$ ?



### Aufgabe 7.1.3

Kann man aus dem "Gesetz der Großen Zahlen" ableiten, dass der Anteil der Fehlentscheidungen eines Gremiums immer geringer wird, je mehr Personen in diesem Gremium sitzen? (Nach dem Motto: "Je mehr Köche, desto besser der Brei"?)

### Aufgabe 7.1.4

- a) Wie groß muß die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zufallsvariable X, für die  $E(X^2) = 1$  gilt, einen Wert annimmt, dessen Betrag nicht größer ist als  $\varepsilon = \pm 2$ , mindestens sein?

- b) Wie wahrscheinlich wäre ein entsprechender Wertebereich für  $x$ , wenn  $X$  normalverteilt wäre mit dem Mittelwert 0?

**Aufgabe 7.1.5**

Astronomen mögen berechnet haben, dass die Verteilung der Sterne in einer Million Kubiklichtjahren etwa folgende Werte aufweist

$$\mu_x = \sigma_x = 2/3,$$

wobei  $X$  die Masse der Sterne ist, berechnet als Vielfaches der Sonnenmasse.

- a) Für Raumfahrer in ferner Zukunft mag es von Interesse sein zu wissen, mit welcher mittleren Größe der Sterne sie bei einer Expedition zu rechnen haben. Eine solche Expedition möge  $n=100$  Sterne besuchen. Wie wahrscheinlich ist es dann, dass man Sterne antrifft, die im Mittel eine Masse zwischen  $2/3$  und  $4/3$  Sonnenmassen haben?  
 Man schätze also  $P( 2/3 \leq \bar{x} \leq 4/3 )$  und zwar nach dem Grenzwertsatz von Lindeberg-Levy und der Tschebyscheffschen Ungleichung.
- b) Mit einer konstanten Wahrscheinlichkeit von  $\pi=1/50=0,02$  pro Jahr tritt eine Supernova auf. Allerdings hat man in den letzten 408 Jahren nur zwei Supernovae beobachten können, so dass die relative Häufigkeit  $h=2/408=0,005$  beträgt. Dieser Sachverhalt steht im Widerspruch zu dem Gesetz der Großen Zahl:

1	<b>ja</b> , denn bei einem großen $n$ (hier $n=408$ ) muß $h \approx \pi$ sein.
2	<b>nein</b> , denn das Gesetz besagt nur, dass die Abweichung $ h-\pi $ immer kleiner werden muß.
3	<b>ja</b> , denn je mehr Jahre ohne Supernova vergehen, desto größer wird die Abweichung $h-\pi$ , und das dürfte nach dem Gesetz der Großen Zahl nicht sein.
4	<b>nein</b> , denn das Gesetz der Großen Zahl ist hier überhaupt nicht anwendbar, weil die Voraussetzungen nicht gegeben sind.
5	<b>ja</b> , denn die Wahrscheinlichkeit $P(  h-\pi  \geq 0,015 )$ wird wegen $\sigma^2=n\pi(1-\pi)$ immer größer.
6	<b>nein</b> , denn die Wahrscheinlichkeit $P(  h-\pi  \geq 0,015 )$ wird immer kleiner.

**Aufgabe 7.1.6**

Trotz neuerer praxisrelevanter wissenschaftlicher Erkenntnisse konnte Prinzessin Rana von Esculenta (E) nicht umhin, an die Existenz eines Froschkönigs zu glauben. Sie war jedoch gleichwohl rationalem Denken insofern aufgeschlossen, als sie bestrebt war, ihre Kußaktivität so lange einzustellen, bis der Froschbestand in Esculenta ausreichend statistisch untersucht war. Sie beauftragte den Hofnarren H zu einer entsprechenden empirischen Untersuchung. Dabei ging H von einer Zufallsauswahl von  $n = 9$  der unzähligen

Teiche von Esculenta aus und stellte eine mittlere Anzahl von  $\bar{x} = 90$  Fröschen je Teich fest, mit

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2 = 225,$$

so dass  $\hat{\sigma} = 15$  war.



- a) 1. Über die Gestalt der Verteilung der Anzahl  $X$  der Frösche je Teich in der Grundgesamtheit der Teiche von Esculenta kann  $H$  jedoch nichts aussagen, d.h. es ist nicht bekannt, ob es z.B. gleich viele Teiche mit einem unterdurchschnittlichen (weniger als 90) wie mit einem überdurchschnittlichen Froschbestand (über 90) gibt. Kann man gleichwohl feststellen, wie wahrscheinlich es mindestens ist, dass in einem Teich zwischen 45 und 135 Frösche sind, wenn  $\mu = 90$  und  $\sigma^2 = 225$  gilt?
  2. Wie groß ist die genaue Wahrscheinlichkeit  $P(45 \leq x \leq 135)$ , wenn  $X$  normalverteilt ist mit  $\mu = 90$  und  $\sigma = 15$ ?
- b) 1. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit  $P(80 \leq \bar{x} \leq 100)$  bei  $n = 9$ ?
  2. Was kann man über die Wahrscheinlichkeit aussagen, wenn nicht berücksichtigt wird, dass  $\bar{X}$  normalverteilt ist?

**Aufgabe 7.1.7**

(das Alien-Problem)

Diplom-Kaufmann  $K$  aus  $E$  erlebte im Kino die Schreckensvision, dass sich ein in der Nähe von Tau-Ceti gefundenes Kleintier im Raumschiff in ein menschenfressendes Ungeheuer verwandelte (Ereignis  $V$ ).

- a) Welche Voraussetzungen müßten hinsichtlich der Grundgesamtheit und der Stichprobenziehung erfüllt sein, um auf das Ereignis  $V$  das Gesetz der großen Zahl anwenden zu können? Wie groß müßte der Stichprobenumfang  $n$  sein, damit bei völlig unbekanntem  $\pi = P(V)$  und der relativen Häufigkeit  $p = X/n$  nach der Tschebyscheffschen Ungleichung mit  $\epsilon = 0,01$  folgendes gilt:

$$P(|p - \pi| < \epsilon) \geq 1 - \frac{\pi(1 - \pi)}{n\epsilon^2} = 0,95 .$$

Wie groß wäre  $n$ , wenn anzunehmen ist, dass  $\pi = 0,1$  ist und die Wahrscheinlichkeit auch wieder mindestens 95% sein soll?



- b) Angenommen, das fragliche Ereignis V (Verwandlung) trete bei einem Raumflug auf oder nicht auf, wobei die Wahrscheinlichkeit des Auftretens  $\pi = P(V)$  ziemlich gering sein mag. Wieviele Raumflüge in das entlegene Sonnensystem von Tau-Ceti wären wohl nötig, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% sagen zu können, dass damit zu rechnen ist, dass z.B. zwischen 1% und 3% Raumfahrten von einem solch schrecklichen Ereignis getrübt sein werden? Wenn man die Anzahl der erforderlichen Raumflüge als Stichprobenumfang n begreift: Welche Möglichkeit gibt es, abzuschätzen, wie groß n sein sollte, damit eine solche Aussage gemacht werden kann (mit [mindestens] 95% Wahrscheinlichkeit liegt die relative Häufigkeit im Bereich von  $\pi \pm \epsilon$ ).

**Aufgabe 7.1.8**

(die aristotelische Frauentheorie)  
vgl. auch Aufgabe 9.2.4

Der griechische Philosoph Aristoteles (384-322 v.Chr.) lehrte, dass eine Frau nur ein mißratener Mann sei. Sie werde unter "widrigen Umständen", "bei feuchtem Südwind" gezeugt. Der Statistiker S begab sich in das feuchte Sumpfgebiet des Amazonas zu den Kopfjägern (wo sehr häufig ein feuchter Südwind weht) um die aristotelische Frauentheorie empirisch zu überprüfen.



- a) Angenommen, es sei über den Anteil der Mädchengeburt unter widrigen Witterungsbedingungen nichts bekannt. Wie kann man aber gleichwohl eine Abschätzung der Wahrscheinlichkeit dafür abgeben, dass der Stichprobenanteil in einer Epsilon-Umgebung von  $\pm 0,1$  um den wahren Wert liegt, wenn der Stichprobenumfang  $n=100$  ist?
- b) Das (schwache) Gesetz der großen Zahl besagt in Verbindung mit dem Beispiel (Richtiges ankreuzen), dass:

1	die Frauentheorie von Aristoteles richtig ist
2	die Frauentheorie von Aristoteles um so richtiger wird, je größer der Stichprobenumfang ist
3	immer mehr Mädchen gezeugt werden, wenn immer häufiger ein feuchter Südwind weht
4	die relative Häufigkeit der Mädchengeburt (in der Stichprobe) gegen die wahre Wahrscheinlichkeit strebt
5	die relative Häufigkeit der Mädchengeburt von der wahren Wahrscheinlichkeit um höchstens den Wert von Epsilon abweicht

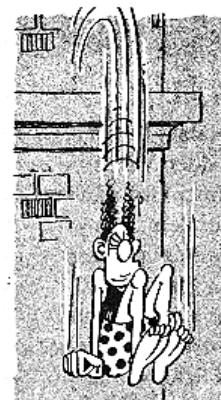
6	die relative Häufigkeit der Mädchengeburten mit größerem Stichprobenumfang immer näher an den Zahlenwert für die wahre Wahrscheinlichkeit herankommt
7	die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die relative Häufigkeit der Mädchengeburten von der wahren Wahrscheinlichkeit um höchstens den Wert von Epsilon abweicht, gegen 1 strebt.

**Aufgabe 7.1.9**

Der Jurist J übernahm, obgleich kein Fachmann, die Leitung der öffentlichen Feuerwehr. Ihm fiel auf, dass es seinen Mitarbeitern leider in zwei von zehn Fällen nicht gelang, den Mittelpunkt c des Sprungtuchs so zu halten, dass die Opfer eines Brandes an der zufälligen Stelle X landeten, die innerhalb einer "ε-Umgebung" von c liegt [ $\mu=c=E(X)$ ]. Weil er nicht weiß, ob dies häufig oder selten ist, fragt er einen Statistiker, wie dies vom Standpunkt des Zufalls aus zu würdigen sei.



- a) Der Statistiker denkt zunächst an die Tschebyscheffsche Ungleichung, nimmt an, dass  $Y=X-c$  mit  $E(Y)=0$  verteilt sei, und dass dann aber  $\sigma_y^2 < \epsilon^2$  sein müsse. Warum?
- b) Sodann nimmt er  $\sigma_y^2 < 1/3 \epsilon^2$  an und bestimmt  $P\{|X-c| \geq \epsilon\}$  mit der Tschebyscheffschen Ungleichung. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit?
- c) Wie lautet die Dichtefunktion  $f(x)$ , wenn X symmetrisch gleichverteilt ist um c mit  $\sigma_y^2 < 1/3 \epsilon^2$  ?



**Aufgabe 7.1.10**

Für eine Folge von Zweipunktverteilungen gelte

$$f_n(x) = \begin{cases} \pi_n = \frac{2}{5} + (-1)^n \frac{1}{8} - \frac{1}{4n^2} & \text{für } x=0 \text{ (Erfolg)} \\ 1 - \pi_n & \text{für } x=1 \text{ (Mißerfolg)} \end{cases}$$

Existiert eine Grenzverteilung  $f(x) = \lim f_n(x)$ , wenn ja: Wie lautet sie?

**Aufgabe 7.1.11**

- a) Man zeige, dass für eine nichtnegative Zufallsvariable X gilt:

$$P(X \geq c) \leq \frac{E(X)}{c} \quad (\text{Ungleichung von Markoff})$$

bei beliebiger reeller positiver Konstante  $c$ .

Man kann diesen Zusammenhang auch demonstrieren anhand der diskreten Verteilung

x	0	1	2	3	4	5
P(x)	0,3	0,2	0,2	0,15	0,1	0,05

mit  $E(X)=1,7$  und  $c=3$ .

- b) Wie hängen die Ungleichung von Markoff und die Ungleichung von Tschebyscheff zusammen?

**Aufgabe 7.1.12**

- a) Eine Münze werde wiederholt geworfen und es soll berechnet werden, wie groß die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass die relative Häufigkeit ( $p=X/n$ ) der Wapenwürfe zwischen 0,25 und 0,75 (einschließlich) liegt, wenn  $n = 2, 4, 8$  mal geworfen wird (echte Münze:  $\pi = 0,5$ ).
- b) Die analoge Betrachtung ist durchzuführen für  $n = 2, 3, 4, \dots$  Würfe, wenn die Münze nicht "echt" sein sollte ( $\pi = 0,6$ ).

**Aufgabe 7.2.1.**

Eine Grundgesamtheit bestehe aus den Elementen  $A=5, B=10, C=12, D=13$ . Man bestimme die Stichprobenverteilung von  $\bar{x}$  für Stichproben ohne Zurücklegen vom Umfang  $n=1, n=2, n=3$  und  $n=4$ .

**Aufgabe 7.2.2**

In einer Grundgesamtheit sei die Variable  $X$  zweipunktverteilt

$$f(x) = \begin{cases} \pi & \text{für } x = 1 \\ 1 - \pi & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wie ist der Mittelwert  $\bar{X}$  bei Stichproben (mit bzw. ohne Zurücklegen) vom Umfang  $n=2,3,\dots$  verteilt?



**Aufgabe 7.2.3**

Die Grundgesamtheit bestehe aus 5 Elementen mit den Merkmalswerten  $x=2, x=2, x=3, x=4, x=1$ . Bestimmen Sie die Verteilung des Stichprobenmittels, wenn Stichproben ohne Zurücklegen vom Umfang  $n=2, n=3$  und  $n=4$  gezogen werden. Wie sind die Extremfälle  $n=1$  und  $n=5$  zu interpretieren?

**Aufgabe 7.2.4.**

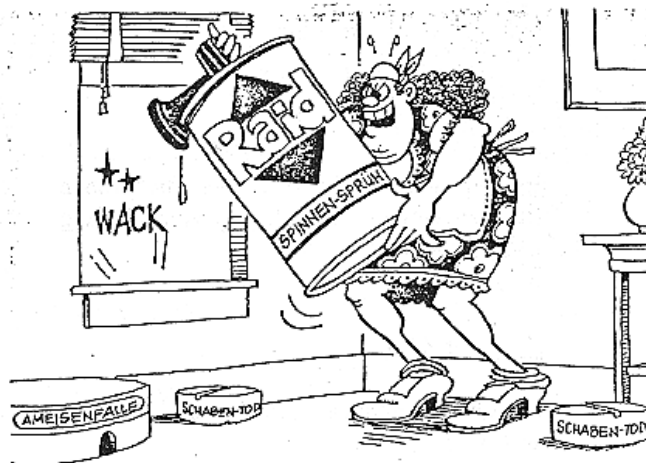


Während seiner Ausbildung zum Betriebswirt hat Diplomb-Kaufmann K aus E stets die Praxisnähe vermißt. Deshalb wollte er endlich einmal die Dinge selbst in die Hand nehmen und durchschlagende Erfolge erzielen. Er begann deshalb mit der Messerwerferei, bei welcher er immerhin schon eine Trefferquote von konstant 10% erreichte. Die Wahrscheinlichkeit, ein Ziel zu treffen sei deshalb, trotz beständigen Trainings, konstant  $P(T)=0,1$ .

- a) Definieren Sie für die Problemstellung eine Zufallsvariable X und geben Sie das passende Urnenmodell an. Wie ist X verteilt?
- b) Wie lautet die Stichprobenverteilung der Anzahl X der Treffer bei n Versuchen (Stichprobenumfang n)?
- c) Bei einer sehr großen Anzahl n ist die Anzahl X asymptotisch ...?... verteilt. Der Anteilswert  $p= X/n$  ist .....?..... verteilt.
- d) Geben Sie eine Begründung für die unter c) dargestellten Zusammenhänge (Hinweise auf Lehrsätze und deren Hintergründe).

**Aufgabe 7.2.5**

Die Hausfrau H kann sich nicht damit abfinden, ihre Wohnung mit Ameisen (A), Schaben und Kakerlaken (K), Spinnen (S), Mäusen (M), Wanzen (W) und Ratten (R) teilen zu müssen. Sie versuchte deshalb zunächst ihren Mitbewohnern mit Universal - Schädlingsbekämpfern (die  $n > 1$  Ungezieferarten vernichten) zu Leibe zu rücken, ging dann jedoch zu einer Strategie des gezielten (artspezifischen) Overkills über.



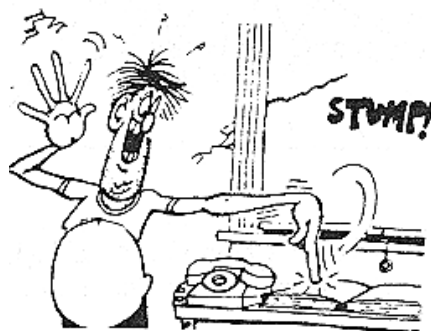
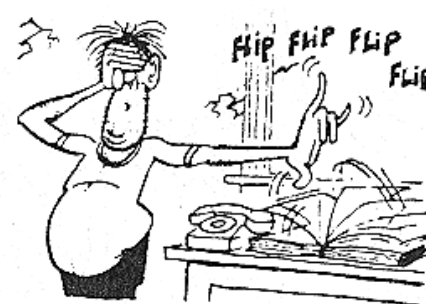
Angenommen, jede Schädlingsart habe in der Grundgesamtheit der Wohnung einen gleichen Anteil von  $\pi = 1/6$  an der Gesamtzahl der Schädlinge (Gleichverteilung). Ein morgendlicher Durchgang durch die Wohnung sei als Stichprobe aufzufassen. Die Hausfrau H findet dabei zehn Schädlinge, darunter sechs Spinnen. Geben Sie die Stichprobenverteilung für die Anzahl der Spinnen an!

- Wie wahrscheinlich ist es, die beschriebene Stichprobe zu ziehen, wenn  $\pi = 1/6$  ist?
- Wie wahrscheinlich ist es, einen Anteil von mehr als 50% Spinnen in der Stichprobe ( $n=10$ ) zu haben?

### Aufgabe 7.2.6.

Diplom-Kaufmann K aus E ist leider sehr vergeßlich. Nur mit einer geringen Wahrscheinlichkeit  $\pi > 0$  erinnert er sich an seine Telefonnummer. Mit einer Wahrscheinlichkeit  $1-\pi$  ist sie ihm dagegen beim Aufsuchen einer Telefonzelle gerade entfallen.

- Man bestimme (ohne Zuhilfenahme der Formelsammlung) die Verteilung der Anzahl  $X$  der erinnerten Telefonnummern, wenn K genau  $n$  unabhängige Versuche macht (Stichprobe vom Umfang  $n$ ), zu telefonieren! (Herleitung)!
- Wie lautet die Stichprobenverteilung des Anteils  $P=X/n$  der richtig erinnerten Telefonnummern und
- des Anteils der nicht erinnerten Telefonnummern?



### Aufgabe 7.2.7

Die Grundgesamtheit sei zweipunktverteilt mit  $P(x=1) = 1/2$  und  $P(x=2) = 1/2$ . Wie lautet die Stichprobenverteilung

- des arithmetischen Mittels  $\bar{X}$
- des geometrischen Mittels  $\bar{X}_G$

bei Stichproben vom Umfang  $n=2$  und  $n=3$  (Ziehen mit Zurücklegen)? Was fällt bei der Betrachtung der Stichprobenverteilung von  $\bar{X}_G$  auf?

### Aufgabe 7.2.8

In seinem neusten Wirkungskreis ist Diplom Kaufmann K aus E für die Verwaltung eines Betriebes verantwortlich, der zum medizinischen Bereich i.w.S. gehört.

Er hofft dabei seine Marketing- und Logistik-Kenntnisse zur Geltung bringen zu können, weil er u.a. auch für die Auslastung der Bettenkapazität von 120 Plätzen zuständig ist, die er durch gezielte PR-Arbeit zu steigern beabsichtigt. Die Anzahl  $X$  der täglichen Aufnahmeanträge (die auch größer als 120 sein kann) sei normalverteilt mit  $\mu$  und  $\sigma^2$ . Wie lautet die Stichprobenverteilung des mittleren Auslastungsgrades

$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum (x_i / 120)$  bei Stichproben vom Umfang  $n$  (Mittelwert über  $n$  Tage,  $n > 30$ )?



## Aufgaben zu Kapitel 8

### Aufgabe 8.1.1

Aus einer Urne mit  $N=4$  Kugeln werde eine Stichprobe vom Umfang  $n=2$  mit Zurücklegen gezogen. Die Urne enthält eine unbekannte Anzahl  $M$  von schwarzen und  $N-M$  von weißen Kugeln. Eine Stichprobe ergab eine schwarze und eine weiße Kugel. Bei welchem Wert für  $M$  (also  $M=1,2,3$  oder  $4$ ) ist es am wahrscheinlichsten, dass gerade ein solches Stichprobenergebnis (also eine schwarze und eine weiße Kugel) entsteht? Man differenziere die Likelihood-Funktion nach  $M$  und ermittle so den unbekanntem Wert  $M$ !

### Aufgabe 8.1.2

Bei einer mündlichen Prüfung in Statistik im SS 1990 gab es bei  $n = 5$  Prüfungen  $x = 1$  Prozeß vor dem Verwaltungsgericht Gelsenkirchen (Ereignis  $G$ ; die Prüfungen sind eine Stichprobe für die gilt:  $N$  sehr groß).

Geben Sie die Werte der Likelihood-Funktion für verschiedene Werte von  $\pi = P(G)$  an.

P(G)	0	0,1	0,2	0,3	0,4
Likelihood-Funktion					

Interpretieren Sie Ihr Ergebnis, indem Sie auch die Likelihood-Funktion angeben!

### Aufgabe 8.1.3

Eine Zufallsvariable habe die Ausprägungsmöglichkeiten „Erfolg“ mit der Wahrscheinlichkeit  $\pi$  und „Mißerfolg“ mit der Wahrscheinlichkeit  $1 - \pi$ . In einer Versuchsreihe von vier Versuchen wurde die Zahl der Mißerfolge vor dem ersten Erfolg gemessen:

Versuch	1	2	3	4
Mißerfolge	2	0	1	3

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten für 0, 1, 2 und 3 Mißerfolge in Abhängigkeit von  $\pi$  an.

Mißerfolge	0	1	2	3
Wahrscheinlichkeit				

b) Geben Sie auf der Grundlage der oben angegebenen Stichprobe eine Maximum-Likelihood-Schätzung für  $\pi$  ab.

**Aufgabe 8.2.1**

Die Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  seien unabhängig identisch verteilt mit  $E(X_i) = \mu$  und gleichen Varianzen  $\sigma^2$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ). Bekanntlich liefert dann die Stichprobenfunktion (Schätzfunktion)

$$\hat{\mu}_1 = 1/n (X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \bar{X}$$

eine erwartungstreue und konsistente Schätzung für  $\mu$ . Welche Eigenschaften haben demgegenüber die Stichprobenfunktionen  $\hat{\mu}_2$  und  $\hat{\mu}_3$ , wenn  $x_1$  der erste und  $x_n$  der letzte Wert in einer der Größe nach geordneten Reihe ist:

$$\hat{\mu}_2 = (X_1 + X_2) / 2 \qquad \hat{\mu}_3 = (2X_1 + 0,5X_n) / n \quad ?$$

Zeigen Sie, ob  $\hat{\mu}_2$  und/oder  $\hat{\mu}_3$  erwartungstreu, konsistent und genauso oder weniger effizient sind wie bzw. als  $\hat{\mu}_1$ !

**Aufgabe 8.2.2**

Diplom-Kaufmann K aus E ist nach einigen beruflichen Mißerfolgen voll auf der esoterischen Welle abgefahren. Seine Vorhersagen von Wasseradern mit der Wünschelrute klappen jedoch nicht so ganz. Nur in X von n Fällen liegt er richtig. Seine potentielle Kundschaft ist durchaus geneigt, manchen Mißgriff hinzunehmen, weil nunmal diese äußerst sensiblen Dinge eine höhere geistige Ebene der Beurteilung verlangen. Der Anteil  $\pi$  der wahren Vorhersagen sollte jedoch bei aller Liebe zu den feinstofflichen Schwingungen aus dem Überraum schon etwa 3/4 betragen, weil die Inanspruchnahme der Esoterik ja auch Geld kostet. Diplom-Kaufmann K aus E ist deshalb bestrebt, seine Trefferquote  $\pi$  durch Stichproben laufend



zu überprüfen. Als geeigneter Schätzer von  $\pi$  betrachtet er aufgrund übersinnlicher Umgebung die Funktion

$$\hat{\pi}_1 = \frac{X+1}{n+2} \quad \text{und aufgrund seines früheren Studiums} \quad \hat{\pi}_2 = \frac{X}{n}.$$

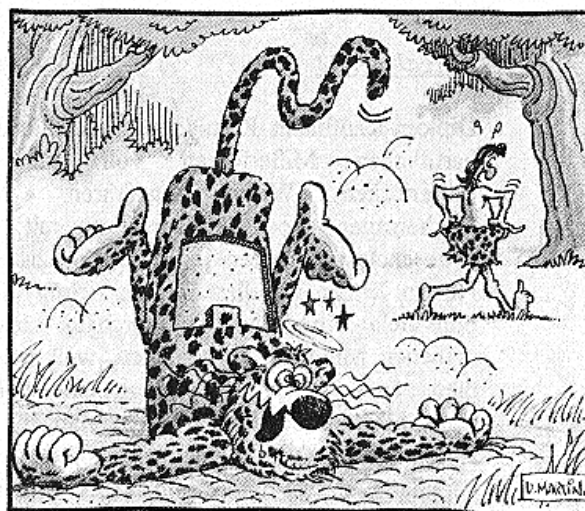
Die beiden Schätzfunktionen für  $\pi$  sind hinsichtlich der Gütekriterien (Erwartungstreue, Effizienz, Konsistenz) möglichst ohne esoterische Hilfsmittel zu beurteilen. Ist  $\hat{\pi}_1$  effizienter als  $\hat{\pi}_2$  ?

**Aufgabe 8.2.3**

Diplom-Kaufmann K aus E buchte eine besonders preisgünstige Mittelmeerkreuzfahrt. Widrige Umstände und erlittene Unbill ließen in ihm jedoch den Entschluß reifen, solche Reisen hinfort nicht mehr zu unternehmen: Nach drei Tagen erreichte er als einer der wenigen Überlebenden eine Staumauer des Hafens von Genua.



- a) Das Reisebüro legte in dem anschließenden Schadensersatzprozeß seine Unfallstatistik vor, nach welcher bei bisher insgesamt 50 Kreuzfahrten nur eine Havarie (Ereignis H) zu beklagen war. Ist der Anteil  $p_H = x/n = 1/50$  eine erwartungstreue Schätzung für den Anteil  $\pi_H$  in der Grundgesamtheit und ist die Größe  $p_H(1 - p_H)$  eine erwartungstreue Schätzung für die Varianz  $\pi_H(1 - \pi_H)$  der Grundgesamtheit?



- b) Das Reisbüro veranstaltet auch Safaris, bei denen ein Anteil  $p_L$  von Reiseeteilnehmern nach einer Begegnung mit einem Leoparden nicht mehr wiedergesehen wurde. Unter welchen Voraussetzungen liefert die Differenz  $p_H - p_L$  eine erwartungstreue Schätzung für  $\pi_H - \pi_L$  ?



**Aufgabe 8.2.4**

Zwei Ökonomen haben zwei verschiedene Schätzer  $\hat{\mu}_1$  und  $\hat{\mu}_2$  für die erwartete Höhe des Einkommens von Mittelschichtfamilien in den USA vorgeschlagen:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{6}X_1 + \frac{1}{3}(X_2 + X_{n-1}) + \frac{1}{6}X_n$$

$$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n-2} X_i$$

Es wurde dabei angenommen, dass die Höhe der Einkommen unabhängig normalverteilt sind mit  $E(X_i) = \mu$  und  $V(X_i) = \sigma^2$ , für alle  $i = 1, \dots, n$ .

Zeigen Sie, dass beide Schätzer erwartungstreu sind und vergleichen Sie die Schätzer hinsichtlich ihrer Varianzen. Welcher Schätzer ist effizienter?

**Aufgabe 8.3.1**

Bei einer Stichprobe vom Umfang 100

- mit Zurücklegen
- ohne Zurücklegen

aus einer Grundgesamtheit von  $N=500$  Stück befanden sich 30 Ausschußstücke. Bestimmen Sie die symmetrischen 95%-Konfidenzintervalle für den Ausschußanteil in der Grundgesamtheit!

**Aufgabe 8.3.2**

In einer Gemeinde mit 10.000 Erwerbstätigen wurden durch eine Stichprobe im Umfang  $n=100$  folgende Werte für die Verteilung der Wochenverdienste festgestellt:

$$\bar{x} = 400 \quad \text{und} \quad \hat{\sigma} = 50.$$

- Bestimmen Sie ein 95% symmetrisches Konfidenzintervall für  $\mu$ .
- Man bestimme das 99%-Konfidenzintervall
- Wie würde sich das 95%-Intervall verringern, wenn eine entsprechende Stichprobe in einer Gemeinde mit nur 2.000 Erwerbstätigen gezogen worden wäre?

**Aufgabe 8.3.3**

(als Testproblem vgl. Aufg. 9.1.4)

In einer Stichprobe von  $n=50$  Geräten (aus einer Produktionsserie von  $N=500$  Stück) befanden sich 2 unbrauchbare Geräte. Im Kaufvertrag wurde verabredet, dass der Kunde berechtigt sei, die Abnahme der gesamten Serie zu verweigern, wenn bei einer Irrtums-

wahrscheinlichkeit von 5vH der Ausschußanteil der Grundgesamtheit 6vH oder höher sein könne. Darf der Kunde die Serie ablehnen?

Welches Stichprobenergebnis wäre zu erwarten, wenn der Ausschußanteil in der Grundgesamtheit nur 2vH wäre?

#### Aufgabe 8.3.4

In einer Schulklasse mit 25 Schülern unterzogen sich 9 durch Los bestimmte Schüler einem Intelligenztest. Die Varianz des Intelligenzquotienten war dabei  $\hat{\sigma}^2 = 81$ . Wie breit ist das 95,45% -Konfidenzintervall?

#### Aufgabe 8.3.5

Bei 261 Patienten wurde untersucht, ob Akupunktur bei Dauerschmerzen hilft. Aus einer Untersuchung in den USA ergab sich, dass jeder dritte Patient (also 87) nach vier aufeinanderfolgenden Sitzungen nach eigenen Angaben schmerzfrei ist. Die Wirkung hielt jedoch nicht lange an, denn nach vier Wochen waren nur noch 5% schmerzfrei. Außerdem ist zu bedenken: ein Anteil von ca. 30% Linderung tritt auch schon bei Scheinmedikation ("Plazebos") auf.

Bestimmen Sie ein 95%-Konfidenzintervall für  $\pi$  mit  $p=0,3$  und  $p=1/3$ . Deuten Sie das Ergebnis.



»Und in zehn Tagen wil zeigen, wie man die Akupunktulnadeln nimmt wieder heraus.«

十天以后,再教大家取针。

#### Aufgabe 8.3.6

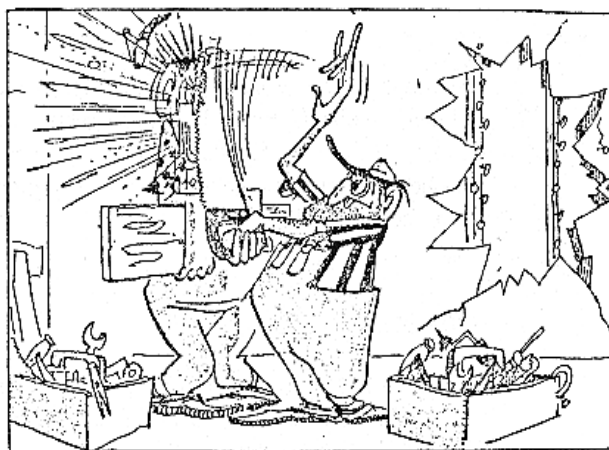
Eine bestimmte Operation O wurde im Krankenhaus A bereits  $n_A=40$  mal und im Krankenhaus B bereits  $n_B=50$  mal durchgeführt. Als Erfolg gilt in der Medizin, dass der Patient die Operation lebend übersteht und sich sein Gesundheitszustand verbessert hat.

Die Erfolgsquoten seien bei dieser schwierigen Operation leider mit  $p_A=1/8$  und  $p_B=1/2$  bedauerlich gering.

Man bestimme 95,45% -Konfidenzintervalle für  $p_A$  und  $p_B$  aufgrund der beiden Stichproben (Ansatz genügt)! Was bedeutet es, wenn sich die Konfidenzintervalle überschneiden bzw. nicht überschneiden (so wie es oben der Fall ist)?

**Aufgabe 8.3.7***(eine Zukunftsvision)*

Einer Forderung der Gewerkschaften entsprechend wurden ab 2005 nur noch im Personalwesen akademisch vorgebildete Poliere eingestellt, damit das Herumschlagen mit Dachlaten endlich ein Ende hat. Bei den ersten 100 Betrieben mit akademischem Führungsstil beobachtete man zwar eine Abnahme der Arbeitsproduktivität auf  $\bar{x} = 450$  (statt bisher  $\mu = 500$ ), dafür wuchs aber das Verständnis für das Wesen des Personalwesens bei den Bauhilfsarbeitern ganz erheblich gegenüber dem bisherigen Zustand des autoritären nichtakademischen Führungsstils (vgl. Bild).



Man bestimme mit  $\bar{x} = 450$  und  $\sigma = 50$  ein symmetrisches Konfidenzintervall für  $\mu$  ( $1 - \alpha = 0,9545$ ).

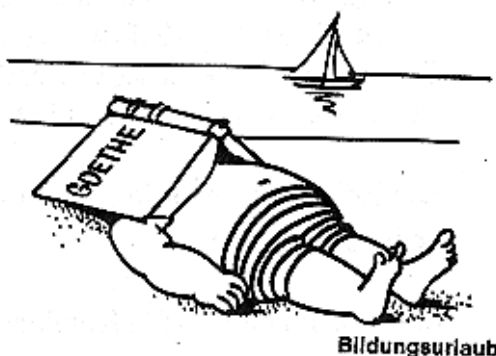
**Aufgabe 8.3.8**

Bei einem Einstellungstest in der Industrie werde den Neuakademikern jeweils ein Problem vorgelegt, für welches eine bestimmte Arbeitszeit  $X$  erforderlich ist, um es sorgfältig zu lösen. Der Personalchef, der stets sehr intensiv mit Statistik befaßt sein muß, möchte erst einmal das Konfidenzintervall für die durchschnittliche Bearbeitungszeit bestimmen, um bei den Bewerbern, die er ablehnt, gerecht verfahren zu können. Gestern mögen sich vier Personen beworben haben und dabei folgende Bearbeitungszeiten (in Minuten) benötigt haben: 105, 95, 110 und 90 Minuten.

Man bestimme ein zweiseitiges 95%-Konfidenzintervall für die durchschnittliche Bearbeitungszeit!

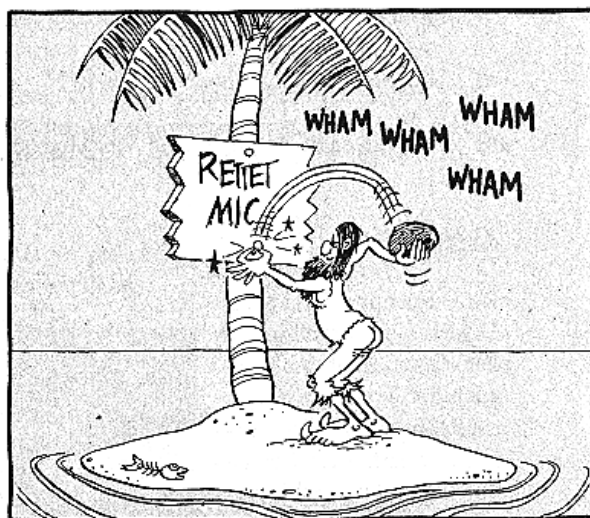
**Aufgabe 8.4.1**

Ein gemeinnütziger Verein veranstaltete eine außerordentlich spannende Vortragsreihe über Statistik und eine entsprechende, aber an sich weniger ergiebige Fortbildungsveranstaltung über Buchhaltung. An beiden Lehrgängen nahmen 200 (verschiedene) Manager teil, wobei sich jedoch bei der Buchhaltung ein Anteil von 80% besonders interessiert zeigte, während es bei der Statistik nur 20% waren. Könnte es sein, dass der Unterschied nur zufällig 60%, in der Grundgesamtheit dagegen nur 20% beträgt ( $\alpha=5\%$ )?



**Aufgabe 8.4.2**

Als es in früheren Zeiten noch nicht üblich war, Rettungsflugzeuge für die Rettung von Schiffsbrüchigen einzusetzen, kam es doch relativ häufig vor, dass ein Schiffsbrüchiger auf einer einsamen Insel dahinschmachtete. Einer früheren Untersuchung ( $n_1=35$  Monate) zufolge wurde dieses traurige Schicksal im Monatsdurchschnitt  $\bar{x}_1=8$  Menschen zuteil (bei  $\sigma=5$ ). In einer neueren Untersuchung (nach Erfindung des Flugzeugs) fand man jedoch nur  $\bar{x}_2=5,5$  und  $\sigma=5$ . Der Stichprobenumfang der neueren Untersuchung war erheblich größer:  $n_2=1225$ .



- Man bestimme die 95,45%-Konfidenzintervalle für  $\mu$  früher und jetzt (mit  $n_1=36$  statt 35).
- Es interessiert natürlich die Frage, ob durch den Einsatz von Rettungshubschraubern signifikant weniger Schiffsbrüchige auf einsamen Inseln verkommen müssen. Man bestimme deshalb ein Konfidenzintervall ( $\alpha=4,55\%$ ) der Differenz der Mittelwerte (Hinweis: Man gehe von homogenen Varianzen und einer Normalverteilung aus!). Was bedeutet es, wenn das Konfidenzintervall auch den Wert 0 umfaßt?

**Aufgabe 8.4.3**

Man beantworte zur folgenden Meldung aus dem "SPIEGEL"

*Italienische Erfolge bei der Brustkrebstherapie*

Mit einer Kombination dreier verschiedener Krebsmedikamente (Cyclophosphamid, Methotrexat und Fluorouracil) hat der italienische Krebspezialist Dr. Gianni Bonadonna die Überlebenschance von 207 Patienten drastisch verbessert, bei denen trotz Brustkrebsoperation die Tumorzellen zum Teil schon in den Lymphknoten angesiedelt waren. Nur bei zehn der gleich im Anschluß an die Operation behandelten Frauen kam es später wieder zu einem Rückfall - von einer Kontrollgruppe mit 179 Frauen dagegen, bei denen die Chemotherapie nicht eingesetzt wurde, erkrankten 43 abermals. Auch nachdem die Medikamentenkombination abgesetzt worden war, erhöhte sich die Rückfallquote nicht. Bonadonnas Arbeit, bei der ihm zehn Kollegen vom Mailänder Istituto Nazionale Tumori assistierten, sei von "monumentaler Wichtigkeit", heißt es in einem Kommentar des als zurückhaltend bekannten "New England Journal of Medicine", in dessen vorletzter Ausgabe die italienischen Befunde publiziert wurden. Womöglich könnte mit der Dreifach-Therapie das Leben "Hunderttausender von Frauen gerettet" werden. Bisher hatten beispielsweise nur 45 von 100 Amerikanerinnen, bei denen Tumorzellen sich schon in den Lymphknoten eingenistet hatten, die ersten fünf Jahre nach der Operation überlebt.

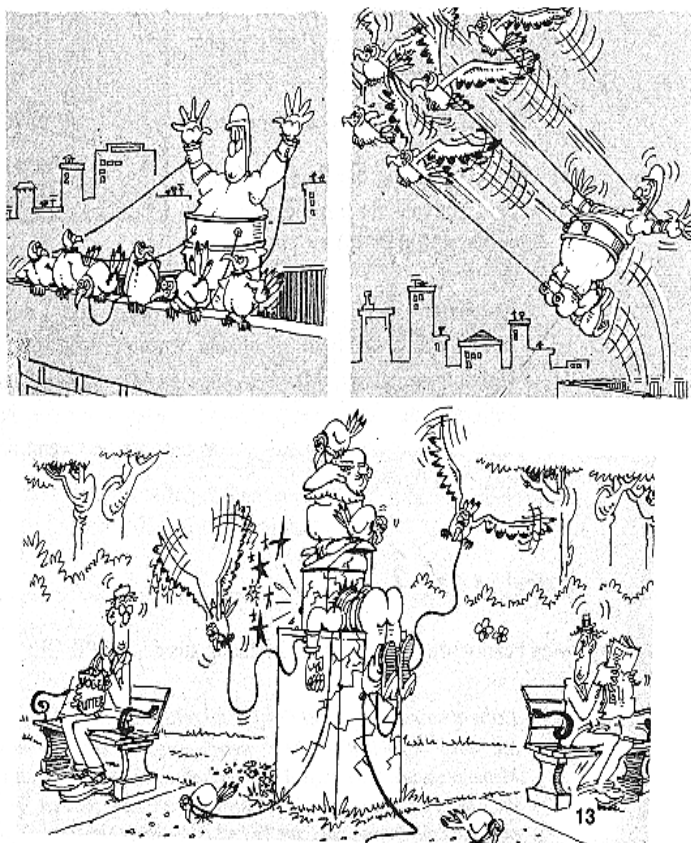
die Fragen:

Kann mit einer Wahrscheinlichkeit von  $1-\alpha=0,95$  (zweiseitig) behauptet werden, dass die Wahrscheinlichkeit des Rückfalls

- bei beiden Heilmethoden gleich ist?
- der neuen Methode um ein Viertel gegenüber der alten gesenkt werden kann?

**Aufgabe 8.4.4**

Die Europa Universität Viadrina in Frankfurt an der Oder fühlt sich u.a. auch der Tradition des berühmten polnischen Malers und Erfinders Leonardo da Winczinski verpflichtet, der sich intensiv mit der Möglichkeit des menschlichen Fluges beschäftigte. Es wurden deshalb auch alternative und umweltfreundliche Formen des Fliegens erforscht. Bei Methode 1 (vgl. Bild) endeten von 200 Flugversuchen leider 80% bereits auf deutscher Seite, während es bei Methode 2, mit der ebenfalls 200 Versuche unternommen wurden, immerhin 50 mal gelang, auf polnischem Gebiet zu landen. Ist der Unterschied zwischen den beiden Flugmethoden signifikant ( $\alpha = 5\%$ )?

**Aufgaben zu Kapitel 9****Aufgabe 9.1.1**

Die Post des Landes x plant eine Gebührenerhöhung für eine ihrer Dienstleistungen, die bisher von 80 vH der Bevölkerung in Anspruch genommen wurde. Eine Stichprobe vom Umfang  $n = 2500$  ergab, dass bei der höheren Gebühr immerhin noch 78 vH der Bevölkerung diese Leistung nachfragen werden.

Die Post schließt daraus, dass sich die Nachfrager preisunelastisch verhalten und freut sich auf die Mehreinnahmen durch die Gebührenerhöhung:

- a) Formulieren Sie für dieses Beispiel die Nullhypothese  $H_0$  und die Alternativhypothese  $H_1$  !  
Was bedeutet in diesem Fall der Fehler  $\alpha$ ? (Beschreiben Sie in eigenen Worten, worin das Risiko, den Fehler 1. Art zu begehen, besteht!)

- b) Sollte die Post ihren Überlegungen eine möglichst geringe Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  zugrunde legen und dadurch ein größeres  $\beta$  in Kauf nehmen oder umgekehrt  $\beta$  klein halten und dabei ein größeres  $\alpha$  in Kauf nehmen?

**Aufgabe 9.1.2**

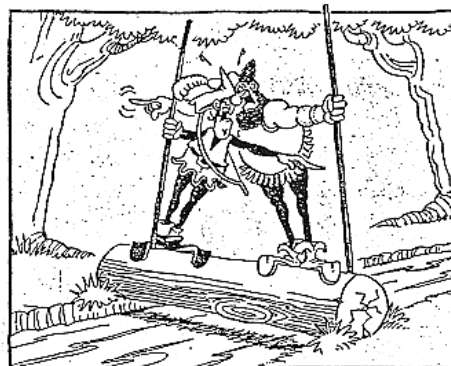
Nachdem Diplom-Kaufmann K aus E einen Schnellimbiss eröffnete, widerfuhr ihm auch das Mißgeschick, einen Juristen (J) zu Gast zu haben, der Tomatensuppe bestellte.

Der Vorfall endete damit, dass sich K vor Gericht wegen versuchter Körperverletzung verantworten mußte. Dabei stellte sich heraus, dass unter 25 Tomatensuppen des K sogar 9 wegen einer Fliege für gewisse Gäste ungenießbar waren. Vor Gericht wurden zwei konkurrierende Hypothesen über die Wahrscheinlichkeit dieser Ereignisse verfochten:

von K:  $H_0: \pi = 0,1$

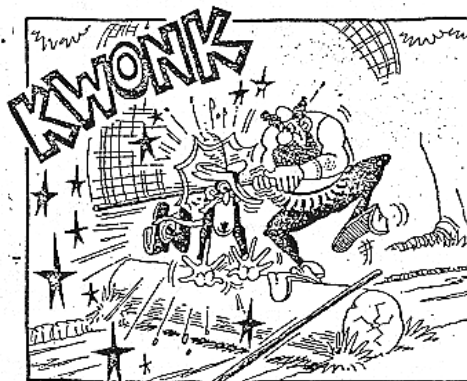
von J:  $H_1: \pi = 0,5$

- a) Entscheiden Sie über  $H_0$  mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von  $1-\alpha=0,9772!$
- b) Bei welchem Wert von  $p$  beginnt der kritische Bereich?
- c) Bestimmen Sie ein 95%-zweiseitiges Konfidenzintervall für  $\pi$ .



**Aufgabe 9.1.3**

In den Wäldern des Fürstentums Sylvania kam es vor dem Jahre 1649 doch schon hin und wieder zu unangenehmen Begegnungen. Die mittlere Anzahl derartiger Unfälle war  $\mu = 500$  pro Monat und die Standardabweichung war 50 Unfälle pro Monat. Prinz Wanfried von Sylvania befahl deshalb einem Hofnarren, eine Straßenverkehrsordnung mit vielen schönen Paragraphen auszuarbeiten. Sie trat 1649 in Kraft.



- a) Nach Inkrafttreten der Straßenverkehrsordnung ermittelten die Statistiker folgende Daten für die Unfallhäufigkeit  $\bar{x} = 450$  und  $\sigma = 50$ . Man bestimme das symmetri-

- sche Konfidenzintervall bei einer Fehlerwahrscheinlichkeit von  $\alpha = 0,0455$ ! Die Angaben beruhen auf einer Untersuchung von  $n=100$  Monaten (mehr als 8 Jahre)
- b) Es interessiert natürlich, ob durch Wanfrieds Straßenverkehrsordnung nunmehr signifikant weniger Unfälle (Monatsdurchschnitte) vorkommen, als früher.  
Formulieren Sie die Null- und Alternativhypothese und führen Sie den Test durch!  
( $\alpha = 5vH$ )
- c) Bei welchem Wert beginnt der kritische Bereich?
- d) Erläutern Sie in kurzen Worten den Unterschied zwischen Schätzen und Testen.

#### Aufgabe 9.1.4

(als Schätzproblem vgl. Aufg. 8.3.3)

In einer Stichprobe von  $n = 50$  Geräten (aus einer Produktionsserie von  $N = 500$  Stück) befanden sich zwei unbrauchbare Geräte. Im Kaufvertrag wurde ein Ausschußanteil der Produktionsserie von 1% garantiert.

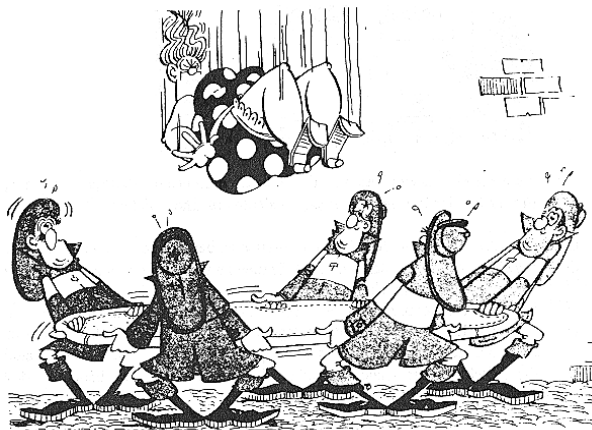
Darf der Kunde die Abnahme der Serie verweigern, weil der Ausschußanteil in der Stichprobe 4% statt 1% beträgt?

Die Abnahmekontrolle soll mit einer Sicherheits-Wahrscheinlichkeit von 95% durchgeführt werden, d.h. mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit (einem Signifikanzniveau) von 5% (einseitiger Test), denn:

$H_0: \pi = 0,01$  (Hypothese des Verkäufers) und  $H_1: \pi > 0,01$  (Hypothese des Käufers).

#### Aufgabe 9.1.5

Durch das Geschick der Feuerwehrmänner darf man darauf vertrauen, dass man mit einer konstanten Wahrscheinlichkeit von  $1-\pi = 24/25 = 0,96$  bei einem Sprung vom Sprungtuch auch sicher landet.



- a) Angenommen, die etwas füllige Frau F springe als dritte Person und sei die zweite Person, die beim Sprung verunglückt. Vor ihr sei bereits der betuchte Dipl.-Kfm. K aus E gesprungen und neben dem Sprungtuch gelandet, während Dipl.-Vw. V aus M glücklich gelandet sei. Die Reihenfolge, in der K und V gesprungen sind, sei nachträglich nicht mehr feststellbar.

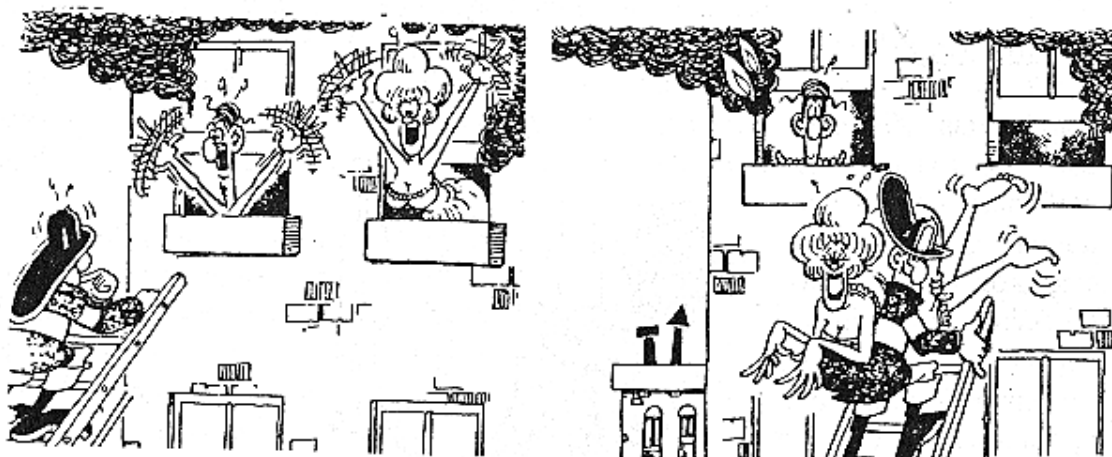
Wie wahrscheinlich ist das beschriebene Ereignis? (Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit auf zwei Arten: durch Aufzeichnen des Wahrscheinlichkeitsbaums bzw. durch Benutzung der passenden Wahrscheinlichkeitsverteilung).

b) Bei einem Einsatz galt es 20 Personen zu retten. Schreiben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung  $f(x)$  und die Verteilungsfunktion  $F(x)$  für die Anzahl der mißglückten Sprünge auf!

c) Die von Ihnen gewählte Verteilung hat ..... Parameter und ist

	stetig		diskret		eine Grenzverteilung
	symmetrisch		asymmetrisch		monoton fallend
	linear		normal		zweigipflig

d) Bei der dienstlichen Beurteilung des Nachwuchsfeuerwehrmannes N entstanden dadurch gewisse Schwierigkeiten, dass der Vorgesetzte den Eindruck gewann, N habe sich bei der geforderten "raschen Güterabwägung" signifikant häufiger zugunsten von Frauen als von Männern entschieden.



Geht man bei einem Test von der Arbeitshypothese des Vorgesetzten aus, dass N Frauen bei der Rettung bevorzugt, bedeuten  $\alpha$ - und  $\beta$ -Fehler:

- $\beta$ -Fehler: N gerät in den Verdacht, Frauen zu bevorzugen, obgleich er es nicht tut;
- $\alpha$ -Fehler: N gerät in den Verdacht, Frauen zu bevorzugen, obgleich er Männer und Frauen gleich behandelt;
- $\beta$ -Fehler: die Bevorzugung der Frauen von N wird nicht erkannt;
- $\beta$ -Fehler: der Stichprobenbefund legt den Schluß nahe, N behandle Männer und Frauen gleich, obgleich man von der Hypothese ausging, N bevorzuge Frauen.
- die Ablehnung der Gleichbehandlungshypothese ( $\alpha$ -Fehler) bedeutet, dass N die Frauen bevorzugt;
- $\alpha$  ist die Wahrscheinlichkeit, die Gleichbehandlungshypothese abzulehnen, während  $\beta$  die Wahrscheinlichkeit ist, diese Hypothese anzunehmen, so dass  $\alpha + \beta = 1$  gilt.

**Aufgabe 9.1.6**

Im Jahr 2118 fand Albert Zweistein heraus, dass die Menge Aminohydronuclein-diformaldehydtri-proteinascorbinsäure (kurz A) im Zellkern (gemessen in Nanogramm [ng]) ein Maß zur Unterscheidung von



Subhominiden (weniger als 8 ng),  
 Hominiden (8 bis 10 ng;  $\mu_H = 9$  und  $\sigma_H = 4$ )  
 Superhominiden (über 10 ng)

sei. Eine Expedition zum Sonnensystem Tau-Ceti kam mit einer Stichprobe von zufällig ausgewählten Extraterrestriern zurück. Es interessiert die Frage, ob diese entlegenen Ortes vorgefundene Populationen von der Art der hienieden existierenden Hominiden sein können. Messungen ergaben:

n	$\bar{x}$	$\hat{\sigma}$
16	11	4

- Man teste die Hypothese, dass der Tau-Ceti ein Hominid ist gegen die Alternativhypothese, dass er ein Superhominid ist (5%, einseitig,  $H_1: \mu_c=12,6449, \sigma_c=4$ ).
- Bei welcher Menge beginnt der kritische Bereich?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für  $\beta$ ?
- $\beta$  ist die Wahrscheinlichkeit, ...
  - anzunehmen, der Tau-Ceti sei ein Superhominid, obwohl er es nicht ist.
  - anzunehmen, der Tau-Ceti sei kein Superhominid, obwohl er es doch ist.
  - einen Unterschied zwischen Hominiden und Superhominiden auch tatsächlich zu erkennen.
  - einen tatsächlich bestehenden Unterschied zwischen Hominiden und Superhominiden nicht zu erkennen.

### Aufgabe 9.1.7

Die Versuchsserie für den neuen Fliegentöter "der totale Spray" (TS) mußte wegen einer unerwarteten und gravierenden Wirkung nach  $n=4$  ( $n=25$ ) Versuchen abgebrochen werden.

- Es ist zu entscheiden, ob bei TS tatsächlich mit dieser nicht tolerablen Wirkung zu rechnen ist ( $\alpha=0,01$ , einseitig), wenn hierfür aufgrund theoretischer Erwägungen von Chemikern nur eine Wahrscheinlichkeit von 0,01 sprechen würde!
- Aufgrund welchen Grenzwertsatzes darf man (zumindest asymptotisch) mit der Normalverteilung rechnen? Wie ist X tatsächlich verteilt?
- Man diskutiere für dieses Beispiel die inhaltliche Bedeutung des Fehlers erster bzw. zweiter Art.

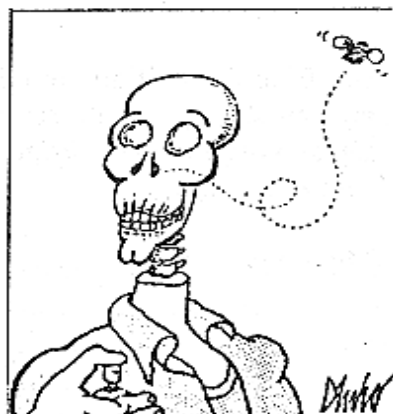


### Aufgabe 9.1.8

Ein pharmazeutisches Unternehmen überprüft die Wirksamkeit eines neuen Medikaments anhand des Anteils der "Geheilten". Das Medikament gilt als wirksam, wenn der Anteil

$\pi_n > \pi_a$  ist (n=neu, a=alt).

- a) Warum prüft man die Nullhypothese  $H_0: \pi_n = \pi_a = \pi_0$  und nicht die Alternativhypothese  $H_1: \pi_n > \pi_a$ ? Warum ist ein nichtsignifikantes Ergebnis keine Verifizierung der Nullhypothese? Demonstrieren Sie Ihre Überlegungen an folgendem Beispiel:  $n=100$ ,  $p_n=0,15$  und  $\pi_0=0,1$  bzw.  $\pi_0=0,2$ .
- b) Welche Interessen werden der Hersteller und der Patient hinsichtlich  $\alpha$  und  $\beta$  vertreten?

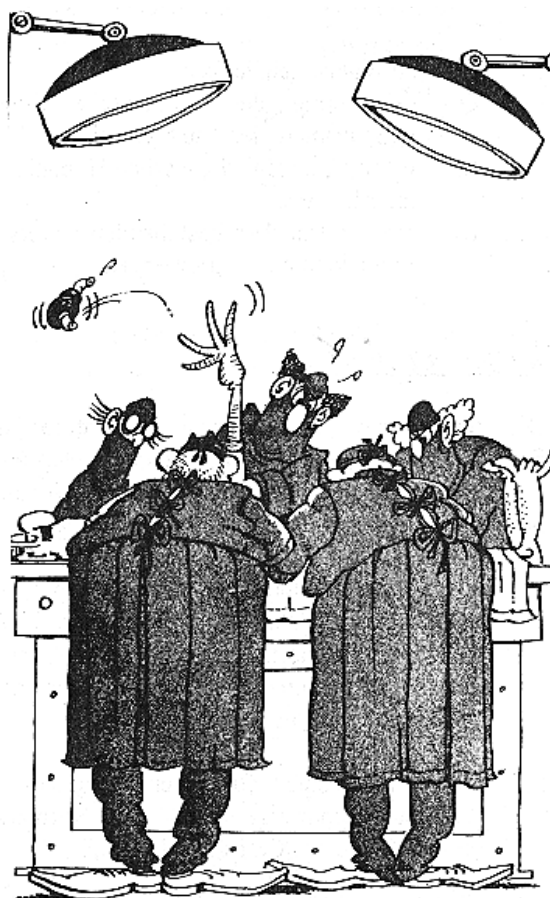


**Aufgabe 9.1.9**

Die medizinischen Lehrmeinungen des Chirurgen Prof. Dr. C sind mit zunehmender Berufserfahrung immer radikaler geworden. Zu seiner Grundüberzeugung gehört mittlerweile die Lehre, dass jedes Organ, das unbrauchbar ist, ersatzlos entfernt werden müsse. Dabei sind jedoch leider im letzten Monat bei 25 Operationen nicht weniger als neun Patienten gestorben. Bei einer Untersuchung durch die Ärztekammer (A) wurden über die Wahrscheinlichkeit  $\pi$  solcher Vorfälle zwei konkurrierende Hypothesen verfochten

- von C:  $H_0: \pi = 0,1$
- von A:  $H_1: \pi = 0,5$ .

- a) Entscheiden Sie über  $H_0$  mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von  $1-\alpha = 0,9772$ .
- b) Bei welchem Wert von p beginnt der kritische Bereich ( $1 - \alpha = 0,9772$ )?
- c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit  $\beta$  für den Fehler zweiter Art!



**Aufgabe 9.1.10**

*"Statistische Testverfahren sollen ein Urteil ermöglichen, mit welcher Sicherheit oder Signifikanz die über die Ausgangsverteilung der erhobenen Merkmale und ihre Parameter aufgestellten Hypothesen bestätigt oder verworfen werden können".*

(aus J. Zentes, Grundbegriffe des Marketing, S. 397)

Beantworten Sie ausgehend von diesen Erklärungen folgende Fragen:

- Sind die Begriffe "Sicherheit" und "Signifikanz" synonym?
- Was heißt "Ausgangsverteilung"? Worauf bezieht sich der Begriff "Parameter"?
- Wird bei einem Test eine Sicherheit berechnet, mit der eine Hypothese verworfen werden kann? Stellt die Größe  $1-\alpha$  eine solche Größe dar? Kann es überhaupt eine "Sicherheit" im Sinne der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses geben, mit der man eine Hypothese bestätigen oder verwerfen kann?
- Muß sich ein Test immer auf die Parameter einer Verteilung beziehen?

### Aufgabe 9.1.11

In einem betriebswirtschaftlichen Lehrbuch stellt der Autor die Prüfbarkeit einer Hypothese über die Wahrscheinlichkeit, nach einer Vorstrafe rückfällig zu werden, wie folgt dar:

*Unserer Aussage über die Vorbestraften würden wir etwa die folgende Form geben: "95% aller Vorbestraften werden rückfällig, 5% dagegen nicht." Die Prüfbarkeit dieser Aussage wird dadurch hergestellt, dass wir eine bestimmte Hypothese über das für die jeweiligen Fälle geltende Verteilungsgesetz aufstellen. Diese Hypothese könnte etwa das folgende Aussehen haben: In  $x\%$  der Fälle gilt folgendes Verhältnis von rückfälligen zu nicht rückfälligen Vorbestraften:*

3%	91 : 9
7%	92 : 8
80%	95 : 5
7%	98 : 2
3%	99 : 1

*Stellen wir durch empirische Untersuchungen fest, dass beispielsweise in 90% der Fälle das Verhältnis von Rückfälligen zu Nichtrückfälligen 92:8 lautet, so müssen wir sowohl unsere Hypothese über das geltende Verteilungsgesetz, als auch unsere empirische Hypothese als falsifiziert ansehen.*

Offenbar will der Autor zeigen, ob und wie man eine Hypothese über eine Wahrscheinlichkeit ( $\pi=0,95$ ) falsifizieren kann. Beantworten Sie folgende Fragen zu seiner Betrachtung:

- Was könnte "in 90% der Fälle" bedeuten? Könnte gemeint sein: bei 90% aller Stichproben (von welchem Umfang?) wurde eine relative Häufigkeit von (genau?) 0,92 beobachtet?
- Woher kommt die Hypothese "über das für die jeweiligen Fälle geltende Verteilungsgesetz"? Warum folgt sie nicht aus der Hypothese  $\pi=0,95$ ?
- In welcher Weise kann eine (oder mehrere [in 90% der Fälle], wobei sich fragt, wieviele) relative Häufigkeit(en) eine Hypothese über eine Wahrscheinlichkeit (0,95) "falsifizieren"?
- Inwiefern kann eine solche Beobachtung (aus wievielen Stichproben welchen Umfangs?) zugleich zwei Hypothesen (wenn es denn zwei sind) "falsifizieren"? Was bedeutet hier "empirische Hypothese"?
- Gibt es bei Signifikanztests eine Hypothese über ein "Verteilungsgesetz"? Was wird hier eigentlich verteilt?

- f) Warum wird nicht gesagt, wieviele Stichproben welchen Umfangs gezogen werden?  
Warum erscheint in der Betrachtung kein Signifikanzniveau?

### Aufgabe 9.1.12

In einer empirischen Studie über Schulreife und Schulerfolg untersuchten K. Lühning und R. Schmid (1978) Einflußgrößen von Schulreife, Schulnoten und Intelligenz. Eine Stichprobe von  $n=18$  Schülern ("Einheimische") einer niedersächsischen Gemeinde mit dem Einschulungsjahr 1970 ergab einen Mittelwert  $\bar{x}=109$  der IQ-Punkte mit einer Standardabweichung  $\sigma=13,5$ .

Psychologen mögen herausgefunden haben, dass der IQ normalverteilt ist mit  $\mu=100$  und  $\sigma=15$ . Ist der Befund der empirischen Studie bezüglich des Mittelwerts mit dieser Arbeitshypothese vereinbar?

### Aufgabe 9.2.1

(Statistik als konkrete Lebenshilfe!)

Major v.X. (verarmter Adel) wünscht, sich durch eine Heirat zu sanieren:

- a) Zwei gleichlautende Anzeigen in den Zeitungen A und B ergeben  $n_A=50$  und  $n_B=40$  Zuschriften, die als unabhängige Stichproben mit Zurücklegen aufzufassen sind. Aus den Zuschriften ging hervor, dass die Anteile  $\pi_A=1/2$  und  $\pi_B=1/8$  der heiratswilligen Damen begütert waren.

Unzufrieden mit dem Erfolg dieser Aktion erwägt v.X. eine neue Anzeige, in der seine Vorzüge und Absichten etwas deutlicher hervorgehoben werden sollen.

Soll er seine neuerliche Aktion auf die Zeitung A konzentrieren? ( $\alpha = 1\%$ )

- b) Zu welcher Entscheidung würde v.X. gelangen, wenn  $\pi_A=0,4$  und  $\pi_B=0,25$  gewesen wären?



### Aufgabe 9.2.2

Die Gemeinde G ist zu der richtigen Erkenntnis gelangt, dass man nicht durch korrupte Wahlmänner unfähige Sheriffs wählen lassen sollte, und dass auch in allen Fragen des Personalwesens ein Statistiker hilfreicher ist als ein Betriebswirt. Sie beauftragte deshalb einen Statistiker, um aus den beiden Bewerbern A und B für das Amt des Sheriffs den besseren auszuwählen.

Da es bei diesem Amt vor allem darauf ankommt, gut schießen zu können, andererseits aber auch ein guter Schuß ein Zufallstreffer sein kann, unternahm der Statistiker mit den beiden Bewerbern einen Schießwettbewerb. Die Ergebnisse waren:



	Ziel getroffen	nicht getroffen	Trefferanteil
Bewerber A	10	30	1/4
Bewerber B	20	30	2/5

- a) Offenbar scheint B der bessere Schütze zu sein. Man möchte aber auch wissen, ob B *signifikant* besser schießt als A ( $\alpha = 0,05$ ).
- b) Erklären Sie mit eigenen Worten, was in diesem Fall der Fehler 2. Art ist, und ob es besser ist  $\alpha$  oder  $\beta$  zu betrachten!
- c) Die Entscheidung für B, weil dessen Trefferquote mit 40% höher war, als die von A, könnte ungerecht sein. Es könnte sogar sein, dass A besser ist, als B und dass sogar gilt:  $\pi_A=0,4$  und  $\pi_B=0,3$ .  
Man berechne unter diesen Annahmen ein symmetrisches, zweiseitiges Schwankungsintervall ( $1-\alpha = 0,95$ ) für die Differenz der Stichprobenanteilstwerte.  
Wie wäre es zu interpretieren, wenn das Intervall auch die Differenz  $1/4 - 2/5 = -0,15$  umfassen würde?
- d) Richtig oder falsch?
  - Ein Konfidenzintervall gibt mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit an, in welchem Wertebereich ein Parameter der Grundgesamtheit liegt.
  - Ein Schwankungsintervall gibt mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit an, in welchem Wertebereich eine Kennzahl der Stichprobe liegen wird.
  - $\alpha$  ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Nullhypothese falsch ist.
  - Der  $\alpha$ -Fehler bedeutet hier: B annehmen, obwohl A besser ist.
  - ... zwischen A und B keinen Unterschied zu machen, obgleich doch einer besteht.
  - ... sich zwischen A und B nicht zu entscheiden, obgleich B besser ist als A.
  - ... den Bewerber B anzunehmen, obgleich A genauso gut sein könnte, wie B.

**Aufgabe 9.2.3**

Eine Untersuchung über die Gehirngröße (in  $\text{cm}^3$ ) von 9 Ponginae und 16 Australopithecinae möge bei einer Standardabweichung (in der Grundgesamtheit) von  $\sigma_P = \sigma_A = 9$  folgende Mittelwerte ergeben haben

Ponginae : 450;      Australopithecinae : 600

(die Angaben entsprechen der Wirklichkeit). Ist der Unterschied in der Gehirngröße zwischen diesen beiden menschlichen Vorfahren signifikant ( $\alpha=5\%$  einseitig)? Ist anzunehmen, dass bei gleichem  $n$  und  $\sigma$  (also  $\sigma_G = \sigma_A = 9$ ) auch ein durchschnittlicher Gorilla (Gehirnvolumen  $685 \text{ cm}^3$ ) ein signifikant größeres Gehirnvolumen als ein Australopithecus hat ( $\alpha=5\%$  einseitig)?



AUSTRALOPITHECUS

**Aufgabe 9.2.4**

(Verifizierung der aristotelischen Frauentheorie von Aufg. 7.1.8)

Der etwas skurrile und altmodische Statistiker S steht als Aristoteles-Fan modernem Gedankengut nicht sehr aufgeschlossen gegenüber (und auch modernen Frauen, die nach seiner Erfahrung mehrheitlich weder von der Statistik, noch von Aristoteles begeistert sind). Mit einem nicht ungefährlichen Besuch von S im feuchten Sumpfbereich des Amazonas bei den Kopfjägern gelang es ihm, die aristotelische Frauentheorie eindrucksvoll empirisch zu überprüfen.



Seine Statistik der Zeugungsumstände, die ihm fast den Kopf gekostet hätte, ergab die folgenden Daten:

Umstände	Anteil "Mädchen"	Geburten insgesamt (n)
widrig	$p_W = 0,75$	32
nicht widrig	$p_N = 0,25$	32

- a) Man teste auf einen signifikanten Unterschied ( $\alpha = 5\%$ )
- b) Gewöhnlich folgt man der modernen Auffassung, wonach die Wetterbedingungen während der Zeugung für das Geschlecht der Leibesfrucht nicht relevant sind.

Gleichwohl sollte man sich fragen, wie groß  $\Delta$  sein müßte, um Zweifel zu bekommen, ob Aristoteles nicht doch Recht hatte ( $\alpha=5\%$ , einseitig):

Umstände	Mädchen-Geb.	Geb. insgesamt
widrig	$16 + \Delta$	32
nicht widrig	16	32

- c) Angenommen, die Anteile unterscheiden sich bloß um 2%, so dass gilt  $p_N=0,5$  und  $p_W=0,52$ . Wie groß müßten die beiden (gleich großen) Stichproben  $n_N=n_W=n$  sein, um zu einer Annahme der Aristoteles-Hypothese zu neigen (signifikanter Unterschied;  $\alpha=5\%$  einseitig)? Wieviel mehr Mädchengeburten unter widrigen Zeugungs-umständen als unter nichtwidrigen wären dann nötig?

**Aufgabe 9.2.5**

Bekanntlich fördert schon seit unvordenklichen Zeiten Angst und Streß das Auftreten aggressiver Verhaltensweisen. Zwei unabhängige Stichproben vom Umfang  $n_1=50$  (Experimentgruppe) und  $n_2=40$  (Kontrollgruppe) wurden hinsichtlich der Häufigkeit aggressiven Verhaltens untersucht, wobei die Gruppe 1 permanent einem Streß ausgesetzt war.

Die Anteile aggressiver Personen waren:  $p_1=1/2$  und  $p_2=1/8$ . Ist der Unterschied signifikant ( $\alpha=1\%$ , einseitig)?



**Aufgabe 9.2.6**

Bekanntlich ist der Erfolg fliegerischer Aktivitäten bei Gewitter (G) in einem höheren Maße gefährdet, als bei schönem Wetter (S). Ein aussagefähiger Indikator für den Erfolg solcher Betätigungen dürfte die Variable X sein, die zum Ausdruck bringt, in welchem Ausmaß die Anzahl der Landungen von Luftfahrzeugen (LFZ) aller Art am beabsichtigten Ort und in be-



friedigender Weise (so dass der Pilot nach der Landung das LFZ ohne fremde Hilfe verlassen kann) die Anzahl der Starts an einem Tag unterschreitet.

Eine Auswertung von  $n_G=100$  Gewitter- und  $n_S=200$  Schönwettertagen ergab  $\bar{x}_G = 8$  und  $\bar{x}_S = 4$  und es seien  $\sigma_G^2 = 30$  und  $\sigma_S^2 = 12$  die bekannten Varianzen.

- Man überprüfe die Hypothese  $H_0: \mu_G = \mu_S$  mit  $\alpha=0,0228$  einseitig.
- Die Daten scheinen dafür zu sprechen, dass Fliegen im Gewitter doppelt so gefährlich ist, wie bei schönem Wetter im Sinne der Hypothese  $H_0: \mu_G = 2\mu_S = 2\mu$ . Gilt dies für beliebige Werte von  $\mu$  ?

### Aufgabe 9.2.7

Um das technische Interesse von Jungen (M) und Mädchen (W) zu vergleichen, wurde  $n_M=30$  Schüler und  $n_W=20$  Schülerinnen ein Test vorgelegt, bei dem maximal 12 Punkte zu erreichen waren. Man erhielt folgende Stichprobenergebnisse:

$$\bar{x}_M = 4,13 \qquad \bar{x}_W = 2,9$$

$$s^2_M = 7,4 \qquad s^2_W = 9,3.$$

Weist das Ergebnis auf einen signifikanten Unterschied hin ( $\alpha=5\%$ ) hin (Hinweis: mit homogenen Varianzen rechnen)?

## Aufgaben zu Kapitel 10

### Aufgabe 10.1.1

Der erotomane Bankangestellte B behauptet, dass sich zwischen 80 und 90 Prozent seiner Tanzpartnerinnen nach dem Tanz noch zu einem Tässchen Bouillon in seine Wohnung einladen lassen, und dass er sich dabei mit 90% sicher sein kann. Wie groß muß  $n$  sein?



### Aufgabe 10.1.2

In einer Gemeinde mit  $N=10.000$  Erwerbstätigen wurden durch eine Stichprobe im Umfang  $n=100$  folgende Werte für die Verteilung der Wochenverdienste festgestellt:

$$\bar{x} = 400 \text{ DM} \qquad \text{und} \qquad \hat{\sigma} = 50 \text{ DM.}$$



- a) Bestimmen Sie ein 95% symmetrisches Konfidenzintervall für  $\mu$  !
- b) Würde sich das Konfidenzintervall verringern oder vergrößern, wenn eine entsprechende Stichprobe in einer Gemeinde mit  $N = 90.000$  Erwerbstätigen gezogen worden wäre?
- c) Angenommen  $N$  ist sehr groß (gegenüber  $n$ ). Wie groß müßte der Stichprobenumfang  $n$  mindestens sein, um bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95% eine Stichprobenaussage mit einem absoluten Fehler von 20 DM (von 2 DM) erzielen zu können?

### Aufgabe 10.1.3

- a) Bei einer Wahlumfrage (Stichprobe) möge die Schätzung des Anteils  $\pi$  der Wähler der Partei xyz vom wahren Wert höchstens absolut um 1 vH abweichen mit einer Wahrscheinlichkeit von 90%. Wieviele Personen sind zu befragen?
- b) Wieviele Personen müßte man befragen, wenn man mit gleicher Wahrscheinlichkeit einen Fehler von höchstens einem halbem Prozent in Kauf nehmen will?
- c) Wenn sich die "Parteienlandschaft" mehr und mehr zu zwei großen Parteien verdichtet (oder entsprechend auf einem Markt ein Duopol entsteht), werden dann Wahlprognosen (oder Marktforschungen) schwieriger oder leichter?

### Aufgabe 10.1.4

Für viele Autoren gilt eine Stichprobe dann als "repräsentativ", wenn sie "ein getreues Abbild der Realität darstellt", "wenn die Merkmale und ihre Verteilung in der Stichprobe und der Grundgesamtheit übereinstimmen" ("Repräsentanz = Strukturidentität"). Die Grundgesamtheit bestehe aus 5 Einheiten mit den Merkmalswerten  $x_1=100$ ,  $x_2=150$ ,  $x_3=850$ ,  $x_4=1200$  und  $x_5=1700$  ( $\mu=800$ ).

- a) Eine der 10 möglichen Stichproben vom Umfang  $n=2$  ergab  $x_1=100$ ,  $x_2=150$  (also  $\bar{x} = 125$ ). Kann man sagen, dass sie deshalb nicht repräsentativ ist?
- b) Welche der 10 Stichproben ist ein "getreues Abbild" im obigen Sinne?
- c) In dem hier und in Aufg. 9.1.10 zitierten Buch (S. 369, 398) heißt es ferner, ein indirekter Schluß sei nur zulässig, wenn eine Stichprobe in diesem Sinne repräsentativ ist. Ist dies richtig?

### Aufgabe 10.1.5

Wenn ein Phänomen wie etwa R (Reinkarnation) bislang noch nicht zweifelsfrei nachgewiesen werden konnte, ist dies bekanntlich noch kein Beweis dafür, dass es gar nicht existiert. Es könnte ja sein, dass es nach vielen tausend untersuchten Fällen doch zum ersten Mal auftritt. Es ist zwar klar, dass R nie beobachtet werden kann, auch nicht bei einem noch so großen Stichprobenumfang  $n$ , wenn die Wahrscheinlichkeit  $\pi$  des Eintretens von R genau Null ist.

Aber es könnte doch sein, dass  $\pi$  nur sehr klein ist und R deshalb mit hoher Wahrscheinlichkeit auch bei großem  $n$  nie auftritt.

Wie groß sollte die Anzahl  $n$  der untersuchten Fälle ohne  $R$  sein, wenn Sie

- a) von der Hypothese  $H_0: \pi = \pi_0 = 0,01$  ausgehen und diese bereit sind auf einem Signifikanzniveau von  $\alpha = 0,05$  zugunsten von  $H_1: \pi < \pi_0$  zu verwerfen, wenn es mehr als  $n$  Beobachtungen ohne  $R$  gibt?
- b) von  $\pi_0 = 0,001$  und  $\alpha = 0,01$  ausgehen?



**Aufgabe 10.2.1**

Durch eine Stichprobe von  $n=2.000$  Fernsehteilnehmern (Auswahlsatz  $1/3.000$ ) wurde festgestellt, dass sich leider nur  $1\%$  in die belehrende und amüsante Vorlesung über das hochalpine Faustrecht mit praktischen Übungen von Prof. Dr. jur. X eingeschaltet haben. Man bestimme das  $90\%$ -Konfidenzintervall und rechne die Konfidenzgrenzen hoch.

**Aufgabe 10.3.1**

Die Merkmalswerte der  $N=6$  Einheiten der Grundgesamtheit seien  $1, 2, 7, 10, 16$  und  $40$  ( $\sigma=13,21$ ). Die ersten vier Einheiten bilden die Schicht 1 ( $\sigma_1=3,67$ ) und die beiden letzten die Schicht 2 ( $\sigma_2=12$ ). Man berechne

- a) die Standardabweichung der Stichprobenverteilung des Mittelwertes bei einer ungeschichteten Stichprobe mit  $n=3$ !
- b) Die Standardabweichung bei einer geschichteten Stichprobe mit proportionaler Aufteilung.

**Aufgabe 10.3.2**

Gegeben sei eine Grundgesamtheit von  $900$  Betrieben, die sich wie folgt in zwei Schichten nach Maßgabe des Jahresumsatzes  $x$  (in  $1.000$  DM) aufteilen lassen.

Schicht $k$	$N_k$	$\mu_k$	$\sigma_k^2$
1	800	200	900
2	100	1100	8100

Für die Grundgesamtheit gilt dann  $\mu=300$  und  $\sigma^2=81.700$ . Man möchte 10% der Unternehmen befragen. Die Stichprobenverteilung des Mittelwerts  $\bar{X}$  hat jeweils den Erwartungswert von  $E(X)=300$ . Welche Varianz hat sie im Falle

- a) einer ungeschichteten Stichprobe (uneingeschränkte Zufallsauswahl)
- b) einer geschichteten Stichprobe und zwar
  - bei proportionaler Aufteilung
  - bei optimaler Aufteilung
 Man interpretiere das Ergebnis!

**Aufgabe 10.3.3**



Seit Dipl.-Kfm. K aus E auf Busfahrer umgesattelt hat, interessiert er sich nur noch für das Konfidenzintervall seiner durchschnittlichen Trinkgeldeinnahmen bei Sonderfahrten.

Das Unternehmen, bei dem er arbeitet, veranstaltete  $N=1.000$  Sonderfahrten: 80% Fahrten zu Fußballspielen (F) und 20% Wochenendausflüge von Kleingärtnern (G). Die 20 Fahrten des K seien als geschichtete Stichprobe aufzufassen:

$$n_F=16, \quad \bar{x}_F=50, \quad \sigma_F^2=400$$

$$n_G=4, \quad \bar{x}_G=70, \quad \sigma_G^2=900$$

Von besonderem Interesse ist es für K zu wissen, ob er signifikant mehr Trinkgeld von den Kleingärtnern als von den Fußballfans zu erwarten hat ( $\alpha=0,05$ ).

Wie ist bei den obigen Zahlenangaben eine geschichtete Stichprobe vom Umfang  $n=20$  in  $n_F$  und  $n_G$  aufzuteilen, wenn die Aufteilung proportional (optimal) sein soll?

**Aufgabe 10.3.4**

Gegeben sei eine Grundgesamtheit mit den Schichten-Anteilen  $f_1=N_1/N$  und  $f_2=N_2/N$ . Zeigen Sie, dass die Varianz der Stichprobenverteilung von  $\bar{x}$  im Falle der ungeschichteten Stichprobe

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{n} \left[ f_1 f_2 (\mu_1 - \mu_2)^2 + V_{11} + V_{12} \right]$$

lautet und im Falle der geschichteten Stichprobe

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{f_1 V_{11}}{n_1} + \frac{f_2 V_{12}}{n_2}$$

bei  $V_{11} = f_1 \sigma_1^2$  und  $V_{12} = f_2 \sigma_2^2$ . Erklären Sie anhand dieser Herleitung den Schichtungseffekt. Kann kein Schichtungseffekt eintreten, wenn  $\mu_1 = \mu_2$  ist?

## Lösungen der Übungsaufgaben

### Kapitel 1

1.1, 1.2 Die Stichprobenräume sind formal identisch mit 9 Elementen  $\Omega = \{AA, AB, \dots, CC\}$ . Dann ist AA eines von 9 Elementen, Wahrscheinlichkeit: 1/9.

### Kapitel 2

2.1  $V = 12$  ( $n = 4; i = 2$ )

2.2  $P_w = 12.600$

2.3 a)  $K = \binom{49}{6} = 13.983.816$       b)  $K = \binom{48}{5} = 1.712.304$

2.4 vierstellig

2.5 a)  $\binom{20}{5} \binom{8}{3} \binom{2}{1} = 1.736.448$       b)  $\binom{17}{2} \binom{6}{1} = 816$

2.6 a)  $V_w = 5^7 = 78.125$       b)  $K_w = \binom{11}{7} = 330$

2.7  $\frac{\binom{n-3}{r-1}}{\binom{n-1}{r-1}}$

2.8 a) 0,4      b)  $1 - 1/10 = 0,9$       c) 0,5

2.9 a)  $P = 120$       b)  $P = (n-1)! = 24$

2.10  $1 - 0,88305 = 0,11695$

### Kapitel 3

#### 3.1.1

	Aussage	gilt stets	gilt nur, wenn ...	gilt nie
1	wenn $AB \subset AC$ , dann $B \subset C$		zugleich gilt: $BC = B$	
2	wenn $ABC=AB$ dann $B \subset C$		zugleich gilt: $BC = B$	
3	$(A \cup B) - A = B$		$A \cap B \neq \emptyset$	
4	$\Omega - (A \cup C) =$ $\overline{A \cap B}$	X		
5	$(A-B) \cup (A-C)$ $= A-BC$	X		
6	$\overline{AB - AC} = BC$			X
7	$AB - AC =$ $AB - ABC$	X		
8	$A - B = B - A$		$A = B$	

3.1.2, 3.1.3 Lösung hier zu platzaufwendig

3.2.1 nein, denn  $P(A \cup B \cup C \cup D) = P(\Omega) = 10/12 < 1$  und  $P(A \cup D) = 7/12 > 1/2$

3.2.2 Ereignisfeld (Potenzmenge),  $(\emptyset, V, M, S, \dots, VM, VK, MK, \dots, \Omega)$  diese Menge hat insgesamt  $2^4=16$  Elemente

3.2.3 subjektiv

3.2.4 a), b) nein c) ja

3.2.5 a) keine Folgerung,  $(1 - 1/5000000)^{1000000}$  b) statistisch  
c)  $\Omega = G \cup K \cup \overline{V}$ ; unmöglich ist  $G \cap \overline{V}$ ; weil  $\emptyset$  nicht enthalten

3.3.1  $P(A \cup B) = 0,25 + 0,3 - 0,05 = 0,5 < 1$ , daher muß es noch mehr Stockwerke geben

3.3.2  $P(B \cup C) = 0,4$   $P(A \cap C) = 0,2$   $P(A \cap B) = 0,1$   $P(A \cup B \cup C) = 0,62$

3.4.1 a) 0,2258 b) 0,21875  
[Zusatzfrage: a) 0,2379, b) 0,2344]

- 3.4.2 a)  $P(x=0)=0,729$ ,  $P(x=1)=0,243$ ,  $P(x=2)=0,027$ ,  $P(x=3)=0,001$  siehe auch Binomialverteilung;  
 b)  $E(X) = 0,3$  c) 10 Kugeln, davon 9 weiße u. 1 schwarze (Erfolg, Motor fällt aus), dreimal Z.m.Z.
- 3.4.3 4
- 3.4.4  $P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = 0,5833$  von einem ... = 0,3458
- 3.4.5 Teilereignis  $R \subset S$ , deshalb  $P(R) < P(S)$  und  $P(R) = P(RS)$
- 3.4.6 erstes Spiel:  $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0,5177$  zweites Spiel:  $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0,4914$
- 3.4.7 0,05
- 3.4.8 die einzelnen Partitionen kommen bei  $6^3=216$  Versuchsausgängen unterschiedlich häufig vor, nämlich  $3! = 6$ ,  $3!/2!1! = 3$  und 1 mal, so daß  $P(x=9)=25/216$  und  $P(x=10)=27/216$  gilt.
- 3.4.9  $P(A)=11/36$ ,  $P(B)=5/36$ ,  $P(A \cap B)=2/36 \Rightarrow P(A|B)=2/5$   
 stochastisch abhängig wegen  $P(A|B) \neq P(A)$ .
- 3.4.10 erste Summe immer 1, zweite Summe bei Unabhängigkeit  $2 P(A)$ .
- 3.4.11 aa) 0,565 ab) 0,0247 ac) 0,1357 b) stoch. abhängig, weil  $P(S | R) \neq P(S | \bar{S})$
- 3.4.12 14/15
- 3.4.13 a)  $P(A|B)=0,3$ ,  $P(AB)=0,06$ ,  $P(\bar{T}|\bar{A}\bar{B})=0$ ,  $P(A \cup B)=0,44$   
 $P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B)=0,38$ ,  $P(\bar{A} \cup \bar{B})=0,56$ ,  $P(A\bar{B})=0,24$ ,  
 $P(\bar{T}|AB)=0,2$ ,  $P(T)=0,048$   
 b) Stichprobenraum, Zerlegung, unverträglich  
 c) 0,8824 d) 0,3828
- 3.4.14 a) 0,18 b) 0,62 c) 0,44 d) 0,38
- 3.4.15 a) 0,8824 b) 0,979; 0,904  
 c)  $P(A \cap S)=0,32$ ,  $P(A)=0,56$ ,  $P(S|A)=0,571$ ,  $P(A \cup \bar{A})=1$ ,  $P(A-S)=0,24$   
 d) A-S, S,  $\overline{A \cup S}$  mit Wahrsch. 0,1, 0,6 und 0,3
- 3.4.16  $P(N) = 0,514$ ,  $P(NK) = 0,51$
- 3.4.17 Demonstrationsbeispiel: paarweise Unabhängigkeit impliziert nicht wechselseitige Unabhängigkeit.
- 3.4.18 a)  $P(F) = 0,7$ ,  $P(\bar{H}) = 0,2$ ,  $P(H|F) = 0,9$

	F	$\bar{F}$	$\Sigma$
H	0,63	0,17	0,8
$\bar{H}$	0,07	0,13	0,2
$\Sigma$	0,7	0,3	1

1)  $P(\bar{H} \cap \bar{F}) = 0,13$

2)  $P(H \cap F) = 0,63$

3)

$$P(H \cup F) - P(H \cap F) = P(H) + P(F) - P(H \cap F)$$

$$= 0,8 + 0,7 - 2 \cdot 0,63 = 0,24$$

oder

$$P(\bar{H} \cap F) + P(\bar{F} \cap H) = 0,07 + 0,17 = 0,24$$

b) Nein, da z.B.  $P(H) \cdot P(F) = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56 \neq P(H \cap F) = 0,63$

c)  $P(B|H) = 0,1$ ,  $P(B|\bar{H}) = 0,05$

$$P(B) = P(B|H) \cdot P(H) + P(B|\bar{H}) \cdot P(\bar{H})$$

$$= 0,1 \cdot 0,8 + 0,05 \cdot 0,2 = 0,08 + 0,01 = 0,09$$

3.5.1 a) 0,42; 0,1429      b) für y: 0,42, 0,4286, für Z: 0,42, 0,6

3.5.2 a) nein,  $P(S|D) > P(S|\bar{D})$       b) 0,12      c) 0,25

3.5.3 a) 0,9

b)  $P(B)=0,6$ , wobei  $P(x=0)=0,3$ ,  $P(x=1)=0,6$  u.  $P(x=2)=0,1$  mit der hypergeometrischen Verteilung zu bestimmen wären; totale Wahrsch.

c)  $P(x=0|B)=0,45$        $P(x=2|B)=0,05$

3.5.4 0,0515

3.5.5 1/3, 5/6

3.5.6  $P(X)$  ist die Wahrsch. dafür, daß ein Spieler mit einem Restkapital von  $X$  ruiniert wird. Aus  $P(0)=1$  und  $P(B)=1$  sowie  $P(X) = \frac{1}{2} [P(X+1)+P(X-1)]$

folgt: 
$$P(X) = 1 + \left(-\frac{1}{B}\right) X = 1 - \frac{X}{B}$$

## Kapitel 4

4.1.1 a) 8 Möglichkeiten;  $P(x=0)=1/8$ ,  $P(x=1)=3/8$ ,  $P(x=2)=3/8$ ,  $P(x=3)=1/8$

b)  $P(x=0)=8/27$ ,  $P(x=1)=4/9$ ,  $P(x=2)=2/9$ ,  $P(x=3)=1/27$

c) für Teil a):  $E(X)=1,5$ ,  $V(X)=0,75$

für Teil b):  $E(X)=1$ ,  $V(X)=2/3$ ,  $\sigma=0,8165$

- 4.1.2 a)  $F(x) = \frac{1}{4}x^2$   $E(X) = \frac{4}{3}$       b)  $P(0,5 \leq x \leq 1,5) = 0,5$
- 4.1.3 a)  $\int_a^b f(x)dx = 1$  und  $f(x) \geq 0$       b)  $P(1 \leq x \leq 5) = 41/54$   
 c)  $E(X)=3, V(X)=2,4$
- 4.1.4 Erwartungswert jeweils 4,8 (keine Entscheidung nach max. Erwartungswert [Bernoulli-Kriterium] möglich).
- 4.1.5 unendlicher Erwartungswert  $\Rightarrow$  unendlich hoher Einsatz wird trotzdem nicht gewagt; Paradoxon des Petersburger Spiels: Nutzen  $\neq$  Geldeinsatz .
- 4.1.6 Beweise einfach mit  $q=1/2$ .  $f(y) = (y-1)(1/2)^y$  wenn  $y \geq 2$  .
- 4.1.7 zwar gilt  $F(10) = 1$ , nicht jedoch  $f(x) > 0$  für alle Werte von  $x$ .
- 4.1.8  $E(X)=0,58$ , bedingte Wahrscheinlichkeit, Likelihood,  $P(D)=0,8$  .
- 4.1.9 a) Fläche unter  $f(x)$  ist 1,  $f(x) \geq 0$ ,  $f(x) > 1$  für  $x > 0,63$   
 b)  $E(X)=0,8, V(X)=0,0267$
- 4.1.10  $\sum_{x=1}^n \frac{1}{x(x+1)} = \frac{n}{n+1}$       mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} [n/(n+1)] = 1$  .  
 unendlicher Erwartungswert:  $E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \sum \frac{1}{x} - 1$ , wobei die harmonische Reihe  $\sum(1/x)$  nicht konvergiert .
- 4.1.11 a)  $F(10)=1$       b)  $E(X) = |10 \ln x|_{10}^{\infty}$
- 4.1.12 a) übliches Verfahren  $f(x) > 0, F(3)=1$       b) nur letzte Antwort richtig  
 c)  $E(X)=27/24=1,125, V(X)=0,6094$   
 d)  $E(Y)=4,5; V(Y)=2,4375$  .
- 4.1.13 a) eindim., stetig, asymmetr., stückweise linear (Dreiecksvert.)  
 b)  $P(x \geq 10)=1/6$   
 c) Normalverteilung mit  $\mu = 7$  und  $\sigma = 2$ ;  $P(x > 10) = 0,0668$ .

4.1.14 Lösung hier zu aufwendig

4.2.1 a)

	X=0	X=1	$\Sigma$
Y=0	4/9	2/9	6/9
Y=1	2/9	1/9	3/9
$\Sigma$	6/9	3/9	1

$P(X = 0|Y = 0) = P(X = 0|Y = 1) = 2/3$   
 $P(X = 1|Y = 0) = P(X = 1|Y = 1) = 1/3$



$$P(Y=0|X=0) = P(Y=0|X=1) = 2/3$$

$$P(Y=1|X=0) = P(Y=1|X=1) = 1/3$$

$$E(X) = E(Y) = 1/3, E(XY) = 1/9, C(XY) = 0$$

b)

	X=0	X=1	$\Sigma$
Y=0	$2/3 \cdot 3/5=2/5$	$1/3 \cdot 4/5=4/15$	2/3
Y=1	$2/3 \cdot 2/5=4/15$	$1/3 \cdot 1/5=1/15$	1/3
$\Sigma$	2/3	1/3	1

$$P(X=0|Y=0) = 3/5 \quad P(X=0|Y=1) = 4/5$$

$$P(X=1|Y=0) = 2/5 \quad P(X=1|Y=1) = 1/5$$

$$P(Y=0|X=0) = 3/5 \quad P(Y=0|X=1) = 4/5$$

$$P(Y=1|X=0) = 2/5 \quad P(Y=1|X=1) = 1/5$$

$$E(X) = E(Y) = 1/3; C(XY) = -0,0444$$

4.2.2

a)

	Y=0	Y=1	$\Sigma$
X=0	0,11	0,02	0,13
X=1	0,72	0,15	0,87
$\Sigma$	0,83	0,17	1

$$E(X)=0,87, E(Y)=0,17$$

$$P(X=0|Y=0) = 0,1325 \quad P(X=0|Y=1) = 0,1176$$

$$P(Y=0|X=0) = 0,8462 \quad P(Y=0|X=1) = 0,8276$$

$$E(X|Y=0) = 0,8675 \quad E(X|Y=1) = 0,8824$$

$$E(Y|X=0) = 0,1538 \quad E(Y|X=1) = 0,1724$$

b)  $C(XY) = 0,15 - 0,87 \cdot 0,17 = 0,0021$   
 $V(X)=0,1131; V(Y)=0,1411; \rho_{XY} = 0,0166$

4.2.3  $f_1(x) = \frac{1}{4}x + \frac{7}{8} \quad f_2(y) = \frac{21}{8}y^2 + \frac{1}{8} \quad P(0 \leq x \leq 0,5; 0 \leq y \leq 0,5) = 0,0703125.$

4.2.4  $P(A) = F_1(b_1) - F_1(a_1), P(C)$  entsprechend,  $P(A \cup C) = \int_{a_1}^{d_1} f_1(x_1) dx_1,$

$$P(AB) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2) dx_2 dx_1$$

4.2.5

a)

	y=1	y=2	y=3	$\Sigma$
x=1	0,05	0,05	0	0,1
x=2	0,05	0,15	0,1	0,3

x=3	0	0,15	0,45	0,6
Σ	0,1	0,35	0,55	1

b) Nein, da z.B.

$$f(y=1) \cdot f(x=1) = 0,1 \cdot 0,1 = 0,01 \neq f(x=1; y=1) = 0,05$$

c)  $P(x \leq 2; y \leq 2) = 0,05 + 0,05 + 0,05 + 0,15 = 0,3$

d)  $P(x=1 | y=1) = \frac{0,05}{0,1} = 0,5$

$$P(x=2 | y=1) = \frac{0,05}{0,1} = 0,5$$

$$P(x=3 | y=1) = 0$$

$$E(x | y=1) = 1 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,5 = 1,5$$

4.2.6 a)  $\int_0^2 \int_0^1 \frac{3}{2} x^2 y dx dy = \int_0^2 \left[ \frac{1}{2} x^3 y \right]_0^1 dy = \int_0^2 \frac{1}{2} y dy = \left[ \frac{1}{4} y^2 \right]_0^2 = 1$

$$f(0,5 < x \leq 1; 0 \leq y \leq 1) = \int_{0,50}^1 \int_0^1 \frac{3}{2} x^2 y dx dy = 0,21875$$

b)  $f(x) = \int_0^2 \frac{3}{2} x^2 y dy = 3x^2$ ;  $f(y) = \int_0^1 \frac{3}{2} x^2 y dx = \frac{1}{2} y$

$$f(x)f(y) = 3x^2 \cdot \frac{1}{2} y = \frac{3}{2} x^2 y = f(xy)$$

X und Y sind unabhängig

4.3.1  $E(Z)=2,5$   $V(Z)=0,36$

4.3.2  $E(Z)=0$   $V(Z)=1$ , (Standardisierung!)

4.3.3 a)  $E(X)=1,4$ ,  $E(Y)=1,2$ ,  $V(X)=0,24$ ,  $V(Y)=0,76$ ,  $C(X,Y)=-0,08$ , Korrelation  $\rho=-0,187$

b)  $E(Z_1)=2,6$ ,  $V(Z_1)=0,84$ ,  $E(Z_2)=3,8$ ,  $V(Z_2)=2,96$

c) vgl. Sätze über Linearkombinationen

4.3.4  $V(Z)=60$ ; Antwort 120 ist falsch, weil  $X+X$  und  $2X$  verschiedene ZVn sind.

4.3.5  $E(Z_1)=0$   $E(Z_2)=1,94$   $E(Z_3)=7$   $E(Z_4)=12,25=3,5^2$

## Kapitel 5

5.1.1  $E(X)=3,5$   $V(X)=0,75$

5.1.2  $f(x) \begin{cases} 1/365 & \text{für } x = 1 \text{ (Ereignis } S) \\ 364/365 & \text{für } x = 0 \text{ (Ereignis } \bar{S}) \end{cases}$

Zweipunktvert.,  $E(X)=1/365$ ,  $V(X)=364/365^2$

- 5.1.3  $x_2=a$ ,  $V(X)=a-1$
- 5.2.1  $1 - F(5) = 0,3349$
- 5.2.2 geometrische Verteilung  $\pi=1/10$ ,  $E(X)=(9/10):(1/10)=9$
- 5.2.3 keine: 0,5129, eine: 0,3664, höchstens zwei: 0,984  
Z.m.Z.: konstante Erfolgswahrscheinlichkeit
- 5.2.4 "keiner":  $f(0)=0,00001$  "einer":  $f(1)=0,00045$
- 5.2.5  $P(x=2) = 0,3292$  mit:  $n=6$  und  $\pi=1/3$
- 5.2.6 116
- 5.2.7  $P(x \leq 4) = 0,247$
- 5.2.8 a)  $P(x=800) = \binom{1000}{800} 0,9^{800} 0,1^{200}$  b)  $1 - P(x=N) = 1 - 0,9^{1000}$   
c)  $E(N-X)=N-E(X)=100$  d) keine, denn  $2\pi > 1$
- 5.2.9  $P(70 \leq x \leq 110) = P(-2,2 \leq z \leq 2,2) = 0,9722$ , Approximation der B.V. durch die N.V.
- 5.2.10 a)  $f_G(5)=0,0311$  b)  $F_G(10)=0,9964$  c)  $f_B(2)=0,3456$   
d)  $f_B(0)=0,6^{20}$  e) 0,096  
f)  $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - (1 - 0,4^2) = 0,16$   
g) 0,1037
- 5.2.11 a)  $\binom{10}{5} 0,3^5 0,7^5$  b)  $\binom{10}{0} 0,3^0 0,7^{10} + \dots + \binom{10}{4} 0,3^4 0,7^6$   
c)  $0,7^9 0,3 = 0,0121$  d)  $F_G(9) - F_G(4) = 0,1398$
- 5.2.12  $\frac{10!}{3!2!5!} 0,3^3 0,1^2 0,6^5 = 0,0529$
- 5.2.13 a) 0,5033 b) 0,05243 c)  $E(X)=4$ ,  $V(X)=20$
- 5.2.14 bei  $n$  Nägeln  $n+1$  Becken,  $\binom{n}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ , erstes Becken:  $0,125=(1/2)^3$   
zweites Becken:  $0,375=3(1/2)^3$ , Wege: erstes 1Weg, zweites 3 Wege
- 5.3.1  $f_H(x=2|10,8,2) = 0,6222$ , aber  $f_H(x=2|20,16,2) = 0,6316$   
nicht halb so groß, sondern größer; aber  $f_H(x=2|20,16,4) = 0,3756$
- 5.3.2 Lösung mit  $N=49$ ,  $n=6$ ,  $M=6$  über die hypergeometrische Verteilung mit  $x=1, 2, \dots$

- 5.3.3 a)  $f_H(3) = 0,193$     b)  $x=2$
- 5.3.4 a) nur 0,0286    b)  $1/(15 \cdot 14 \cdot 13)$
- 5.3.5 a)  $f_H(0) = 0,3$      $f_H(1) = 0,6$      $f_H(2) = 0,1$   
 b) ja, da  $P(x=0)$  bei steigendem  $N$  größer wird, während  $P(x>0)$  sinkt  
 c) nein, man kann nicht  $E(X)>0$  vermeiden, wenn man nur die richtigen Kreuze zählt und  $M>0$  Antworten richtig und anzukreuzen sind.  
 d und e) ja, wenn  $(M+1)^2 < N+2$

- 5.3.6 a) ja, Binomialvert. ist unangemessen, da ein Unternehmen ja nicht mehrfach im Kartell vertreten sein kann.  
 b)  $N=10 \rightarrow f_H(x \geq 2)=0$ ,     $N=20 \rightarrow f_H(x \geq 2)=0,0316$   
 c) etwa  $N = 300$  (dann aber Kartellbildung auf einem solchen Markt ziemlich unwahrscheinlich).

- 5.3.7 (Capture-Recapture-Problem)  
 a) hypergeometrisch,  $M=20$ ,  $x=4$ ,  $n=20$ ,  $N$  gesucht

$$b) f_H(4) = \frac{\binom{20}{4} \binom{60}{16}}{\binom{80}{20}}$$

- c) Rekursionsformel!  $f(5) > f(4)$   
 d) Antwort wie b) mit  $f_H(2)+\dots+f_H(6)$   
 e)  $N$  mind. 36, ML-Schätzer für  $N$ : 99

- 5.3.8 a) beide Aussagen sind verbreitete Irrtümer  
 b,c) beide Serien sind gleichwahrscheinlich  
 Alle Aussagen/Fragen betreffen "the gamblers mistake".

- 5.4.1 a) Binomial: 0,9608    Poisson: 0,9608  
 b) Binomial: 0,0385    Poisson: 0,0384

- 5.4.2  $1 - F(5) = 0,0839$ ,  $P(\lambda=3)$ -verteilt

5.4.3

x	0	1	2	3	4	5+
n·f(x)	227	211	98	31	7	2

- 5.4.4 nicht wieder ( $x=0$ ): Binomialvert.  $(1-\pi)^n = (1-0,005)^{40}=0,8183$   
 Poissonvert.:  $e^{-n\pi}=e^{-0,2}=0,8187$   
 wieder ( $x=1$ ): Binomialvert. 0,1645  
 Poissonvert.: 0,1637

5.4.5 gleicher Vorgang, bloß anders beschrieben:  $e^{-40 \cdot 0,005} = 0,8187$ , denn  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \pi)^n = e^{-n\pi}$ .

5.4.6 a)  $P_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = e^{-1} = 1/e = 0,3679$  (kontraintuitiv, man würde 1 vermuten!)

c)  $P_n = e^{-k}$  (man würde vermuten, daß P auch von n abhängt)

5.4.7 ja, da nur geringe Abweichungen; Häufigkeiten: 108,8, 66,2, 20,2, 4,2, 0,6

5.4.8

empirische relative Häufigkeiten	theoretische relative Häufigkeiten	absolute Häufigkeiten
$h_i$	Poisson $\lambda=0,7$	$\hat{n}_i$
0,5162	0,4966	215
0,3287	0,3476	150
0,1111	0,1217	53
0,0347	0,0284	12
0,0093	0,0050	2
0	0,0008	0

5.4.9

$x_i$	$n_i$	$h_i$	$f(x)$	$\hat{n}_i$
0	100	0,595	0,575	96,6
1	50	0,298	0,318	53,4
2	14	0,083	0,088	14,8
3	3	0,018	0,016	2,7
4	0	0	0,002	} 0,5
5	0	0	0,0002	
6	1	0,006	0,000	
7	0	0	-	-

5.4.10  $\lambda = 0,2$ ,  $f(3) = 0,0011$ .

### Kapitel 6

6.1.1 a)  $f(x) = \begin{cases} x/c^2 & \text{für } 0 \leq x \leq c \\ 2/c - x/c^2 & \text{für } c < x \leq 2c \end{cases}$  symm. Dreiecksverteilung

b)  $\sigma^2 = (1/6)c^2$ , also  $c=9=E(X)$

c) 2/9

- 6.2.1  $z=1,6$ ,  $F(z)=0,9452$ , gesuchte Wahrsch.:  $1-0,9452=0,0548$
- 6.2.2 a) 0,6827                      b) 0,0228                      c) 0,0668
- 6.2.3 Binomialvert.:  $P(x \leq 2) = 0,9842$ ,  $P(1 \leq x \leq 2) = 0,5624$   
Normalvert.:  $P(x \leq 2) = 0,9594$ ,  $P(1 \leq x \leq 2) = 0,3415$
- 6.2.4  $\mu=100$ ,  $\sigma=24,3175$   
 $P(x < 80) = 0,2119$  ( $z = -0,82$ );  $P(90 < x \leq 110) = P(-0,41 < z \leq 0,41) = 0,3108$ .
- 6.2.5 vgl. 5.2.20
- 6.2.6 a)  $z=2 \rightarrow P(z \geq 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$ ;  
b) Tschebyscheff:  $P(|x - 25| \geq 2 \cdot 10) \leq \frac{1}{2^2}$ . Hier wird allerdings nur nach der rechten Seite des Intervalls gefragt, die Wahrscheinlichkeit beträgt also höchstens 0,125.
- 6.2.7 a) 0,0668                      b) 0,5763
- 6.2.8 Voraussetzung dafür, daß alle Personen Platz bekommen ist, daß mindestens drei Personen absagen.  
exakt:  $X \sim B(200; 0,025)$   
 $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0,1214 = 0,8786$   
Poisson:  $X \sim PO(5)$   
 $P(X \geq 3) = 1 - 0,1247 = 0,8753$   
Normal:  
 $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 3)$  [stetig!] = 0,8159  
→ Poissonverteilung besser
- 6.2.9 Ist  $x \sim P(\lambda)$ , so ist  $Z = (X - \lambda) / \lambda^{0,5}$  nicht auch poissonverteilt, schon gar nicht mit  $E(Z) = \lambda_z = 0$ , denn eine Poissonverteilung mit  $\lambda = 0$  und  $E(Z) = 0$  existiert nicht.  $Z$  müßte auch nicht notwendigerweise positiv und ganzzahlig sein, was bei  $P(\lambda)$ -Vert. vorausgesetzt ist.
- 6.2.10 a)  $\Delta = X_1 - X_2 \sim N(-1, 16 + \sigma^2)$   
b)  $x_1 - x_2$  muß  $< 0$  sein, für  $\mu_\Delta = 0$  ist  $z = \frac{\Delta - \mu_\Delta}{\sigma_\Delta} = \frac{1}{6}$ , also  $P(R) = F(z) = 0,56592$   
c)  $F(z)$  wird kleiner  
d)  $X_2$  ist dann eine Konstante:  $X_1 - X_2 = X_1 - 6 = X_1^*$  und  $X_1^* \sim N(-1, 16)$   
weshalb  $P(X_1^* \leq 0) = F(+1/4) = 0,59871 < 1$ .  
e) ja, egal wie groß die Varianzen sind.

**Kapitel 7**

- 7.1.1  $P\{|X - 5| \geq 2\} \leq 0,6$
- 7.1.2 a) höchstens 4/9    b) 0,134    c) 0,134    d) 0
- 7.1.3 Ges. der Gr. Zahl hier völlig unsinnig, da weder ZVn, noch Unabhängigkeit.
- 7.1.4 a) mindestens 3/4    b) 0,9545
- 7.1.5 a)  $P \approx 0,5$  (Rechte Hälfte des Schwankungsintervalls,  $z = 10$ , also  $1 - \alpha$  für das ganze Intervall  $\approx 100\%$ . Gl. 7.10\* mit  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  liefert  $\geq 1 - \frac{1}{100} = 0,99$   
also halbes 'Intervall mindestens 49,5%  
b) kein Widerspruch, Antwort 6 (nicht 2) ist richtig.
- 7.1.6 a) 1: mindestens  $1 - \frac{1}{9} = 0,8889$ , 2: 0,9973,  
b) 1: 0,9545, 2: 0,75 (gl. 7.10\* mit  $\varepsilon = \frac{2}{3}\sigma$
- 7.1.7 a) identische Zweipunktverteilungen, unabh. Versuche (Stichprobenentnahmen),  $n=50.000$  (wenn  $\pi=0,5$ ) und  $18.000$  (wenn  $\pi=0,1$ ).  
b) mit Tschebyscheff  $n=3920$ ; gem. Kap.10:  $n=753$ .
- 7.1.8 a) nach Tschebyscheff mindestens 75%; nach de Moivre Laplace 95,45%  
b) nur letzte Antwort richtig
- 7.1.9 a) damit  $\sigma^2/\varepsilon^2$  nicht größer als 1 ist    b) 1/3  
c)  $f(x) = \frac{1}{2 \cdot \varepsilon}$  für  $c - \varepsilon \leq x \leq c + \varepsilon$
- 7.1.10 Es existiert keine Grenzverteilung, da  $\pi_n$  keinen Grenzwert hat, sondern nur zwei Häufungspunkte (0,275 und 0,525).
- 7.1.11 siehe Vorlesung
- 7.1.12 a) es folgt für  $P\left\{\left|\frac{X}{n} - \pi\right| \leq 0,25\right\} = P$  bei einer echten Münze  
 $n=2 \rightarrow P=0,5$      $n=4 \rightarrow P=0,875$      $n=8 \rightarrow P=0,9296$   
b) unechte Münze: 0,48, 0,72, 0,8448  
(Bei Zwischenwerten [etwa  $n=6 \rightarrow P=0,5872$ ] zeigt sich, daß die Wahrsch. anders als bei a) nicht monoton zunimmt).
- 7.2.1 Demonstrationsbeispiel für Vorlesung; Hinweis:  $E(X)=10=\mu$ ,  $V(X)=9,5$   
für alle  $n$  gilt:  $E(\bar{X})=\mu$

- 7.2.2 m.Z.: Binomialverteilung o.Z.: relativierte hypergeom. Vert.
- 7.2.3 In Analogie zu 7.2.1; Hinweis:  $E(X)=2,4$   $V(X)=1,04$
- 7.2.4 a) zweipunktverteilt  $\pi=0,1$  b), c) Binomialvert. (Anzahl) rel. Binomialvert. (Anteil)  
 c), d) asymptotisch normalverteilt nach dem Grenzwertsatz von de Moivre Laplace  $X \sim N(n\pi, n\pi(1-\pi))$ ,  $x/n \sim N(\pi, \pi(1-\pi)/n)$ .
- 7.2.5 Stichprobenvert. ist  $B(10, 1/6)$   
 a) 0,00217 b) über Bin.: 0,002438; über Norm.: 0,0026
- 7.2.6 a)  $B(n,\pi)$   
 b)  $X/n$  ist relativiert binomialverteilt mit  $E(P)=\pi$  (daher Erwartungstreue); Parameter  $n,\pi$  .  
 c) gleicher Verteilungstyp, Parameter  $n, 1-\pi$  .
- 7.2.7 Stichprobenvert. von  $\bar{x}$  und  $\bar{x}_G$  mit Binomialvert. So ist z.B. bei  $n=2$

$\bar{x}$	$\bar{x}_G$	$P(\bar{x}_G)$
1	1	1/4
1,5	$\sqrt{2}$	1/2
2	2	1/4

$E(\bar{X}) = 1,5 = \mu$ ;  $V(\bar{X}) = 0,125$   
 beachte:  
 $E(\bar{X}_G) = 1,4571 > \mu_G = \sqrt{2}$   
 $V(\bar{X}_G) = 0,1268 > V(\bar{X})$

entsprechende Zusammenhänge bei  $n=3$ .

Das geometrische Mittel der GG wird mit  $\bar{X}_G$  nicht erwartungstreu geschätzt!

- 7.2.8  $y_i = x_i/120$  Lineartransformation!  $\bar{y} \sim N(\mu/120, [1/120]^2 \sigma^2/n)$ .

### Kapitel 8

- 8.1.1  $L(M|n,N,x) = \frac{1}{8} M(4-M)$ ,  $\frac{dL}{dM} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} M$ ; also  $\hat{M} = 2$  (ML-Schätzer) Likelihoods: für  $M=0$  oder  $M=4 \rightarrow 0$ , für  $M=1$  oder  $M=3 \rightarrow 3/8$ , für  $M=2 \rightarrow 1/2$  (Max.) .

- 8.1.2

$\pi$	0	0,1	0,2	0,3	0,4
$L(\pi)$	0	0,328	0,4096	0,36	0,2592

$L = 5 \pi (1-\pi)^4$ , ML-Schätzer für  $\pi$  ist der Anteil  $x/n = 0,2$  der Stichprobe.

- 8.1.3

a)

Mißerfolge	0	1	2	3
Wahrscheinlichkeiten	$\pi$	$\pi(1-\pi)$	$\pi(1-\pi)^2$	$\pi(1-\pi)^3$



$$\begin{aligned} \text{b) } L(\pi) &= \pi (1-\pi)^2 \cdot \pi \cdot \pi (1-\pi) \cdot \pi (1-\pi)^3 \\ &= \pi^4 (1-\pi)^6 \end{aligned}$$

$$\frac{dL}{d\pi} = 4 \pi^3 (1-\pi) - \pi^4 \cdot 6 (1-\pi)^5 = 0$$

$$2 (1-\pi) - 3\pi = 0$$

$$2 - 2\pi - 3\pi = 0$$

$$5\pi = 2 \quad \Rightarrow \pi = 0,4$$

8.2.1  $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$  erwartungstreu;  $\hat{\mu}_1$  konsistent; ab  $n > 2$  ist  $\hat{\mu}_1$  effizienter als  $\hat{\mu}_2$ .

8.2.2  $\hat{\pi}_2$  ist erwartungstreu und konsistent,  $\hat{\pi}_1$  ist asymptotisch erwartungstreu und konsistent. Die Varianz von  $\hat{\pi}_1$  kann kleiner als die von  $\hat{\pi}_2$  sein, deshalb ist aber  $\hat{\pi}_1$  nicht effizienter, da Effizienz den Vergleich zwischen zwei erwartungstreuen Schätzfunktionen verlangt.

8.2.3 a)  $p$  erwartungstreu für  $\pi$ , aber  $pq$  nur asymptotisch erwartungstreu für

$$\pi (1-\pi) \text{ wegen } E(p (1-p)) = \frac{n-1}{n} \pi (1-\pi) .$$

b) identisch zweipunktverteilte Grundgesamtheiten; unabhängige Stichproben vorausgesetzt (wichtig für  $V(p_H - p_L)$ )

$$8.2.4 \quad E(\hat{\mu}_1) = \frac{1}{6}\mu + \frac{1}{3} \cdot 2\mu + \frac{1}{6}\mu = \mu$$

$\Rightarrow \hat{\mu}_1$  ist erwartungstreu

$$\begin{aligned} V(\hat{\mu}_1) &= \frac{1}{36}\sigma^2 + \frac{1}{9} \cdot 2\sigma^2 + \frac{1}{36}\sigma^2 \\ &= \left( \frac{2}{36} + \frac{2}{9} \right) \cdot \sigma^2 = \frac{10}{36}\sigma^2 \end{aligned}$$

$$E(\hat{\mu}_2) = \frac{1}{n-2}(n-2) \cdot \mu = \mu$$

$\Rightarrow \hat{\mu}_2$  ist erwartungstreu

$$V(\hat{\mu}_2) = \left( \frac{1}{n-2} \right)^2 \cdot (n-2) \cdot \sigma^2 = \frac{1}{n-2}\sigma^2$$

$$V(\hat{\mu}_1) = \frac{10}{36}\sigma^2 = V(\hat{\mu}_2) = \frac{1}{n-2}\sigma^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n-2} = \frac{10}{36} \quad \Rightarrow n-2 = 3,6 \quad \Rightarrow n = 5,6$$

Für  $n \geq 6$  ist  $\hat{\mu}_2$  effizienter als  $\hat{\mu}_1$ .

- 8.3.1 a)  $0,2096 \leq \pi \leq 0,3904$  b)  $0,2193 \leq \pi \leq 0,3807$
- 8.3.2 a)  $390,249 \leq \mu \leq 409,750$  b)  $387,186 \leq \mu \leq 412,814$   
c)  $390,448 \leq \mu \leq 409,552$
- 8.3.3 Konfidenzint.  $0 \leq \pi \leq 0,09205$ , ohne Endlichkeitskorrektur  $0 \leq \pi \leq 0,0949$ .  
Kunde kann nicht ablehnen. Schwankungsintervall:  $0 \leq p \leq 0,0585$  (ohne  
Endl.-korr.:  $0 \leq p \leq 0,0588$ )
- 8.3.4 11,088
- 8.3.5 Plazebos:  $0,2443 \leq \pi \leq 0,3557$  Akupunktur:  $0,27603 \leq \pi \leq 0,39063$   
kein signifikanter Unterschied, da Überschneidung!
- 8.3.6 Zu den Zahlen vgl. Aufgabe 9.2.2 und 9.2.9;  $0,01909 \leq \pi_A \leq 0,23091$   
 $0,35714 \leq \pi_B \leq 0,64286$   
signifikanter Unterschied, da keine Überschneidung!
- 8.3.7 vgl. Aufg. 9.1.3 a)
- 8.3.8  $85,49 \leq \mu \leq 114,51$  ( $t=3,18$ , dagegen wäre  $z=1,96$ )
- 8.4.1  $0,5216 \leq \Delta \leq 0,6784$  : nein!
- 8.4.2 a)  $19/3 \leq \mu_1 \leq 29/3$  (also  $6,33 \leq \mu_1 \leq 9,67$ ) und  $5,2143 \leq \mu_2 \leq 5,7857$   
b)  $2,5 \pm 12/7$ , also  $0,7857 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 4,2143$ : signifikanter Unterschied!
- 8.4.3 a) nein, da das Konfidenzintervall  $0,12306 \leq \pi_1 - \pi_2 \leq 0,26077$  den Wert Null  
nicht einschließt  
b) ja, weil 0,25 im Intervall enthalten ist .
- 8.4.4  $-0,0317 \leq \Delta \leq 0,1317$  , nein .

## **Kapitel 9**

- 9.1.1 a)  $H_0: \pi = 0,8$   $H_1: \pi < 0,8$   
 $\alpha$ -Fehler: auf Gebührenerhöhung verzichten, obwohl diese lukrativ ge-  
wesen wäre.  
b) Frage nach der Bedeutung der Risiken ( $\beta$ -Fehler: Nachfragerückgang  
durch Gebührenerhöhung)
- 9.1.2 a) Ablehnung ( $z=4,33$ ) b) bei  $p=0,22$  c)  $0,158 \leq \pi \leq 0,562$
- 9.1.3 a)  $440 \leq \bar{x} \leq 460$  b) Ablehnung ( $z=-10$ ) c) bei 490
- 9.1.4 Die Annahme kann verweigert werden ( $z=2,2451$ )

- 9.1.5 a) 0,003072 b)  $B(20; 0,04)$  c) Bin.vert., 2 Param., diskret, asymm.  
d) richtige Antworten sind 2 ( $H_0$ : keine Bevorzugung).
- 9.1.6 a)  $H_0$  nicht ablehnen ( $z=-1,6449$ ) b) kritischer Bereich ab  $\bar{x}=14,3949$   
c) 4% d) F, R, F (ist die Macht  $1-\beta$ ), R
- 9.1.7 a) für  $n=4$ : signifikant ( $z=4,8242$ ) ; für  $n=25$ : nichtsignifikant ( $z=1,508$ )  
Exakte Wahrsch. (für  $x \geq 1$ ) bei  $n=4$ : 3,94%; bei  $n=25$ : 22,2%  
(Binomialv.)  
b) Satz von de Moivre - Laplace, bei kleinem  $n$  Binomialverteilung.  
c)  $\alpha$ -Fehler: Spray wird fälschlicherweise für schädlich gehalten.  
 $\beta$ -Fehler: Spray wird fälschlicherweise für unschädlich gehalten.
- 9.1.8 a)  $H_1: \pi_n > 0,1$  ist signifikant,  $H_2: \pi_n \leq 0,2$  ist nicht signifikant.  
b) für Pharma-Hersteller ist  $\beta$ -Fehler gravierender: das bessere (evtl. höhere  
Entwicklungskosten) Medikament kommt nicht an.
- 9.1.9 a), b) wie 9.1.2 c) 0,26%
- 9.1.10 a), c), d) nein b) unsinnig, es gibt keine Signifikanz der Merkmale;  
Ausgangsverteilung könnte Verteilung in der GG bedeuten.
- 9.1.11 Die zitierten Ausführungen sind auf der ganzen Linie verfehlt. Es gibt neben  
der Hypothese  $\pi=0,95$  nicht noch ein Verteilungsgesetz. Wahrscheinlichkeit  
und relative Häufigkeit werden nicht auseinandergelassen und natürlich wird  
eine Annahme über  $\pi$  nicht durch  $p \neq \pi$  falsifiziert.
- 9.1.12  $H_0$  ablehnen ( $z=6$ )
- 9.2.1 a) auf A konzentrieren ( $z=3,75$ ) b) kein signifikanter Unterschied  
( $z=1,5$ ).
- 9.2.2 a) kein signifikanter Unterschied (vgl. Aufg. 9.2.2, Teil b).  
b) beide gleich beurteilt, obwohl B besser ist;  $\beta$  möglichst klein wählen.  
c)  $-0,09795 \leq \hat{\Delta} \leq 0,29795$ ; tatsächlich beobachtete Diff. liegt außerhalb;  
läge sie innerhalb des Intervalls, ist  $p_A < p_B$  trotz  $\pi_A > \pi_B$ .  
d) zweite und letzte Antwort ist richtig.
- 9.2.3 jeweils hochsignifikante Unterschiede ( $z=40$  und  $z=22,6$ ).
- 9.2.4 a) signifikanter Unterschied ( $z=4$ ); keine Falsifikation der Theorie von A.  
b)  $\Delta > 6,4$ , also 7 c)  $n_W = n_N = 3381$ , 68 Geburten
- 9.2.5 vgl. Aufg. 9.2.2,  $z=3,75$ ,  $z_\alpha=2,3263$ , also signifikant.
- 9.2.6 kein signifikanter Unterschied ( $z=1,4615$ )

- 9.2.7 a) signifikant ( $z=6,67$ ) b) wenn  $2,8 \leq \mu \leq 5,2$ .

## **Kapitel 10**

- 10.1.1  $n \geq 138$
- 10.1.2 a)  $390,25 \leq \mu \leq 409,75$  b) Intervall wird breiter c)  $n \geq 24,01$  ( $n \geq 2401$ ).
- 10.1.3 a)  $n \geq 6.765$  b)  $n \geq 27.057$  c) schwieriger, da größere Stichproben notwendig
- 10.1.4 Wird eine Stichprobe gezogen, so liegt es im Wesen der Zufälligkeit, daß diese sehr unterschiedlich und auch wie im Beispiel von der Grundgesamtheit völlig verschieden ausfallen können. Die Betrachtung ist also völlig verfehlt. Man braucht kein Konzept der Repräsentativität einer einzelnen Stichprobe und man könnte diese auch nicht messen, weil die Grundgesamtheit ja nicht bekannt ist. Statt dessen gibt es das Konzept des Fehlers. Der ist aber eine Zufallsvariable und bezieht sich nicht auf eine, sondern auf alle Stichproben.  
a) nein b) keine c) nein (sonst könnte man auch von keiner der 10 Stichproben auf die GG schließen, man kann es aber von allen; worin sollte dann auch noch ein "Schluß" bestehen, wenn die Stichprobe ein getreues Abbild ist?).
- 10.1.5 a) 268 b) 5.407 .
- 10.2.1  $38.039 \leq M \leq 81.961$  (M Hörer in der GG unter insges.  $N=6$  Mio.).
- 10.3.1 a)  $\sigma_{\bar{x}}=5,91$  b)  $\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{18,9933} = 4,3581$  .
- 10.3.2 a)  $\sigma_{\bar{x}}^2 = 907,8$  b) prop.:  $\sigma_{\bar{x}}^2 = 18,9$  opt.:  $\sigma_{\bar{x}}^2 = 14,94$  .
- 10.3.3 a) nein,  $z = -1,2649$  .  
b) prop.:  $n_F = 16, n_G = 4$  opt.:  $n_F = 15, n_G = 5$  .
- 10.3.4 vgl. Vorlesung.