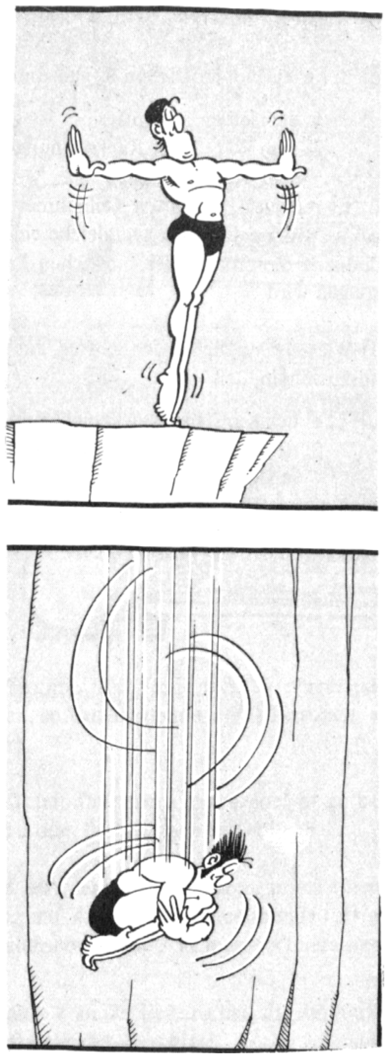
Teil III Klausurtraining

a) Aufgaben (29 Aufgaben)

Aufgabe 1



Der Kunstspringer K macht sich Sorgen, ob er mit seinem doppelten Auerbachsalto, den er demnächst bei der Deutschen Meisterschaft vollführen will, gerecht beurteilt wird. Er fordert deshalb, daß die Kampfrichter in Zukunft keine Punkte mehr vergeben sollten, sondern eine Rangordnung aller Springer durch Paarvergleiche (Vergleich jedes Springers mit jedem anderen Springer) aufstellen sollten.

a) Wieviele mögliche Rangordnungen kann man bei n Springern aufstellen?

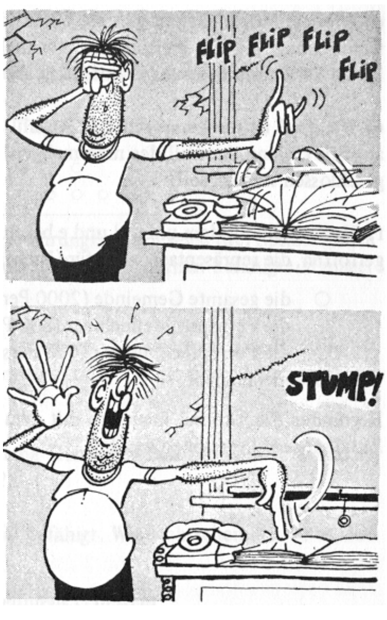
b) Wieviele Paarvergleiche sind hierzu erforderlich?

c) Bei wievielen möglichen Rangordnungen wäre dann K jeweils auf
   1. demselben Ranglatz
   2. dem Platz 2 der Rangordnung?

d) Es mögen $c \cdot n$ statt n Teilnehmer zum Wettkampf antreten und es sei für alle $c \cdot n$ Springer durch Paarvergleiche eine Rangordnung aufzustellen. Man zeige, daß dadurch die Anzahl der möglichen Paarvergleiche um mehr als das c^2-fache ansteigen wird.

e) Wieviele Möglichkeiten gibt es, aus n Springern die ersten m (bei $m < n - 3$) so auszuwählen, daß
   1. der Kunstspringer K nicht unter den ersten m ist?
   2. der Kunstspringer K und zwei weitere Personen nicht unter den ersten m sind?

Aufgabe 2



In einem Dorf gäbe es 2000 Einwohner, darunter 800 Fernsprechteilnehmer mit Haushalten von durchschnittlich 2 Personen, so daß insgesamt 1600 Einwohner telefonisch erreichbar sind (Fernsprechnutzer).

a) Reichen für die Gemeinde dreistellige Telefonnummern aus? Dabei ist zu beachten, daß die Telefonnummern nicht mit 0 oder 00 beginnen dürfen!

b) Diplom-Kaufmann K, der in dem Dorf lebt, leidet seit längerem unter einem irrationalen Verbraucherverhalten in bezug auf Alkoholika. Eines abends ruft er total betrunken zehn zufällig aus dem Telefonbuch (800 Teilnehmern) herausgegriffene Nummern an.

Dabei ist zu befürchten, daß er seine Erbtante T an der Leitung hat, die ihn ohnehin schon seit längerem wegen seiner Trinkfreudigkeit verachtet!

Wie wahrscheinlich ist das? (Modell des Ziehens ohne Zurücklegen!)

c) Wie wahrscheinlich ist es, daß K beim dreimaligen zufälligen Wählen dreistelliger Zahlen (auch solcher, die mit 0 oder 00 beginnen)

1. keinen
2. genau einen

der folgenden Anschlüsse: 632, 633, 634 angewählt hat?

d) Wieviel Möglichkeiten gibt es, 10 aus 800 Telefonnummern auszuwählen, wenn dabei evtl. die gleiche Nummer mehrmals gewählt werden darf? (Gemeint ist die Telefonnummer insgesamt, nicht die Ziffern, aus denen sie besteht!)

e) Wie groß ist die entsprechende Anzahl der Möglichkeiten (der Auswahl von 10 aus 800), wenn der Fall des mehrmaligen Wählens derselben Telefonnummer ausgeschlossen werden soll?

f) Hätte man mit dem unter d) und e) beschriebenen Verfahren eine Zufallsauswahl getroffen, die repräsentativ wäre für (Richtiges ankreuzen):

0 die gesamte Gemeinde (2000 Personen)?

0 die Fernsprechteilnehmer (800 Personen)?

0 die Fernsprechnutzer (1600 Personen)?

0 niemanden?

Begründen Sie, ob und inwiefern mit dem Auswahlverfahren gegen Prinzipien der Zufallsauswahl verstoßen wurde!

Aufgabe 3

In einem Unternehmen U gibt es 10 Führungskräfte, die sich auf drei Ebenen des Managements wie folgt verteilen:

obere Führungsebene	● ●
mittlere Führungsebene	● ○ ○
untere Führungsebene	○ ○ ○ ○ ○

Von den 10 auf die Positionen verteilten Führungskräften seien drei Spitzenkräfte (symbolisiert durch eine schwarze Kugel) und sieben normal befähigte Manager (weiße Kugeln).

a) Wieviel verschieden Möglichkeiten existieren, bei welchen jeweils 5 oder 10 Führungskräfte in die untere, 3 in die mittlere und 2 in die obere Führungsebene plaziert werden?

b) Wie wahrscheinlich ist es, daß sich die Hierarchie, wie die oben abgebildete des Unternehmens U rein zufällig ergibt?

c) Diplom-Kaufmann K aus E sei normal befähigt. Wie wahrscheinlich ist es, daß er in die obere Führungsebene gelangt,

1. wenn die Hierarchie des Unternehmens U besteht

2. wenn die Besetzung der Führungspositionen, wie im Teil b der Aufgabe angenommen, ganz dem Zufall überlassen bleibt?

d) Echte Führungsqualität gäbe es - so errechnete ein Experte des Personalwesens - nur bei 5% der Bewerber. Wieviel Bewerber müßte danach ein Unternehmen einladen, um mindestens mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% wenigstens einen unter den sich vorstellenden Bewerbern zu haben, der über echte Führungsqualitäten verfügt?

Aufgabe 4

Das Staatsoberhaupt S habe bei der Ordensverleihung ein gewisses Proporzdenken der Parteien zu beachten. Es sei P(A) =0,4 die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Würdenträger der A-Partei einen Orden erhält und entsprechend P(B) = 0,8 die Wahrscheinlichkeit, daß ein Mitglied der B-Partei dekoriert wird. Ferner sei $P(A|B) = 0{,}3$. Bei der jährlichen Ordensverleihung kann eine Partei nur einmal bedacht werden.

a) Man bestimme die Wahrscheinlichkeit folgender zusammengesetzter Ereignisse:

Ereignis: Es erhält jeweils einen Orden	Wahrscheinlichkeit
A und B	
wenigstens einer von beiden	
einer von beiden (sei es A oder B), aber nicht beide zusammen	
weder A noch B	

b) Es seien X und Y Zufallsvariablen, die eine Ordensverleihung oder -nichtverleihung an die A- und B-Partei bezeichnen. Bestimmen Sie aufgrund der Aussage P(A) = 0,4 die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariable X!

c) Bestimmen Sie den Erwartungswert E(X) und die Varianz σ_X^2 !

d) Man bestimme analog Teil b) dieser Aufgabe die gemeinsame Wahrscheinlichkeit f(x, y) der Zufallsvariable (X, Y) und berechne die Kovarianz und Korrelation zwischen X und Y!

e) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Anzahl Z der verliehenen Orden an und zeigen Sie, daß wegen Z = X + Y auch gilt E(Z) = E(X) + E(Y) sowie $\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\sigma_{XY}$ (mit σ_{XY} = Kovarianz zwischen X und Y)!

Aufgabe 5

Staranwalt St pflegt vor Gericht lebhafte Plädoyers zu halten (Ereignis P). Die Wahrscheinlichkeit, daß er dies auch im Fall des Angeklagten A tut, sei P(P) = 0,4.

a) Die Wahrscheinlichkeit, daß der Geschworene G den Angeklagten A für unschuldig hält (Ereignis U) sei vor dem Plädoyer $P(U|\overline{P}) = 0{,}1$ und danach $P(U|P) = 0{,}5$.

Sind die Ereignisse U und P unabhängig? Begründung erforderlich!

b) Berechnen Sie $P(U \cap P)$ und $P(U \cup P)$.

c) Dem Gericht stehen 60 Personen zur Verfügung, die als Geschworene tätig sein können. Für den Prozeß hat der Rechtspfleger R genau 12 von ihnen zufällig auszuwählen. Wie wahrscheinlich ist es dann, daß bei 20 Frauen und 40 Männern unter den auszuwählenden Personen alle 12 Geschworenen Frauen sind?

d) Wie wahrscheinlich ist es, daß bei dieser Auswahl unter 20 Frauen und 40 Männern von den 12 Geschworenen fünf Frauen sind?

e) Unter den 60 auszuwählenden Personen befindet sich auch Diplom-Kaufmann K aus E. Wie wahrscheinlich ist es, daß der Rechtspfleger R gerade ihn als den zwölften der Geschworenen auswählt?

f) Der Staranwalt vertritt die Hypothese H_0 : A ist unschuldig, tatsächlich ist aber A schuldig. Gleichwohl gelingt es ihm, einen Freispruch zu erwirken. Das ist im Sinne der Statistik (Richtiges ankreuzen)

O ein Fehler 1. Art
O ein Fehler 2. Art
O eine Irrtumswahrscheinlichkeit
O kein Fehler

g) Kann man aufgrund des Gesetzes der Großen Zahl schließen, daß ein Gericht um so eher zur Wahrheit gelangt, je mehr Richter auf der Richterbank sitzen? Begründung erforderlich!

Aufgabe 6

Spät, aber dafür um so heftiger wurde Diplom-Kaufmann K aus E von der Leidenschaft ergriffen, Pilze zu sammeln. Er betreibt sein neues Hobby derartig radikal aber zugleich unwissend, daß er jeden Pilz mitnimmt, den er zufällig gerade findet und bei jeder Pilzwanderung mindestens 10 Pilze sammelt, egal welche.

Die Anzahl x der Giftpilze sei poissonverteilt mit $\lambda = 0{,}8$.

a) Wie wahrscheinlich ist es, daß mindestens 8 von 10 Pilzen, die K ergreift, eßbar (nicht giftig) sind ?

b) Beim Verspeisen von $x > 0$ Giftpilzen kann es vorkommen, daß man stirbt (Ereignis A). Es sei $P(A|x=1) = 0{,}7$, $P(A|x=2) = 0{,}9$ und $P(A|x \geq 3) = 1$.

Wie wahrscheinlich ist es, daß Diplom-Kaufmann K aus E seine oben beschriebene irrationale Taktik überlebt?

c) Bei seiner letzten Pilzwanderung hat sich K erstaunlicherweise wieder nicht vergiftet (keinen Giftpilz gefunden), aber insgesamt n = 40 Pilze gesammelt. Spricht dieses Ergebnis gegen die Annahme, daß die Anzahl der Pilze poissonverteilt ist mit $\lambda = 0{,}8$ ($\alpha = 5\%$ zweiseitig)?

d) Man bestimme ein 90% zweiseitiges Konfidenzintervall aufgrund der Angaben unter c) und rechne die Grenzen des Konfidenzintervalls hoch für eine Stichprobe vom Umfang n = 40!

e) Wie groß müßte der Stichprobenumfang mindestens sein, damit K mit einer Sicherheit von 95% den Erwartungswert E(X) mit einem absoluten Fehler von $\pm 0{,}05$ bestimmen kann!

Aufgabe 7

Bei einer drahtlosen Telegraphieanlage älterer Bauart entstehen Lautstärkewerte zwischen 80 und 120 Phon, die folglich noch innerhalb zufällig schwankender Entfernungen X (in km) hörbar sind. In einer Entfernung von 2 km vom Standort der Anlage beginnt der Urwald, der bekanntlich die Ausbreitung des Schalls behindert.

Die Variable X ist wie folgt verteilt:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}2 & \text{für} \quad 0 \le x < 2 \\ \frac{8}{30} - \frac{1}{30}x & \text{für} \quad 2 \le x \le 8 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Man zeichne die Dichtefunktion f(x) und zeige, daß die Funktion die Bedingungen einer Dichtefunktion erfüllt!

b) Man bestimme den Erwartungswert!

c) Man bestimme die Verteilungsfunktion F(x) und zeichne diese!

d) Man zeige, daß die Varianz von X ungefähr 3,5 beträgt!

e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß man eine Botschaft noch mindestens 7 km vom Standort der Anlage hören kann?

f) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß man eine Botschaft mindestens 6 km weiter hören kann als dies im Mittel zu erwarten ist, wenn

   1. f(x) die obige Dichtefunktion ist?
   2. die Dichtefunktion nicht bekannt ist?

g) Dies ist dann die

   O exakte Wahrscheinlichkeit
   O **Mindest**wahrscheinlichkeit
   O **Höchst**wahrscheinlichkeit
   (Der Wert, den die Wahrscheinlichkeit **höchstens** annimmt)

Aufgabe 8

(Wertpapiermischung, portfolio - selection)

Diplom-Kaufmann K aus E erwägt, sein Vermögen in drei Wertpapieren A, B, C anzulegen. Er legt einen Anteil a in Papier A, b in B in c in C an (a + b + c = 1). Als Maß der Gewinnträchtigkeit einer Anlage gilt der zu erwartende Kurswert E(X) und als Maß des Risikos die Standardabweichung σ_X.

Für die drei Kurse X_A, X_B, X_C gelte:

$E(X_A) = 100$; $\sigma_A^2 = 25$

$E(X_B) = 180$; $\sigma_B^2 = 4$

$E(X_C) = 200$; $\sigma_C^2 = 49$.

Die Kurse korrelieren wie folgt miteinander

$r_{AB} = -1$

$r_{AC} = +1$

$r_{BC} = -0{,}1$.

a) Man bestimme Erwartungswert und Varianz der Größe $Z = aX_A + bX_B + cX_C$, wenn Diplom-Kaufmann K aus E sein Vermögen

1. zu gleichen Teilen in den Papieren A und C investiert (also $a = c = \frac{1}{2}$, $b = 0$)
2. zu je einem Drittel in den Papieren A, B und C investiert (also $a = b = c = \frac{1}{3}$)!

b) Im zweiten Fall ist E(Z) größer und σ_z^2 erheblich kleiner als im ersten Fall, d.h. diese Wertpapieranlage (-mischung) ist sowohl ertragreicher als auch weniger riskant. Zeigen Sie, warum dieses Ergebnis, das ja auch mit der Erfahrung (Vorteile der Risikostreuung!) im Einklang ist, zustande kommt!

c) Angenommen, der Kurswert Z aller drei Papiere des K sei die **Summe** von drei Kursen X_1, X_2, X_3 mit gleichem Mittelwert und gleicher Varianz, die - wie oben angegeben - miteinander **korreliert** sind. Es sei $Z = X_1 + X_2 + X_3$ normalverteilt mit $\mu = 150$ und $\sigma^2 = 81$.

Man bestimme ein symmetrisches Intervall für die Zufallsvariable Z um μ, in welchem 90% der zu beobachtenden Werte von Z liegen dürften!

d) Angenommen, Z sei das arithmetische **Mittel** aus vier Kursen X_1, X_2, X_3, X_4, die **unabhängige,** normalverteilteZufallsvariablen seien und jeweils die gleichen Parameter besitzen mit

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu = 150 \text{ und } \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma^2 = 81.$$

Man bestimme ein symmetrisches Intervall für Z um μ, in welchem 90 % der zu beobachtenden Werte von Z liegen dürften!

e) In den Teilen c und d sind verschiedene Ansätze erforderlich. Es waren zu berechnen (Richtiges ankreuzen)

	im Teil c	im Teil d
A ein Schwankungsintervall (direkter Schluß)		
B ein Konfidenzintervall (indirekter Schluß)		
C weder A noch B, sondern eine andere Art von Intervall		

Aufgabe 9

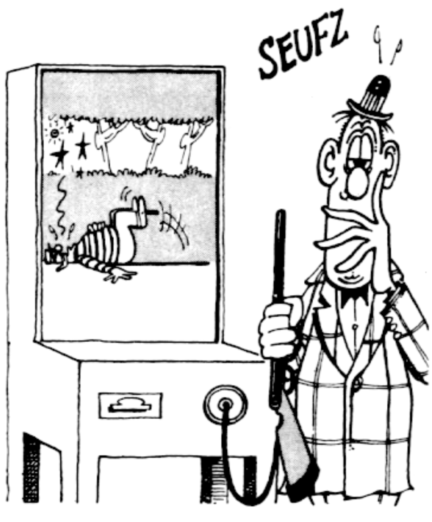
In einer Spielhölle schießt allabendlich auch Diplom-Kaufmann K aus E auf ein bewegliches Ziel, das er jeweils (bei jedem Schuß) mit einer Wahrscheinlichkeit von nur 5 % trifft. Die einzelnen Schüsse seien unabhängig, d.h. K verbessert sich nicht durch beständige Übung.

a) Wie wahrscheinlich ist es, daß K nach 10 Schüssen zum ersten Mal das Ziel trifft?

b) Wie wahrscheinlich ist es, daß K zwischen einschließlich 5 und 10 Schüsse benötigt, um dann jeweils das erste Mal das Ziel zu treffen?

c) Wie wahrscheinlich ist es, daß K spätestens im fünften Versuch das dritte Mal trifft?

d) Gewöhnlich schießt K so lange bis er zum ersten Mal trifft. Jeder Schuß kostet 50 Pfennig. Wieviel Geld steckt K in den Spielautomaten?



e) Wie wahrscheinlich ist es, daß K bei 10 Schüssen dreimal trifft?

f) Zeigen Sie, wie gut in diesem Fall die Approximation an die Poissonverteilung ist!

Teile g) und h) sind sehr schwierig und für Klausuren nicht geeignet:

g) (Ruinproblem)
K will so lange spielen, bis er entweder DM 20,- gewonnen oder aber sein Startkapital von DM 10,- verspielt hat (Ruin). Bei jedem Spiel gewinnt er entweder 50 Pfennig oder er verliert seinen Einsatz von 50 Pfennig mit den oben angegebenen Wahrscheinlichkeiten.

Wie wahrscheinlich ist der Ruin des Diplom-Kaufmann K aus E?

h) Wie würde sich seine Ruinwahrscheinlichkeit verringern, wenn er sich mit einem Zielbetrag von DM 12,- begnügen würde?

Aufgabe 10

Der Student S hat große Schwierigkeiten in der Statistikklausur zu erkennen, welche Wahrscheinlichkeitsverteilung jeweils in der Aufgabe gemeint sein könnte. Nach seiner ersten mißlungenen Klausur ist er zum Entschluß gekommen, in Zukunft einfach zu raten, welche der acht ihm bekannten Verteilungen gemeint sein könnte.

a) In der zweiten Klausur wurde in 10 Fragen jeweils nach einer dieser acht Verteilungen gefragt. Wieviele Antwortmöglichkeiten gibt es für S?

b) Wie wahrscheinlich ist es, daß S genau 2 der 10 Fragen bei seiner schlichten Taktik zufällig richtig beantwortet?

c) Wie wahrscheinlich ist es, daß S erst bei der 5-ten der von ihm beantworteten Fragen richtig liegt?

d) Man kann das Verhalten von S als Ziehen einer Stichprobe vom Umfang $n = 10$ auffassen. Geben Sie für die Grundgesamtheit und für die Stichprobenverteilung der Anzahl X der richtig geratenen Verteilungen den Verteilungstyp, die Parameter und den Erwartungswert an!

   Hieraus ergibt sich, daß die Schätzung

   O der Anzahl X
   O des Anteilswertes X / n
   } konsistent ist.

e) Nachdem S viermal geraten hat, geht er für die restlichen 6 Fragen dazu über, vorsichtshalber beim Nachbarn N abzuschreiben. Von N ist anzunehmen, daß er im Mittel viermal so oft auf die richtige Verteilung kommt, wobei es jedoch unklar ist, wie ihm dies gelingt. Wie groß ist jetzt für S (bezogen auf alle 10 Fragen) die Wahrscheinlichkeit einer richtigen Antwort? (Totale Wahrscheinlichkeit!)

f) Warum ist es wichtig - wie oben geschehen - darauf hinzuweisen, daß es etwas undurchsichtig ist, wie N zu seinen Einfällen gelangt?

g) Sein Abschreiben von N wird der Professor, so glaubt S, kaum merken. Er nimmt an, daß die Klausuren in zufälliger Reihenfolge gelesen werden. Dann sei bei 100 Klausuren die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Klausuren von N und S nacheinander gelesen werden, nur 0,1 Promille. Ist diese Überlegung richtig?

Aufgabe 11

(small sample Problem aus Mittelamerika)

General G schätzt es, eine Attacke effektvoll vorzutragen. Das dazu erforderliche Musikercorps ist jedoch notorisch unpünktlich und hat bisher bei vier Übungen folgende Verspätungen (in Minuten) militärischer Operationen verschuldet:

40, 60, 50 und 90 Minuten.

a) Man bestimme ein zweiseitiges 95%-Konfidenzintervall für die durchschnittliche Verspätung bei Benutzung der t-Verteilung und von $\sigma = 20$!

b) General G wartet bereits eineinhalb Stunden und fragt sich, ob er mit seinem Wutausbruch noch einige Minuten warten sollte. Es ist deshalb zu klären, ob eine so lange Wartezeit noch in das Konfidenzintervall fällt!

c) Wie wahrscheinlich ist eine Wartezeit von 1 1/2 Stunden oder mehr, wenn die Grundgesamtheit wie folgt verteilt ist

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{70} & \text{wenn} \quad 25 \le x \le 95 \text{ Min.} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

d) Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz der Zufallsvariable X, für die die Dichtefunktion gem. c) gilt!

e) Wie wahrscheinlich ist eine Abweichung vom Mittel um höchstens 30 Minuten, wenn von der Grundgesamtheit nur bekannt ist, daß $\sigma = 20$ ist?

f) Wegen eines Schusses auf den Klangkörper mußte der Musiker M sein Instrument 2 Stunden lang neu stimmen. Der General geht von der Hypothese aus, daß im Ernstfall die Verspätung größer ist als im Übungsfall, nämlich $\mu_1 = 100$ bei $\sigma_1 = \sigma_0 = 20$ sowie n = 4. Die Verspätungszeit X sei normalverteilt.

Wie wahrscheinlich ist eine durchschnittliche Verspätung von bis zu 2 Stunden bei Geltung von H_1: $\mu_1 = 100$? (Man rechne mit der Normalverteilung, **nicht testen**!)

g) Diese Wahrscheinlichkeit ist

O α O β O weder α noch β

Wenn der General vorsichtshalber davon ausgehen sollte, daß im Kriegsfall die Verspätung größer ist und er Gefahr läuft, daß der Feind rasch seinen Standort wechselt, dann sollte er für

O den Fehler 1. Art O den Fehler 2. Art

eine möglichst geringe Wahrscheinlichkeit ins Auge fassen.

Aufgabe 12

a) Der Verfassungsschutz soll 6 verdächtige Personen beim Verlassen ihrer Wohnung observieren, darunter auch den Diplom-Kaufmann K aus E. Drei der zu beobachtenden Personen stellen in der Tat ein Sicherheitsrisiko dar. Wie wahrscheinlich ist es, daß der Verfassungsschutz mit den ersten drei Observierungen auch genau den tatsächlich gefährlichen Personen auf der Spur ist?

b) Der Verfassungsschutz hat mit seinen ersten drei Observierungen nur zwei der drei verdächtigen Personen gefunden. Wie wahrscheinlich ist es, daß er mit seiner vierten Beobachtungsaktion gerade der dritten verdächtigen Person auf der Spur ist?

c) Nach einer Hausdurchsuchungsaktion werden 6 Personen im Verdacht des Links- bzw. Rechtsextremismus dem Untersuchungsrichter vorgeführt. Es sei angenommen, daß dieser wegen Arbeitsüberlastung zunächst nur n $\le$ 6 Personen der Reihe nach zu einem Gespräch in sein Zimmer bittet. Es stellte sich heraus, daß diese n Personen auch gerade diese n Personen waren, bei denen sich der Verdacht erhärten ließ.

Hätte der Richter die Auswahl nach dem Zufallsprinzip getroffen, so hätte er nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% damit rechnen können, auf Anhieb die wirklich Schuldigen auszuwählen.
Wie groß ist die Anzahl n?

d) Wäre die Wahrscheinlichkeit

O größer

O kleiner

O auch 5%

wenn man 12 statt 6 Personen dem Richter vorführen würde und die Anzahl n doppelt so groß wäre?

Anmerkung für empörte Juristen: Die Überlegung der Juristen sind sicher äußerst komplex aber auch nicht wahrscheinlichkeitstheoretisch zu fassen. Sie sind Variablen „sui generis“, die selbstverständlich mehr Respekt verdienen als die Zufallsvariablen.

Aufgabe 13

Der Tierarzt T ist es trotz langer Berufserfahrung gewohnt, daß seine Tierliebe nicht angemessen erwidert wird. Deshalb rechnet er damit, daß er gemäß der Poisson-Verteilung bei einer Diagnose X mal gebissen wird. Im Mittel ist bei seinen ärztlichen Bemühungen pro Behandlung mit einem Biß zu rechnen.

a) Man gebe die Wahrscheinlichkeitsfunktion f(x) für die Anzahl der Bisse an!

b) Man bestimme (bzw. schlage in der Tabelle nach) die Wahrscheinlichkeit dafür, daß T

1. überhaupt nicht gebissen wird
2. genau einmal gebissen wird
3. mehr als zweimal gebissen wird!

c) Man bestimme die Standardabweichung σ_x.

d) Die Poissonverteilung hat das gleiche Urnenmodell wie die

O Zweipunktverteilung

O Binomialverteilung

O Hypergeometrische Verteilung

O Normalverteilung

O ....verteilung

e) Man gewinnt die Poissonverteilung aus der oben genannten Verteilung durch einen Grenzübergang unter folgenden Voraussetzungen:

f) Dieser Grenzübergang ist auch bekannt als

O Gesetz der großen Zahl

O stochastische Konvergenz

O Konvergenz von Verteilungen

O Grenzwertsatz von.....................

g) An einem Tage wurde der gut gelaunte T bei der Behandlung von 36 Tieren nur von 4 Tieren einmal und von 4 Tieren zweimal gebissen. Ist diese Beobachtung verträglich mit der Hypothese, daß $\mu = 1$ ist, wenn X poissonverteilt ist? Oder ist anzunehmen, daß μ kleiner als 1 ist? Es sei $\alpha = 0{,}01$!

Aufgabe 14

Die Hausfrau H kaufte beim Fleischer F zwei Leberwürste und eine Teewurst. Alle Würste waren verdorben. Bei ihrer Beschwerde fand sie deshalb nicht den richtigen Ton, weil ihr die nötigen Kenntnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung fehlen.

Es gilt nun H zu zeigen, daß das Ereignis, von dem sie betroffen war, nur eine Wahrscheinlichkeit von etwa 0,09% hatte, wenn die Angaben des F stimmen, daß sowohl von seinen 40 Teewürsten nur 4 als auch von seinen 100 Leberwürsten nur 10 vergammelt waren!

a) Wie groß ist unter diesen Voraussetzungen die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das oben dargestellte Ereignis eintritt?

b) Geben Sie unter den oben genannten Voraussetzungen die Stichprobenverteilung der Anzahl X der verdorbenen Leberwürste an, wenn man n = 10 Leberwürste ohne Zurücklegen zieht!

c) Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz dieser Verteilung!

d) Gegen welche Grenzverteilung strebt diese Stichprobenverteilung bei großem Stichprobenumfang n? (Parameter angeben!)

e) Der unter d) gefragte Zusammenhang gilt nach dem (Richtiges ankreuzen)

O Gesetz der großen Zahl

O Grenzwertsatz von Lindeberg-Lévy

O lokalen Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace

O zentralen Grenzwertsatz von Ljapunoff.

f) Man stelle fest, ob die Angaben des Fleischers F zutreffend sein könnten, wenn bei einer Stichprobe von 4 Leberwürsten nur eine verdorben war! (Irrtumswahrscheinlichkeit 5 %)

g) Aufgrund ihrer streitbaren Natur hat die Hausfrau H die Sympathie eines mit ihr seelenverwandten Juristen der Universität Essen gewonnen, was ihr zu einem langjährigen Prozeß wegen der drei gekauften Würste verhalf. In diesem Rechtsstreit wurde festgestellt, daß zwischen brauchbaren, herabgesetzt brauchbaren (eine der gekauften Würste) und unbrauchbaren Würsten (die übrigen zwei der drei von H gekauften Würste) unterschieden werden müsse. Eine Untersuchung ergab, daß von den 140 Würsten des Fleischers F acht herabgesetzt brauchbar und nur sechs unbrauchbar waren. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit des die Hausfrau H ereilten Schicksals! (Ansatz genügt!)

Aufgabe 15

Student S ist ein begeisterter Star-Trek-Fan. Daher möchte er auch keine der (fast) täglich ausgestrahlten Folgen der Serie verpassen. Weil er aber um 15.00 Uhr selten zu Hause ist, programmiert er seinen Videorekorder. Dabei hat er aber mit dem Problem zu kämpfen, daß der ausstrahlende Sender „Schrott 1“ in zwei von zehn Fällen vergißt, das VPS-Signal zu senden (Ereignis V), so daß der Rekorder von S nicht anspringt. Desweiteren wohnt S etwas ungünstig, so daß der Empfang je nach Wetterlage in 30% der Fälle stark gestört ist (Ereignis S). Die Wahrscheinlichkeit, eine einwandfreie Aufnahme zu haben (Rekorder ist angesprungen und der Empfang ist einwandfrei), beziffert S daher nur auf 60%.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß

   1) der Videorekorder angesprungen ist, nachdem klar ist, daß der Empfang einwandfrei ist?

   2) der Empfang gestört ist oder der Videorekorder nicht angesprungen ist (aber nicht beides zusammen)?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß

   1) in drei von acht Fällen der Videorekorder nicht angesprungen ist?
   2) an fünf aufeinanderfolgenden Tagen der Videorekorder am dritten Tag erstmalig angesprungen ist?

c) S weiß von früheren Ausstrahlungen her, daß ihm von 178 Folgen der Serie „Star-Trek: Das nächste Jahrhundert“ 23 (also ca. 12,9%) überhaupt nicht gefallen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ihm von 10 Folgen, die er mit einigen Freunden in einer großen Star-Trek-Nacht sehen möchte, drei nicht gefallen?

d) Der Sender Schrott 1 sieht sich manchmal gezwungen Star-Trek zugunsten der Übertragung „wichtiger“ Sportereignisse ausfallen zu lassen. S hat das Gefühl, daß dies viel häufiger geschieht, wenn ihm eine Folge gefällt, als wenn eine Folge gesendet werden soll, die er nicht mag. Er schätzt die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten wie folgt ein:

$$P(A|G) = 0{,}1\,,\ P\left(A|\overline{G}\right) = 0{,}05$$

mit: Ereignis A: Star-Trek fällt aus

Ereignis G: Folge gefällt S

   1) Hat S mit seinem Gefühl recht, d.h. sind die Ereignisse A und G wirklich abhängig?

   2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Serie an einem Tag ausfällt?

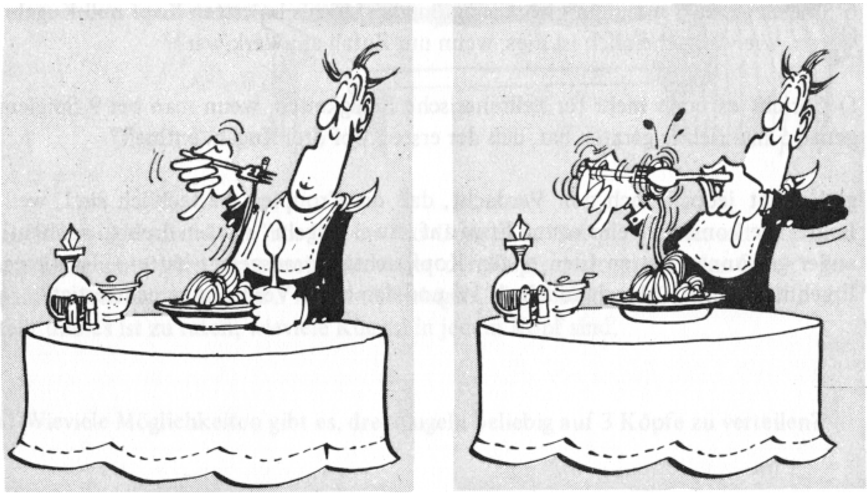
e) Besonders störend auf den Genuß von Star-Trek wirken sich natürlich die ständigen Werbeunterbrechungen aus. Laut einer Aussage des Senders ist die Anzahl der gesendeten Werbeminuten pro Folge normalverteilt mit $\mu = 15$ und $\sigma^2 = 4$. Bei einer Stichprobe vom Umfang n = 25 Folgen ermittelt S eine durchschnittliche Werbedauer von 16 Minuten.

   1) Kann aufgrund dieses Stichprobenergebnisses mit Hilfe eines statistischen Tests $(1 - \alpha = 0{,}95)$ der Eindruck von S bestätigt werden, der Sender bringe im Schnitt mehr als 15 Minuten Werbung?
   2) Beschreiben Sie mit eigenen Worten, was es in diesem Fall heißt, einen Fehler 1. oder 2. Art zu begehen.

Aufgabe 16

Dem Diplom-Kaufmann K aus E passierte in der Pizzeria P das Mißgeschick, eine Portion Spaghetti zu bekommen, die aus neun Spaghetti bestand, die alle länger als 80 cm waren, was ihm beim Essen erhebliche Schwierigkeiten bereitete.

Aus statistischen Erhebungen ist bekannt, daß die Spaghettilänge normalverteilt ist mit dem Mittelwert (gemessen in Meter) $\mu = 0{,}4\text{m}$ und der Standardabweichung $\sigma = 0{,}4\text{m}$.



a) Wie wahrscheinlich ist es

   1. eine Spaghetti

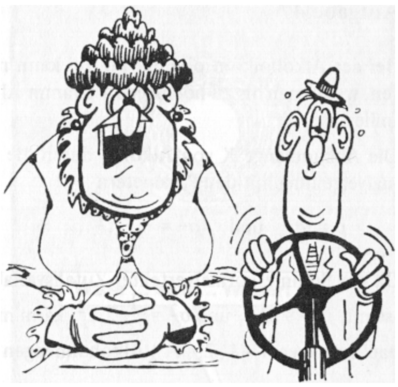
   2. neun Spaghetti

   vorzufinden, deren Länge 80 cm oder mehr beträgt (neun unabhängige Züge, d.h. eine Stichprobe vom Umfang n = 9)?

b) Man zeige, daß es demgegenüber über 20000 mal so wahrscheinlich ist, neun Spaghetti vorzufinden, deren Länge im Mittel 80 cm oder mehr beträgt!

c) Worin besteht der Unterschied der Fragestellung des Teils a) und des Teils b) dieser Aufgabe? Welche Fragestellung ist in der Stichprobentheorie üblich? Welche Fragestellung betrifft das Mißgeschick des Diplom-Kaufmanns?

Aufgabe 17



Diplom-Kaufmann K aus E fühlt sich von seiner dominanten Gattin dermaßen tyrannisiert, daß er sich als letzten Ausweg ratsuchend an einen in seinem Fachbereich als Schurken bekannten Statistiker wendet. Er begehrt eine Einschätzung der Erfolgsaussichten für sein Vorhaben, seinem unersprießlichen Eheleben diskret ein Ende zu setzen.

Er hat einen Pralinenkasten mit sechs hochwertigen Pralinen dergestalt präpariert, daß er einer der Pralinen ein tödliches Gift beigemischt hat.

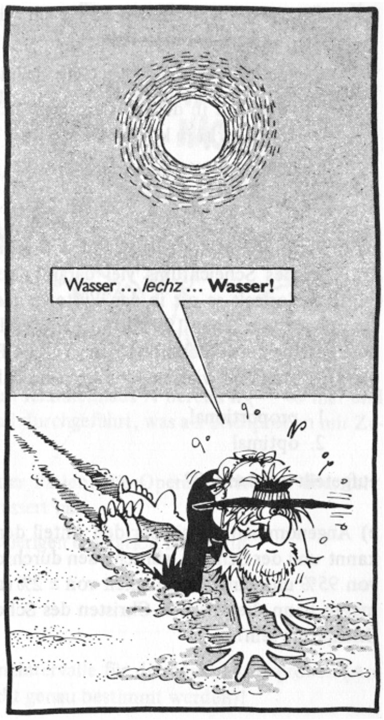
a) Gewöhnlich ergreift die Gattin des K abends vor dem Schlafengehen zwei Pralinen. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, daß die vergiftete Praline **nicht** darunter ist?

b) Man bestimme Erwartungswert und Varianz der Anzahl X der bei zwei Zügen zu ziehenden vergifteten Pralinen!

c) Diplom- Kaufmann K aus E ist beunruhigt darüber, ob es wirklich ausreicht, wenn er nur eine der sechs Pralinen vergiftet, um so seine Gattin auch wirklich mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 90% am ersten Abend vergiften zu können. Das Gespräch mit dem Statistiker endet aber, wie so oft, mit einer konkreten Lebenshilfe. Was wird ihm der Statistiker gesagt haben?

d) Ist es zulässig auch in diesem Fall mit der Normalverteilung zu rechnen und ist die Schätzung eines Anteilswertes in einer Stichprobe effizienter, wenn man die Endlichkeit der Grundgesamtheit beachtet, als wenn man den Fall „mit Zurücklegen“ betrachtet?

Aufgabe 18



Im Scheichtum S geht man davon aus, daß ortsfremde Christen sich doppelt so oft in der Wüste verirren wie einheimische Moslems, und man deutet das als Zeichen Allahs.

a) Letztes Jahr begaben sich 30 Christen und 100 Moslems unabhängig als Einzelpersonen auf den Weg durch die Wüste. Darunter haben sich 3 Christen und 5 Moslems verirrt. Man bestimme ein 95% Konfidenzintervall (zweiseitig) für die Differenz der Anteilswerte der sich verirrenden Personen!

b) Wie wahrscheinlich ist es nach der Poissonverteilung, daß sich von 80 Moslems mehr als 10% in der Wüste verirren?

c) Wenn das Konfidenzintervall den Wert Null einschließt, so bedeutet dies:

O daß die Anteile in der Grundgesamtheit gleich sind.

O daß der Glaube an den besonderen Schutz Allahs für die Moslems falsch ist.

O daß sich in diesem Jahr auch relativ mehr Moslems als Christen in der Wüste verirren können.

O daß sich durch Allahs Güte vielleicht sogar keiner verirrt.

O daß sich in diesem Jahr ein gleicher Prozentsatz von Christen und Moslems verirren könnte.

O daß sich in diesem Jahr sowohl 10% der Christen als auch 10% der Moslems verirren werden.

d) In ihrem Bemühen, Allahs Willen wissenschaftlich zu erforschen liegt den Statistikern des Scheichtums viel daran, ihre oben genannte Hypothese, daß sich Christen doppelt so oft in der Wüste verirren wie Moslems, statistisch abzusichern. Im Scheichtum leben 190 000 Moslems und 18 000 Christen. Der Scheich befiehlt, eine geschichtete Stichprobe von $n = 104$ Personen in die Wüste zu schicken. Wieviel Christen und wieviel Moslems sind dabei, wenn die Stichprobe

1. proportional

2. optimal

aufgeteilt werden soll?

e) Angenommen es sei über den Anteil Christen, die sich verirren, nichts bekannt und der Scheich wünsche den durchschnittlichen Anteil mit einer Sicherheit von 95% und einer Genauigkeit von ± 2% (absoluter Fehler) zu erfahren. Wie groß müßte dann die aus den Christen des Scheichtums zu ziehende (ungeschichtete) Stichprobe sein?

Aufgabe 19

Durch seine Tätigkeit für eine stark im Export engagierte Firma wurde Diplom-Kaufmann K aus E ein weitgereister Mann, der sich insbesondere auch längere Zeit in Indien aufhielt.

Seine Vorliebe für Filmvorführungen einer bestimmten Art sowie seine pedantische Neigung zum Preisvergleich erlaubte es ihm folgende Daten zu sammeln:

(Preisangaben in DM bzw. in Rupien; eine Rupie entspricht etwa 50 Pfennig)

Land	Anzahl der Filme	Mittelwert	Varianz
Indien Deutschland	100 400	8 R 5 DM	49 R^2 4 $(DM)^2$

Stellen Sie fest, ob ein Kinobesuch in Indien signifikant billiger ist als in der Bundesrepublik!

a) Ist einseitig oder zweiseitig zu testen? Wie lautet die Alternativhypothese?

b) Führen Sie den Test durch bei vergleichbarer Währungsangabe in DM (1 DM = 2 R). Man wähle eine Irrtumswahrscheinlichkeit von 10%; es ist davon auszugehen, daß die Varianz der beiden Grundgesamtheiten gleich groß sind.

c) Die Irrtumswahrscheinlichkeit ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß (Richtiges ankreuzen)

O die Nullhypothese falsch ist.

O die Nullhypothese richtig ist.

O man die Nullhypothese ablehnt

O man einen Fehler 2. Art begeht, wenn man die Nullhypothese annimmt.

O man einen Fehler 1. Art begeht, wenn man die Nullhypothese ablehnt.

O das beobachtete Stichprobenergebnis eintritt bei Geltung der Alternativhypothese.

O ein wesentlicher (signifikanter) Unterschied besteht.

O das Stichprobenergebnis überzufällig (so unwahrscheinlich, daß es nicht mehr mit dem Zufall zu erklären ist) ist.

Aufgabe 20

Aus einer Statistik des unorthodoxen Exorzisten E ergab sich folgende Verteilung der Anzahl X der Teufel, von denen die 100 Bürger seiner Gemeinde Anno Domini 1612 befallen wurden:

X	Anzahl der Bürger
0	67
1	27
2	5
3	1
4 und mehr	0

a) Für Monsignore M gibt es nichts in der Natur, was nicht normalverteilt wäre. Prüfen Sie, ob die Daten nicht eher durch eine Poissonverteilung als durch eine Normalverteilung angepaßt werden!

b) Warum wäre die Durchführung eines χ^2-Anpassungstests in diesem Fall wenig sinnvoll?

c) Diplom-Kaufmann K aus E zeigte schon während des Studiums durch seinen wirren Blick während der Statistikvorlesungen erste Anzeichen von Besessenheit. Die Wahrscheinlichkeit, vom Teufel befallen zu werden (Ereignis T) sei $P(T) = 0{,}4$ in jedem Jahr und die Teufel treten jeweils nur **jährlich** und unabhängig auf. Wie wahrscheinlich ist es dann, daß K

   1. genau im dritten Jahr nach Beendigung seines Studiums zum ersten Mal von einem Teufel befallen wird?
   2. höchstens drei Jahre nach Beendigung seines Studiums warten muß, um in diesem, dem dritten Jahr, zum ersten Mal von einem Teufel befallen zu werden?
   3. genau im dritten Jahr zum zweiten Mal von einem Teufel befallen wird?

d) Man bestimme Erwartungswert und Varianz der Wartezeit zwischen den Teufelsauftritten (die Wartezeit wird bis einschließlich der Periode gerechnet, in der ein Teufel auftritt)!

e) Während seiner vier Jahre als Personalchef der Firma F bestand für K **täglich** mit einer Wahrscheinlichkeit $p > 0$ die Gefahr, von einem als Bewerber getarnten Teufel befallen zu werden. Bei 200 Arbeitstagen sei die Wahrscheinlichkeit $200p = \lambda = 0{,}4$. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit einer Wartezeit bis zum ersten Teufelsauftritt von höchstens

   1. 300 Tagen nach der geometrischen Verteilung (GV)!
   2. 1,5 Jahren nach der Exponentialverteilung (EV)!

f) Von wieviel Teufeln wird K im Laufe seiner vierjährigen Berufspraxis in der Industrie im Durchschnitt befallen werden und wie wahrscheinlich ist es, daß es in dieser Zeit genau zwei Teufel sind, wenn die oben genannten Bedingungen des Jahres 1612 gelten?

g) Als K einem Psychiater sein Problem vortrug, äußerste dieser Zweifel daran, ob die Statistik des Exorzisten E repräsentativ sei. Da aber seinerzeit die Inquisition der Auffassung war, daß die Statistik ein besonders infames Teufelswerk sei, gelang es dem Exorzisten E nicht, seine Beobachtungen auf eine breitere empirische Basis zu stellen. Man berechne deshalb ein 90 %-zweiseitiges Konfidenzintervall für den Parameter der Poissonverteilung mit den obigen Daten und bei bekannter Varianz von 0,4!

Aufgabe 21

Es kann nicht sein, daß ihr alle eure Weiber gleich liebt, wenn ihr es auch wolltet; nur wendet euch nicht von einer Frau mit sichtbarer Abneigung ab, laßt sie hierüber lieber in Ungewißheit; wenn ihr euch jedoch vertragt und sorgsam vermeidet, ihr Böses zu tun, so ist Allah versöhnend und barmherzig

Sure 4, Vers 130

(Small sample Problem aus 1001 Nacht)

Scheich A hat drei Frauen B, C und D. Es erscheint ihm geboten, sich jeder Frau in gleichem Maße zu widmen. Keine der Frauen kann seine Entscheidung beeinflussen, sich evtl. am nächsten Tag, so Allah es will, von ihr abzuwenden. In den vergangenen 21 Tagen hat A sich jedoch seiner Frau D nur an vier Tagen liebevoll zugewandt. D fühlt sich deshalb vernachlässigt.

a) Wie wahrscheinlich ist es, daß sich A von 21 Tagen nur an höchstens vier Tagen seiner Frau D widmet, wenn er getreu dem Koran folgt? (Hinweis: $\sigma \approx 2$)

b) Der Scheich verbrachte während der letzten drei Wochen die folgende Anzahl von Tagen mit seinen drei Frauen

$n_B = 10, \qquad n_C = 7$ und $\qquad n_D = 4$ Tage.

Wie wahrscheinlich wäre dies, wenn er sich jeder Frau gleichermaßen zuwenden würde?

c) Um wieviel wahrscheinlicher wäre es unter diesen Voraussetzungen, daß sich bei $n = 21$ Tagen A jeder Frau genau 7 Tage widmet?

d) Man gebe das zu b) und c) passende Urnenmodell an!

e) Der Scheich ist wiederholt mit seinen Frauen von Isfahan nach Mesched geflogen. Dabei kam es gelegentlich vor, daß einmal oder gar zweimal eine der Frauen aus Eifersucht in den fliegenden Teppich gebissen hat, was ein poissonverteiltes Ereignis ist.

Auf seinen letzten zwölf Flügen geschah dies

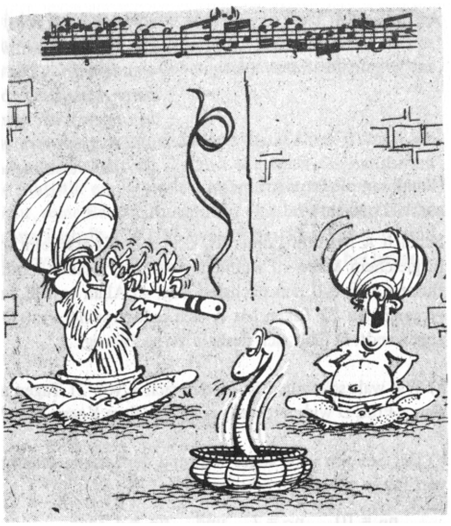
0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 1 mal.

Man schätze den Erwartungswert λ der Poissonverteilung mit der Maximum-Likelihood-Methode!

f) Treten die unter e) beschriebenen Ereignisse ein, so kann der fliegende Teppich etwas unvorteilhafte Flugeigenschaften entwickeln und abstürzen. Der Scheich befürchtet deshalb, daß auf einem Flug eine seiner Frauen mehr als zweimal in den Teppich beißt. Wie wahrscheinlich ist das?

Aufgabe 22

Seine ausgedehnten Reisen zu Geschäftsfreunden in den Nahen Osten haben Diplom-Kaufmann K aus E auch die Welt der Schlangenbeschwörung und Verhaltensforschung näher gebracht. In seinem Forscherdrang begehrt er zu wissen, ob die mitgebrachte Python reticulatus, an der er zusammen mit seinem Sohn im heimischen Garten vielfältige musikalische Darbietungen austestet, auf die Vielseitigkeit seiner Tonkunst unterschiedlich oder gleichförmig reagiert.



Für die Reaktionen der Schlange entwarf er ein 4-Stufen-Schema von 1 (Desinteresse) bis 4 (lebhafte Tanzbewegungen) und über seine letzten Versuche machte er folgende Aufzeichnungen:

	Reaktionsstufe			
Art der Musik	1	2	3	4
klassisch	17	8	7	8
alpenländisch	11	19	12	8
orientalisch	7	9	14	20
Protestsong	12	2	4	2
Punk Rock	3	2	13	22

a) Man bestimme die beiden Randverteilungen sowie die gemeinsame Verteilung bei Unabhängigkeit!

b) Man teste, ob die Randverteilung in bezug auf die Reaktion signifikant verschieden ist von einer Gleichverteilung ($\alpha = 5$ % bei diesem und den folgenden Tests)!

c) Prüfen Sie, ob Unabhängigkeit der beiden Variablen besteht!

d) Prüfen Sie, ob die Verteilungen hinsichtlich der Reaktion der Schlange für alpenländische Musik und für Punk Rock gleich oder verschieden sind!

e) Angenommen, K habe eine Versuchsserie von 400 Darbietungen durchgeführt und auch alle Häufigkeiten der obigen Tafel wären genau verdoppelt. Was würde sich damit an den Tests von Teil b) bis d) der Aufgabe ändern?

f) Wie kann man testen, ob die Schlange Punk Rock mehr schätzt als orientalische Musik?

Aufgabe 23

Das Produktionsunternehmen P bezieht von einem Lieferanten Schrauben, deren Durchmesser normalverteilt ist mit $\mu = 1$ cm und $\sigma = 0{,}01$.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Durchmesser einer Schraube zwischen 0,99 und 1,01 cm beträgt?

b) Für die Produktion darf der Schraubendurchmesser eine bestimmte Größe nicht überschreiten. Der Qualitätskontrolleur zieht aus einer Lieferung eine Stichprobe von 36 Schrauben und errechnet einen durchschnittlichen Durchmesser von $\bar{x} = 1{,}003$. Kann er daraufhin die Hypothese, die Schrauben seien im Schnitt dicker als 1 cm, bestätigen und somit die Lieferung ablehnen ($\alpha = 0{,}05$)?

c) Berechnen Sie aufgrund der Angaben von Aufgabe b) ein 95%-Konfidenzintervall für den durchschnittlichen Durchmesser der Schrauben.

d) In den Produktionshallen der Firma P ist es aus verschiedenen Gründen ziemlich warm. Messungen haben ergeben, daß die Temperatur im Schnitt 30°C mit $\sigma^2 = 12$ beträgt. Berechnen Sie eine Mindestwahrscheinlichkeit dafür, daß die Temperatur zwischen 25 und 35°C liegt.

e) Berechnen Sie die entsprechende genaue Wahrscheinlichkeit, wenn man annimmt, daß die Temperatur stetig gleichverteilt (rechteckverteilt) ist.

Aufgabe 24

Der alternde Playboy Z hat in den letzten Jahren bei 10 Frauen Anklang gefunden. Erfahrungsgemäß ist ihm jedoch nur bei einem Fünftel der Frauen eine harmonische Zweisamkeit und befriedigende Persönlichkeitsentfaltung möglich (Ereignis R „richtige Frau“). Drei von den Frauen hat er geheiratet (Ereignis H). Seine Partnerwahl sei so sehr von irrationalen, zufälligen Faktoren beeinflußt, daß kein sinnvolles Prinzip erkennbar ist.

a) Wie wahrscheinlich ist es, daß er dreimal die falsche Frau ($\overline{R}$) geheiratet hat?

b) Die Wahrscheinlichkeit, daß eine Frau, die er geheiratet hat, die falsche ist, sei bei dem vom Pech verfolgten Z erschreckend hoch, nämlich $P\left(\overline{R}|H\right) = \frac{2}{3}$. Die Wahrscheinlichkeit zu heiraten sei P (H) = 0,3.
Man bestimme die zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilung.

c) Auf einer Fete trifft Z 15 Frauen, die ihm alle recht gut gefallen, zwei von ihnen möchte er noch zu einem Tässchen Bouillon nach Hause einladen. Es sei P (R) = 0,2. Man bestimme die Stichprobenverteilung für die Anzahl der falschen Frauen! Wie heißt diese Verteilung?

falsche Frauen	0	1	2
Wahrscheinlichk			

d) Angenommen es bestünde Unabhängigkeit der Ereignisse H und R. Der Playboy Z kann zwei Arten von Fehlern machen:

1. er kann die richtige Frau nicht heiraten mit der Wahrscheinlichkeit $P(\overline{H}\,|R)$
2. er kann die falsche Frau heiraten mit der Wahrscheinlichkeit $P(H|\,\overline{R})$.

Welchen Fehler begeht er mit der größeren Wahrscheinlichkeit?

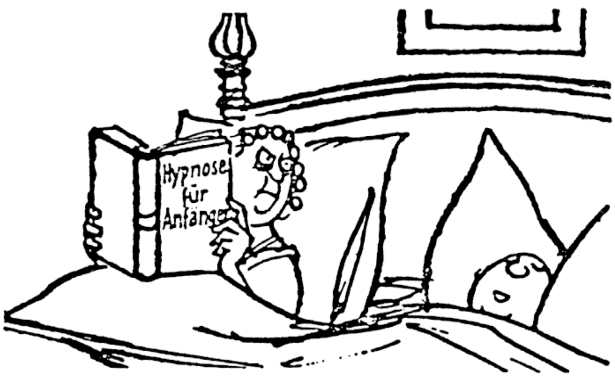
e) Angenommen, die Wahrscheinlichkeit, daß Z heiratet, sei nur 0,2. Kann er dadurch die Wahrscheinlichkeit

O des ersten
O des Zweiten
O von beiden
O von keinem der beiden

der oben genannten Fehler reduzieren?

Aufgabe 25

Der eifersüchtigen Hausfrau H gelingt es trotz verfeinerter Techniken der Befragung und Beeinflussung ihrer Ehemannes E nicht, sich Klarheit über gewisse Vorgänge auf einer Geschäftsreise des E zu verschaffen. Bei den allabendlichen Verhören der letzten 40 Tage (Stichprobe: n = 40) schlief E an 30 Tagen frühzeitig und stumm ein (Ereignis S).



Von den verbleibenden 10 Tagen kam es nur an 2 Tagen zu einem Gespräch (Ereignis G), das auch vieles offen ließ.

a) Man bestimme $P(G|S)$ und $P(G|\,\overline{S})$, sowie die totale Wahrscheinlichkeit P(G)!

b) Bei wiederholten Befragungsversuchen sei P(G) konstant. Man bestimme die Stichprobenverteilung für die Anzahl X der Tage, an denen E gesprächsbereit ist bei einer Stichprobe von n = 40 Tagen (Befragungsversuchen)!

c) Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz der Stichprobenfunktion (Schätzfunktion) $\frac{X}{n}$ und zeigen Sie, daß diese Stichprobenfunktion für die Schätzung von P(G) erwartungstreu und konsistent ist!

d) Die Hausfrau H geht von der Hypothese aus, daß E mit einer Wahrscheinlichkeit von weniger als 6 vH gesprächsbereit ist. Um diese Hypothese zu testen, müßte sie

O einseitig testen,

O zweiseitig testen.

Formulieren Sie die Null- und die Alternativhypothese!

e) Der Hausfrau H ist sehr daran gelegen, die Gesprächsbereitschaft von E nicht zu unterschätzen (trotz der unter Teil d) genannten Vermutung). Sie wird folglich versuchen,

O den Fehler 1. Art

O den Fehler 2. Art

zu vermeiden. Dabei dürfte es ihr entgegenkommen, wenn

der Stichprobenumfang	die Wahrscheinlichkeit α
O groß	O groß
O klein	O klein

ist (bzw. gewählt wird).

Aufgabe 26

Der griechische Olymp ist mit der Zeit zu einem undynamischen, überalterten und kopflastigen Großbetrieb geworden. Die Nymphen Stultitia (Torheit) und Apaedia (Stumpfsinn, Schutzgöttin der Statistiker) unternahmen deshalb eine Personalstatistik auf Stichprobenbasis (Auswahlsatz 1 vH). Sie kamen zu folgendem Ergebnis:

Rang	Anzahl	Betriebszugehörigkeit in Jahren	
		Mittel	Varianz
Topmanagement: Götter	$n_1 = 30$	300	144
Halbgötter, Nymphen und übrige Belegschaft	$n_2 = 60$	150	900

a) Man bestimme ein Konfidenzintervall für die gesamte Varianz der Dauer der Betriebszugehörigkeit (95 % - zweiseitig)!

b) Die beiden Stichproben mit den Umfängen n_1 und n_2 seien als unabhängige Stichproben aufzufassen. Man prüfe, ob sich die beiden Varianzen signifikant unterscheiden (5% Irrtumswahrscheinlichkeit zweiseitig)!

c) Im streng hierarchisch organisierten Betrieb „Olymp“ herrscht, so vermutet Apaedia, vor allem bei den höheren Rängen ein striktes Anciennitätsprinzip, insbesondere eine Tarifpolitik, die sich nicht an der Leistung sondern an der Dauer der Betriebszugehörigkeit orientiert.

Innerhalb der beiden Ränge korreliert der Bruttoverdienst mit der Dauer der Betriebszugehörigkeit wie folgt

Rang 1: $r_1 = 0{,}9$

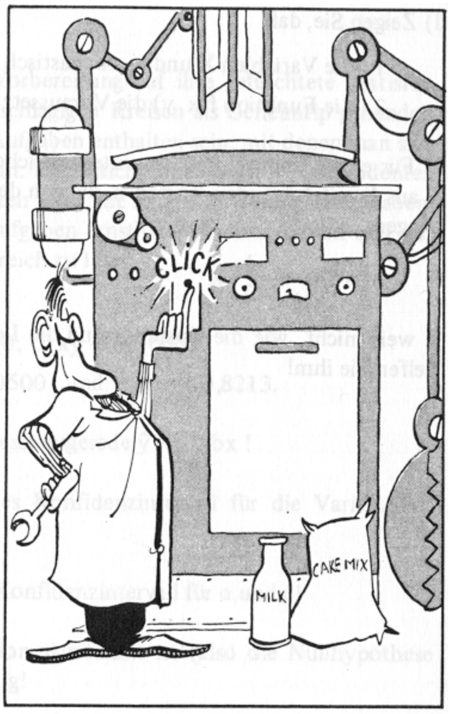
Rang 2: $r_2 = 0{,}7$.

Man teste deshalb, ob sich die beiden Korrelationskoeffizienten signifikant unterscheiden (5% Irrtumswahrscheinlichkeit zweiseitig!)

d) Könnte es sein, daß der Stichprobenkorrelationskoeffizient von $r_2 = 0{,}7$ aus einer Grundgesamtheit stammt, in welcher die Korrelation $\rho_2 = 0$ beträgt (10 % zweiseitig)?

Aufgabe 27

Dem Dipl. Ing. I aus E ist es nach langer Forschungsarbeit gelungen, ein Gerät zu konstruieren, das zwar keine große Lebensdauer X (in Jahren) hat, dafür aber eine gleichbleibend geringe Ausfallrate Y (in Prozent) besitzt. Versuchsreihen haben folgende zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsfunktion ergeben:



$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{200}y\right) e^{-\frac{1}{4}x} \\ \text{für } 0 \le x \text{ und } 0 \le y \le 10 \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

a) Man bestimme die Randverteilungen $f_1(x)$ und $f_2(y)$!

b) Man bestimme die mittlere Lebenserwartung E(X) und die mittlere Ausfallrate E(Y) des Geräts.

c) Man bestimme die bedingte Verteilung $f(y|x)$ und die bedingten Erwartungswerte $E(Y|x)$ für dieses Gerät!

d) Zeigen Sie, daß

1. die Variablen X und Y stochastisch unabhängig sind
2. die Funktion f(x, y) die Voraussetzungen einer Dichtefunktion erfüllt!

e) Für einige dubiose betriebswirtschaftliche Untersuchungen arbeitet Dipl. Kfm. K aus E mit folgenden Kosten u, die von der Lebensdauer und Ausfallrate abhängen:

$$u = 7y + \frac{1}{2}x.$$

K weiß nicht, wie die Kosten u und die Lebensdauer x gemeinsam verteilt sind. Helfen Sie ihm!

Aufgabe 28

a) Herr Dittmeyer verkauft in einer Fußgängerzone Apfelsinen und Orangensaft, der fast so schmeckt wie frisch gepreßt. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Passant Apfelsinen kauft (Ereignis A) beträgt 0,2. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Passant Saft kauft (Ereignis S), beträgt 0,3. Desweiteren gilt $P(S|\overline{A}) = 0{,}125$.

1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich ein Passant zum Kauf beider Produkte entschließt?

2) Berechnen Sie P(S|A). Was können Sie über die Abhängigkeit/Unabhängigkeit der Ereignisse A und S aussagen, wenn Sie diesen Wert mit $P(S|\overline{A})$ vergleichen?

b) Herr D möchte drei vorbeikommenden Kindern fünf (als absolut gleichwertig anzusehende) Apfelsinen schenken.

1) Wieviel Möglichkeiten gibt es, die fünf Apfelsinen aufzuteilen, wenn auch der Fall eintreten kann, daß ein oder mehrere Kinder nichts bekommen?

2) Zeigen Sie, daß folgender Zusammenhang gilt (vgl. auch Formel (2.15a) in der Formelsammlung):

$$\binom{n}{i} = \frac{n}{n-i}\binom{n-1}{i}$$

c) Die Wahrscheinlichkeit, daß eine Apfelsine schlecht ist, beträgt 0,1.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Kunde, der zehn Apfelsinen gekauft hat, <u>keine</u> Schlechte erwischt?

d) Herr D bezieht für seinen Saft Flaschen von einem namhaften Glashersteller. Dabei kann es vorkommen, daß in den Lieferungen defekte Flaschen sind. Allerdings arbeitet der Glashersteller sehr ordentlich, so daß die Wahrscheinlichkeit, daß eine Flasche kaputt ist, nur bei 0,01 liegt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß in einer Lieferung von 500 Flaschen weniger als 10 Flaschen defekt sind?

e) Herr D verkauft die Apfelsinen in Netzen. Dabei bemüht er sich, die einzelnen Netze ungefähr gleich groß zu machen. Um den Preis pro Netz bestimmen zu können, möchte er gerne ein 95%-Konfidenzintervall für das erwartete Gewicht berechnen. Wie groß muß seine Stichprobe (n = Anzahl der Netze) mindestens sein, wenn der absolute Fehler des Konfidenzintervalls nicht mehr als 15 g betragen soll? Dabei soll mit einer Standardabweichung von $\sigma = 50$ g gerechnet werden.

f) Das Gewicht eines Apfelsinennetzes kann als annähernd normalverteilt betrachtet werden mit $\mu = 1000$ g und $\sigma = 50$ g. Angenommen ein Kunde kauft drei Netze. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er weniger als 2974 g Apfelsinen erhält?

Aufgabe 29

Zahllose Studenten haben sich zur Vorbereitung auf ihre gefürchtete Statistikklausur ein Buch gekauft, das in einschlägigen Kreisen als Geheimtip gehandelt wird. In diesem Buch mögen sechzig Aufgaben enthalten sein, mit denen man sich die ganze Statistik „hereinziehen“ kann. Eine Stichprobe von n = 200 Studenten ergab jedoch, daß die meisten Studenten zwar alle Aufgaben durchgelesen haben, sie aber leider nur geneigt waren, X Aufgaben ernsthaft durchzuarbeiten und nur befähigt waren Y < X Aufgaben erfolgreich zu lösen.

Man erhielt folgende Ergebnisse:

$$n = 200, \ \sum x_i = 5500, \ \sum y_i = 4000, \ \sum x_i y_i = 140.000$$

$$\sum x_i^2 = 195.000, \ \sum (y_i - \bar{y})^2 = 30500 \ \text{und} \ r_{xy} = +0{,}8213.$$

a) Man berechne die Stichproben-Regressionsgerade $\hat{y} = a + bx$!

b) Man bestimme ein 95 % zweiseitiges Konfidenzintervall für die Varianz der Störgröße!

c) Man bestimme das 95 % zweiseitige Konfidenzintervall für α und β !

d) Zeigen Sie, daß auch die Korrelation signifikant ist (also die Nullhypothese $\rho = 0$ zu verwerfen ist); $\alpha = 5$ % zweiseitig!

e) Der außerordentliche Erfolg dieses berühmt-berüchtigten Opus ist auch darauf zurückzuführen, wie aufgrund der Umfrage statistisch gesichert ist ($\alpha = 5\%$ einseitig), daß Y zu mehr als 60 % von X bestimmt ist, sich also die fleißige Lektüre dieses Buches bezahlt macht, was ja leider nicht bei jedem Buch der Fall ist. Man zeige, daß diese Behauptung richtig ist, sofern die - leider nur fiktiven - Umfrageergebnisse richtig sind!

Teil III Klausurtraining
b) Lösungen (der 29 Aufgaben)

Aufgabe 1

a) Anordnung (Permutation) von n Elementen ohne Wiederholung: also n! Möglichkeiten.

b) Auswahl von $i \leq n$ Elemente aus n Elementen (hier: i = 2) ohne Berücksichtigung der Anordnung: Kombination ohne Wiederholungen

$$\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n!}{2!(n-2)!}$$

c) (1 und 2) Für die restlichen n-1 Springer gibt es stets, gleichgültig, auf welchem Platz K ist (n - 1)! verschiedene Anordnungen (Permutationen).

d) Es ist zu zeigen, daß die Ungleichung

(*) $$\frac{\binom{cn}{2}}{\binom{n}{2}} > c^2$$ gilt. Der Beweis folgt aus

1. $$\binom{cn}{2} = \frac{cn(cn-1)}{2} = \frac{c^2\left(n^2 - \frac{n}{c}\right)}{2},$$ und

2. $$\binom{n}{2} = \frac{n^2 - n}{2}.$$ Ferner gilt mit c > 1 stets $\dfrac{n^2 - \frac{n}{c}}{n^2 - n} > 1$ was zu (*) führt.

1. Auswahl von m (wobei m < n - 3) aus n - 1 Elementen (n minus Kunstspringer K) ohne Berücksichtigung der Anordnung: $\binom{n-1}{m}$

Jetzt Auswahl aus n - 3 (n minus K und zwei weiteren Personen): $\binom{n-3}{m}$

Aufgabe 2

Es gibt insgesamt 1000 dreistellige Nummern (wobei auch die Nummer 000 mitgezählt ist). 90 Nummern beginnen mit 0 (011 bis 099) und 10 Nummern beginnen mit 00 (000 bis 009). Insgesamt gibt es also 900 Möglichkeiten, die somit ausreichen.

Andere Betrachtungsmöglichkeit:

Verwendung der Ziffern 1, 2, ..., 9 (allgemein Z) ergibt $9^3 = 729$ Möglichkeiten. Hinzu kommen $2 \cdot 9^2 = 162$ Möglichkeiten für Nummern des Typs Z0Z oder ZZ0 sowie 9 Möglichkeiten für die Nummern Z00, also insgesamt 900 Möglichkeiten.

b) günstige Ereignisse : 10 mögliche Ereignisse : 800, somit $\frac{10}{800} = 0{,}0125$

Es ist auch möglich, den Ansatz mit Hilfe der hypergeometrischen Verteilung zu wählen, wenn man davon ausgeht, daß er genau einmal seine Tante am Apparat hat und 9 mal jemand anderen.

$$\frac{\binom{1}{1} \cdot \binom{799}{9}}{\binom{800}{10}} = \frac{10}{800}$$

c1) Ansatz über die Binomialverteilung:

$$\binom{3}{0} \left(\frac{1}{1000}\right)^0 \left(\frac{999}{1000}\right)^3 = \left(\frac{999}{1000}\right)^3 = 0{,}997$$

c2) Ansatz wie unter c1 $\quad \binom{3}{1} \left(\frac{1}{1000}\right)^1 \left(\frac{999}{1000}\right)^2 = 0{,}00299$

d) Die Auswahl von 10 aus 800 Elementen ohne Berücksichtigung der Anordnung (da es auf die Reihenfolge des Gezogenwerdens bei den 10 Nummern nicht ankommt) stellt Kombinationen mit Wiederholung dar:

$$\binom{n + i - 1}{i} = \binom{800 + 10 - 1}{10} = \binom{809}{10} = 3{,}1295 \cdot 10^{22}$$

e) Hier das gleiche Auswahlproblem wie unter d), nur ohne Wiederholung:

$$\binom{n}{i} = \binom{800}{10} = 2{,}7965 \cdot 10^{22}$$

f) Die Zufallsauswahl könnte nur repräsentativ für die Fernsprechteilnehmer sein und würde als Stichprobe für die gesamte Gemeinde dem Prinzip der reinen (uneingeschränkten) Zufallsauswahl nicht entsprechen, da keine Chancengleichheit gegeben ist (nur Fernsprechteilnehmer haben eine Auswahlchance). Zum anderen wird gegen das Prinzip der Unabhängigkeit verstoßen, da man durch Auswahl eines Fernsprechteilnehmers stets auch zugleich andere Nutzer (dessen Apparates) mit auswählt. Hinzu kommt, daß „blindes Greifen" in der Regel keine Zufälligkeit der Auswahl garantiert, insbesondere nicht bei einer so großen Urne wie einem Telefonbuch. Die Zufälligkeit wird dagegen z.B. dann hergestellt, wenn mit Zufallszahlen ausgewählt wird.

Aufgabe 3

a) Kombinationen ohne Wiederholung. Es gibt folgende Möglichkeiten für die untere Ebene $\binom{10}{5} = 252$, mit den verbleibenden Personen für die mittlere Ebene $\binom{5}{3} = 10$ und schließlich für die obere Ebene nur eine verbleibende Möglichkeit $\binom{2}{2} = 1$. Das Produkt und damit die Anzahl der Möglichkeiten ist 2520.

b) $$\underbrace{\frac{\binom{7}{5}\binom{3}{0}}{\binom{10}{5}}}_{\text{untere Ebene}} \cdot \underbrace{\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{2}}{\binom{5}{3}}}_{\text{mittlere Ebene}} \cdot \underbrace{\frac{\binom{0}{0}\binom{2}{2}}{\binom{2}{2}}}_{\text{obere Ebene}} = 0{,}025$$

Das Modell ist „Ziehen ohne Zurücklegen", weil für die sieben „Normal Befähigten" und die drei „Spitzenkräfte" jeweils ein und nur ein Platz vergeben werden kann.

c) 1. Null, da in der oberen Führungsebene nur Spitzenkräfte zu finden sind.

2. $\frac{1}{5}$, hierfür gibt es drei Lösungswege:

Weg 1: zwei Positionen, 10 Bewerber, jede Besetzungsmöglichkeit gleichwahrscheinlich, also $\frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 0{,}2$

Weg 2: Für K bieten bloß folgende Besetzungsmöglichkeiten eine Chance:

Besetzungsmöglichkeit	Wahrscheinlichkeit
B1: ●○ oder ○●	$1 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{15}$
B2: ○○	$\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{7}{15}$

Bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Führungskraft die Person K ist:

$P(K \mid B1) = \frac{1}{7}$ und $P(K \mid B2) = \frac{2}{7}$.

Totale Wahrscheinlichkeit:

$$P(K) = \sum_{i=1}^{2} P(K \mid Bi)\, P(Bi) = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

Weg 3: über die polyhypergeometrische Verteilung bei Unterscheidung von drei Qualitäten:

- ● Führungsperson, Anzahl 3
- ○ normal Befähigter außer K, Anzahl 6
- ⊗ K, Anzahl 1

Man erhält:

$$\underbrace{\frac{\binom{6}{0}\binom{1}{1}\binom{3}{1}}{\binom{10}{2}}}_{\text{Besetzung} \bullet \otimes} + \underbrace{\frac{\binom{6}{1}\binom{1}{1}\binom{3}{0}}{\binom{10}{2}}}_{\text{Besetzung O} \otimes} = 0{,}2.$$

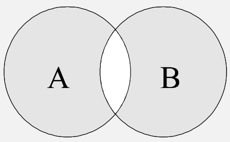
d) Binomialverteilung mit unbekanntem n und x = 1, p = 0,05. Es gilt:

$$0{,}95 = P(x \geq 1) = 1 - P(x = 0) = 1 - \binom{n}{0} \cdot 0{,}05^n \cdot 0{,}95^n$$

also $0{,}95^n = 0{,}05$ und $n = \dfrac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}95} = 58{,}404$ also mindestens 59.

Aufgabe 4

a)

Ereignis	Wahrscheinlichkeit
$(A \cap B) = (AB)$	$P(AB) = P(A\|B) \cdot P(B) = 0{,}24$
$(A \cup B)$	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}96$
entweder $(A\bar{B})$ oder $(\bar{A}B)$ 	$P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B)$ $= P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB)$ $= 0{,}16 + 0{,}56 = 0{,}72$
$\bar{A}\,\bar{B}$	$1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}96 = 0{,}04$

b) Zweipunktverteilung mit $\pi = 0{,}4$

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}4 & \text{wenn } x = 1 \text{ also } A \\ 0{,}6 & \text{wenn } x = 0 \text{ also } \bar{A} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

c) $E(X) = 0{,}4$ $\sigma_x^2 = 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}24$

d)

	$x = 1$	$x = 2$	$\sum$
$y = 1$ $y = 2$	$P(AB) = 0{,}24$ $P(A\bar{B}) = 0{,}16$	$P(\bar{A}B) = 0{,}56$ $P(\overline{AB}) = 0{,}04$	$P(B) = 0{,}8$ $P(\bar{B}) = 0{,}2$
$\sum$	$P(A) = 0{,}4$	$P(\bar{A}) = 0{,}6$	1

Vgl. hierzu auch die im Teil a) bestimmten Wahrscheinlichkeiten.
Die Kovarianz beträgt

$$E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = 0{,}24 - 0{,}8 \cdot 0{,}4 = -0{,}08$$

Für die Korrelation erhält man entsprechend

$$\frac{-0{,}08}{\sqrt{0{,}4\cdot 0{,}6\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}} = -0{,}40825$$

e)

z	0	1	2
f(z)	0,04	0,72	0,24

Hieraus errechnet sich leicht
E(Z) = 0,72 + 0,48 = 1,2
= E(X) + E(Y) = P(A) + P(B)
= 0,4 + 0,8

Für die Varianz von Z erhält man $\sigma_Z^2 = E(Z^2) - [E(Z)]^2 = 1{,}68 - 1{,}44 = 0{,}24$ und weil für die Varianz gilt $\sigma_X^2 = P(A)\cdot P(\overline{A}) = 0{,}4\cdot 0{,}6 = 0{,}24$ und $\sigma_Y^2 = P(B)\cdot P(\overline{B}) = 0{,}8\cdot 0{,}2 = 0{,}16$ und die Kovarianz - 0,08 beträgt, ist auch $\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\sigma_{XY} = 0{,}24 + 0{,}16 - 0{,}16 = 0{,}24$ erfüllt.

Aufgabe 5

a) Nein, da $P(U|P) \neq P(U|\overline{P})$ folglich auch $P(U|P) \neq P(U)$ und $P(UP) \neq P(U)\,P(P)$

b) $P(U\cap P) = P(UP) = P(U|P)\,P(P) = 0{,}5\cdot 0{,}4 = 0{,}2$

$P(U\cup P) = P(U) + P(P) - P(UP) = 0{,}26 + 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}46$

c) $$\frac{\binom{20}{12}\binom{40}{0}}{\binom{60}{12}} = 9\cdot 10^{-8}$$

d) $$\frac{\binom{20}{5}\binom{40}{7}}{\binom{60}{12}} = 0{,}207$$

e) $$\frac{59!(60-12)!}{(59-11)!60!} = \frac{1}{60}$$

Es gibt 60 - 1 = 59 auswählende Personen außer K. Aus ihnen werden 11 genommen. Es gibt dann $\binom{59}{11}$ Möglichkeiten der Auswahl und 11! Möglichkeiten sie anzuordnen, insgesamt also $\frac{59!}{(59-11)!}$ günstige Ereignisse (Variationen ohne Wiederholung), in denen K unter den ersten 11 nicht erscheint. Entsprechend ist die Anzahl der möglichen Ereignisse: $\frac{60!}{(60-12)!}$

Andere Lösungswege:

1) Die Wahrscheinlichkeit, K und 11 andere auszuwählen ist:

$$P(K) = \frac{\binom{50}{11}\binom{1}{1}}{\binom{60}{12}} = \frac{12}{60}$$

Wenn K mit der Wahrscheinlichkeit P(K) ausgewählt wurde, dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß er an 12. Stelle steht (Ereignis S):

$$P(S|K) = \frac{11!}{12!} = \frac{1}{12},$$

da ja auch jede Stelle gleichwahrscheinlich ist.

Wie man sieht, ist $P(K) \cdot P(S|K) = P(SK) = \frac{1}{60}$

2) Wahrscheinlichkeit der Auswahl 11 anderer Personen außer K mal Wahrscheinlichkeit K als 12. auszuwählen:

$$\left(\frac{59}{60} \cdot \frac{58}{59} \cdot \frac{57}{58} \cdot \ldots \cdot \frac{49}{50}\right) \cdot \frac{1}{49} = \frac{1}{60}$$

f) Fehler zweiter Art

g) Nein, da keine Unabhängigkeit der Auffassungen der Richter angenommen werden darf.

Aufgabe 6

a) Gleiche Wahrscheinlichkeit wie die, daß es **höchstens** zwei Giftpilze sind, also mit der Verteilungsfunktion der Poissonverteilung F(2) = 0,9526.

Der hohe Wert von 95% besagt natürlich nicht, daß es sehr wahrscheinlich ist, sich zu vergiften. Bekanntlich ist ja F(2) = f(0) + f(1) + f(2) und es ist f(0) = 0,4493, so daß ein hohe (≈ 45%) Wahrscheinlichkeit besteht, **keinen** Giftpilz zu finden.

b) Gegenwahrscheinlichkeit zur totalen Wahrscheinlichkeit für A

$P(A) = P(A|x = 0)P(x = 0) + P(A|x = 1)\, P(x = 1) + P(A|x = 2)\, P(x = 2) + P(A|x \geq 3)P(x \geq 3)$
$= 0 \cdot 0{,}4493 + 0{,}7 \cdot 0{,}3595 + 0{,}9 \cdot 0{,}1438 + 1 \cdot 0{,}0474$
$= 0{,}42847$

also die Überlebenswahrscheinlichkeit 1 - 0,42847 = 0,57153. Es ist klar, daß P(A|x = 0) = 0 ist.

c) $H_0 : \mu = 0{,}8,\ \sigma = \sqrt{0{,}8}$

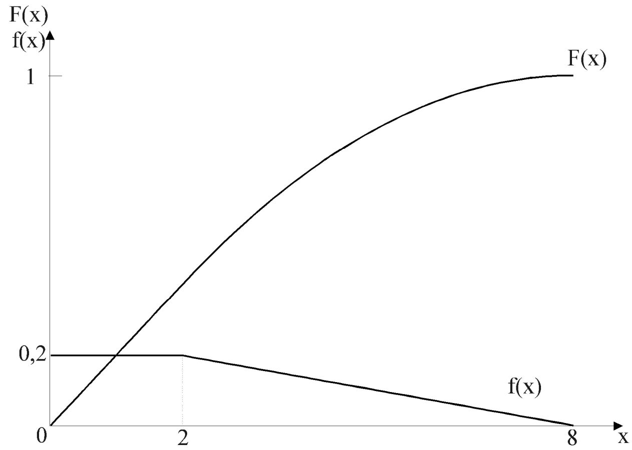
$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{0 - 0{,}8}{\sqrt{\frac{0{,}8}{40}}} = \frac{-0{,}8}{\sqrt{\frac{0{,}8}{40}}} = -5{,}6569$$

also hochsignifikant!

d) $\bar{x} \pm z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0 \pm 1{,}6469 \cdot \frac{\sqrt{0{,}8}}{\sqrt{40}} = 0 \pm 0{,}2326$

(negativer Wert unsinnig) Hochrechnung: 0 bis 9,3 Giftpilze unter den vierzig gesammelten Pilzen

e) $n \geq \frac{1{,}96^2 \cdot 0{,}8}{(0{,}05)^2} = 1229{,}312$



Aufgabe 7

a) Vgl. Abb. für die Gestalt der Dichtefunktion. Es muß gelten:

1. $f(x) \geq 0$ für $0 \leq x \leq 8$

2. $F(8) = \int_0^2 0{,}2dx + \int_2^8 \left(\frac{8}{30}x - \frac{1}{30}x\right)dx = 1$

b) $E(X) = \int_0^2 0{,}2\ x\ dx + \int_2^8 \left(\frac{8}{20}x - \frac{1}{30}x^2\right) dx$

$= \left[0{,}1x^2\right]_0^2 + \left[0{,}133x^2 - 0{,}011x^3\right]_2^8 = 2{,}8$

c)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0{,}2x & 0 \leq x < 2 \\ \frac{8}{30}x - \frac{1}{60}x^2 - \frac{2}{30} & 2 \leq x \leq 8 \\ 1 & x > 8 \end{cases}$$

Bemerkung: die Konstante - $\frac{2}{30}$ verhindert, daß die Funktion F(x) an der Stelle x = 2 eine Unstetigkeit (Bruch) besitzt (vgl. Abb.).

d) $Var(X) = \sigma_x^2 = \int_0^2 0{,}2\,x^2\,dx + \int_2^8 (0{,}133\,x^2 - 0{,}011\,x^3)\,dx - (2{,}8)^2$

$= \left[0{,}067x^3\right]_0^2 + \left[0{,}0889x^3 - 0{,}0083x^4\right]_2^8 - 7{,}84 = 3{,}49$

e) $\int_7^8 \left(\frac{8}{30} - \frac{1}{30}\ x\right) dx = \frac{1}{60}$

f) 1) Null, da außerhalb des Wertebereichs $0 \leq x \leq 8$

2) Nach der Tschebyscheff´schen Ungleichung:

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} = \frac{3{,}49}{36} = 0{,}097$$

g) Eine Obergrenze für die Wahrscheinlichkeit (sie wird bei bekannter Verteilung stets niedriger als 0,97% sein), so daß die letzte Antwort richtig ist.

Aufgabe 8

a) 1. $E(Z) = \frac{1}{2} \cdot 100 + \frac{1}{2} \cdot 200 = 150$

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{4} \cdot 25 + \frac{1}{4} \cdot 49 + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 5 \cdot 7 = 36$$

2. $E(Z) = \frac{1}{3}(100 + 180 + 200) = 160$

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{9} \cdot 25 + \frac{1}{9} \cdot 4 + \frac{1}{9} \cdot 49 + \underbrace{2 \cdot \frac{1}{9}(-1) \cdot 5 \cdot 2}_{\text{A und B (AB)}} + \underbrace{\frac{70}{9}}_{\text{(AC)}} - \underbrace{\frac{2,8}{9}}_{\text{(BC)}} = \frac{125,2}{9} = 13,91$$

b) Die Risikostreuung bedeutet, daß die Kurswerte verschiedener Aktien negativ korrelieren (so B mit A und mit C), dadurch verringert sich die Varianz der Summe der Kurse (also des Kurswertes, des gesamten Portefeuilles). Das erste Portefeuille ist riskanter, da die Wertpapierkurse A und C positiv korrelieren, also tendenziell gemeinsam steigen oder fallen (wegen $r_{AC} = +1$ sogar mit stets gleichen Wachstumsraten). Das zweite Portefeuille ist auch ertragreicher, weil das Gewicht des niedrigsten Kurswertes (A) von $\frac{1}{2}$ auf $\frac{1}{3}$ sinkt.

c) Z ist normalverteilt mit dem gegebenen μ und σ. Den Intervallgrenzen $\pm$ 1,6449 (wegen 90%) entspricht das Intervall $[135,2 \leq Z \leq 164,8]$

d) Das so (anders als im Teil c) definierte Z ist normalverteilt mit $\mu = 150$ und $\sigma = \frac{9}{\sqrt{4}} = 4,5$;

folglich sind die Intervallgrenzen jetzt $[142,6 \leq Z \leq 157,4]$

e) Im Teil d) war ein Zentrales Schwankungsintervall (A) zu berechnen für das arithmetische Mittel (gem. dem Grenzwertsatz von Lindeberg - Lévy, bzw. Wenn $X_1,...,X_4$ nicht normalverteilt sind, gem. dem zentralen Grenzwertsatz). Im Teil c) gilt jedoch Antwort C, da gar kein Schluß im Sinne der Stichprobentheorie (von $\bar{x}$ auf μ oder umgekehrt) vorliegt, sondern ein einer Intervallwahrscheinlichkeit von 90% entsprechender Wertbereich für die Zufallsvariable bestimmt wurde.

Aufgabe 9

a) Geometrische Verteilung für $\pi = 0,05$ und x=10: $f(x) = 0,05 \cdot 0,95^{10}$

b) $F(10) - F(4) = 1-0,95^{11}-(1-0,95^5) = 0,205$.

c) Fragestellung der negativen Binomialverteilung mit r = 3 und x + r = m = 3,4,5 da $x \geq 0$ sein muß. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also:

$$\sum_{x=0}^{2} \binom{x+2}{2} 0,05^3 0,95^x = 0,001158.$$

d) Der Geldbetrag ergibt sich aus dem Erwartungswert, der Anzahl Y der Versuche (nicht der Mißerfolge), also

$$\mu = E(Y) = \frac{1}{0{,}05} = 20 \text{ also DM 10,-}.$$

e) Laut Binomialverteilung $\binom{10}{3} 0{,}05^3 0{,}95^7 = 0{,}010475$.

f) Für die Poissonverteilung ist $\lambda = n\pi = 0{,}5$ und bei $x = 3$ ist der Wert der Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(3|0{,}5) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = 0{,}012636$.

g) Startkapital $x = 20$ (man rechnet zweckmäßig in Einheiten von 50 Pfennig), Ziel $z = 40$. Es sei $p(x)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß K mit einem Kapital von x ruiniert wird. Es sei A das Ereignis, daß er ruiniert wird und G bzw. $\overline{G}$ das Ereignis, daß er im ersten Spiel gewinnt bzw. verliert. Dann ist die totale Wahrscheinlichkeit:

$$\underbrace{P(A)}_{p(x)} = \underbrace{P(A|G)P(G)}_{p(x+1)} + \underbrace{P(A|\overline{G})P(\overline{G})}_{p(x-1)}$$

$$= 0{,}05p(x+1) + 0{,}95\,p(x-1)$$

Man erhält eine Differenzengleichung zweiter Ordnung mit der charakteristischen Gleichung:

$$-0{,}05\,\lambda^2 + \lambda - 0{,}95 = 0 \text{ bzw.}$$

$$\lambda^2 - 20\lambda + 19 = 0 \text{ mit } \lambda_{1/2} = 10 \pm 9$$

Die allgemeine Lösung ist dann:

(1) $p(x) = c_1 \cdot 1^x + c_2 \cdot 19^x$

Die beiden Konstanten c_1 und c_2 findet man durch die Bedingung:

(2) $p(0) = 1$ Startkapital von Null **ist** bereits Ruin.

(3) $p(z) = 0$ Wenn das Ziel erreicht ist, kann kein Ruin mehr auftreten, da dann das Spiel beendet wird.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Aus Gl. 2 folgt dann:} \\ \quad 1 = c_1 + c_2 \\ \\ \text{und aus Gl. 3:} \\ \quad 0 = c_1 + c_2\ 19^{40} \end{array}\right\} \quad c_2 = \frac{1}{1-19^{40}} \text{ und } c_1 = 1 - c_2.$$

Setzt man dies in Gl. 1 ein, so erhält man für $x = 20$ die Ruinwahrscheinlichkeit:

$$p(20) \approx 1 - \frac{19^{40} - 19^{20}}{19^{40} - 1} = 1 - \frac{1}{19^{20}} \approx 1.$$

Der Ruin ist fast sicher. Die Ruinwahrscheinlichkeit hängt, wie man sieht von der Zielsumme z, vom Startkapital x, das beim Ruin verspielt wird und von der Gewinnwahrscheinlichkeit ab.

h) Gl. 3 ist entsprechend zu ändern. Man erhält dann mit $z = 24$

$$p(20) \approx 1 - \frac{1}{19^4} = 0{,}99999233\,,$$

also auch hier wird ein fast sicherer Ruin wegen der geringen Gewinnwahrscheinlichkeit von nur 5%.

Lösung zur Aufgabe 10

a) 8^{10} , d.h. über eine Milliarde

b) Trefferwahrscheinlichkeit $\frac{1}{8}$ (weil stets eine der acht Verteilungen auch tatsächlich gemeint ist) und n = 10 unabhängige Versuche, also $\binom{10}{2}\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\frac{7}{8}\right)^8 = 0{,}2416$.

c) Geometrische Verteilung $\left(\frac{7}{8}\right)^4 \frac{1}{8} = 0{,}0733$.

d)

	Verteilung	Parameter	E(X)
Grundgesamtheit	Zweipunkt-	$\pi = \frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
Stichprobenverteilung für X	Binomial-	$n = 10$ $\pi = \frac{1}{8}$	$n\pi = \frac{5}{4}$

Die Variable X $(0 \le x \le n)$ ist binomialverteilt mit der Varianz $n\pi(1\text{-}\pi)$, der Stichprobenanteilswert $\frac{X}{n} = p\ (0 \le p \le 1)$ ist (relativiert-) binomialverteilt mit der Varianz $\left(\frac{1}{n}\right)^2 n\pi\,(1 - \pi) = \frac{\pi(1-\pi)}{n}$. Diese Varianz strebt mit $n \to \infty$ gegen Null. Folglich ist die Schätzfunktion $p = \frac{X}{n}$ für π eine konsistente Schätzfunktion.

e) Sei A das Ereignis, die Verteilung richtig zu raten, ferner S der Student und N der Nachbar, so gilt

$P(A|N) = 4P(A|S) = 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$ und die totale Wahrscheinlichkeit ist

$$P(A) = \frac{1}{8}\cdot\frac{4}{10} + \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{10} = 0{,}35.$$

f) Weil sonst A kein Zufallsereignis wäre.

g) Zu den 0,1 $^{o}/_{oo}$ gelangt man durch den Ansatz $\frac{1}{100}\cdot\frac{1}{99}$. Das ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß zunächst die Klausur von S und dann die Klausur von N nachgesehen wird. Das ist jedoch nicht die gesuchte Wahrscheinlichkeit, denn es ist für das gestellte Problem irrelevant, ob

1. die Reihenfolge SN oder NS lautet
2. ob das Tupel SN bzw. NS als erste und zweite oder als i-te und (i+1)-te Klausur ($1 \leq i \leq 99$) nachgesehen wird.

Berücksichtigt man dies, so ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{2 \cdot 99 \cdot 98!}{100!} = \frac{2}{100} = 2\,\%$ statt $0{,}1\,‰$. Man beachte, daß es bei jeder der 99 Möglichkeiten für die Folge SN (auf den Plätzen 1 und 2, 2 und 3, ... , 99 und 100) jeweils 98! Reihenfolgen für die übrigen Klausuren gibt! Die Wahrscheinlichkeit, daß zwei Klausuren nacheinander durchgesehen werden, wenn n Klausuren gut durchmischt sind, ist mithin stets 2/n. Das sind z.B. bei 20 Klausuren 10% bei 40 Klausuren noch 5% usw.

Aufgabe 11:

a) Das Intervall bei $t_{n-1;\,0,95} = 3{,}18$ und $n = 4$ sowie $\bar{x} = \frac{1}{4}(40+\ldots+90) = 60$ ist $[28{,}2 \leq \mu \leq 91{,}8]$.

b) Gem. Teil a) ist 90 Min. noch im t-verteilten (3 Freiheitsgrade) Konfidenzintervall enthalten.

c) Es liegt eine Gleichverteilung (Rechteckverteilung) für das Intervall $25 \leq x \leq 95$ vor. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist: $\int_{90}^{95} f(x)dx = \frac{5}{70} = 0{,}07143$

d) $E(X) = 60, \sigma_x^2 = \frac{70^2}{12} = 408{,}33 \quad (\sigma = 20{,}21)$

e) Tschebyscheff´sche Ungleichung mit $t\sigma = 30$, $\sigma = 20$ (vgl. oben Teil a) also $t = 1{,}5$. Liefert $P\{\cdot\} > 1 - \frac{1}{1{,}5^2} = \frac{5}{9} = 0{,}5555$.

f) Gefragt nach $\bar{x}$, nicht x bei einer Stichprobe vom Umfang n = 4 aus einer gem. H_1 normal-verteilten Grundgesamtheit, also

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_1}{\sigma_1 / \sqrt{n}} = \frac{120-100}{10} = 2 \text{ folglich } F(2) = 0{,}9722$$

g) Weder α noch β, weil die Intervallwahrscheinlichkeit nicht bis zu einer Grenze $\bar{x}_c$ eines „kritischen Bereichs“, sondern bis zu einem willkürlich gewähltem $\bar{x} = 120$ bestimmt wurde. Andernfalls wäre es β. Der General sollte für diese β (Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2. Art) einen niedrigeren Wert wählen.

Aufgabe 12

a)

$$\frac{\binom{3}{3}\binom{3}{0}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{20} = 0{,}05 \text{ mit der hypergeometrischen Verteilung.}$$

Andere Lösungsmöglichkeiten über Kombinatorik:

Aus 6 Elementen 3 ohne Wiederholung anordnen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge (Kombination ohne Wiederholung) ergibt:

$\binom{6}{3} = 20$ Möglichkeiten, da jede gleichwahrscheinlich, ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{20}$.

Noch zu observieren N = 6 - 3 = 3, darunter noch Verdächtige M = 3 - 2 = 1

Gesuchte Wahrscheinlichkeit: $\dfrac{\binom{1}{1}\binom{2}{0}}{\binom{3}{1}} = \dfrac{1}{3}$.

Andere Lösungsmöglichkeiten: drei Personen werden observiert (Anzahl der möglichen Fälle), einer davon ist verdächtig (günstiger Fall), also ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$.

b) M = n = x unbekannt. N = 6. Folglich gilt:

$$\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{1\cdot\binom{N-M}{0}}{\binom{6}{n}} = \frac{1\cdot 1}{\binom{6}{n}} = 0{,}05 = \frac{1}{20} \quad \text{also } n = 3$$

denn $\binom{6}{3} = 20$.

c) Jetzt M = n = x = 6 und N = 12, somit $\dfrac{1}{\binom{12}{6}} = 0{,}00108 < 0{,}05$, die zweite Antwort ist also richtig.

Aufgabe 13

a) $f(x|\lambda = 1) = \dfrac{1^x}{x!}e^{-1} = \dfrac{1}{x!e}$

b)

Fall	Wahrscheinlichkeit
1) x = 0	0,3679
2) x = 1	0,3679
3) x > 2	0,0803 = 1 - F(2)

c) $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\lambda} = 1$

d) Binomialverteilung.

e) $n \to \infty$, $\pi \to 0$, $n\,\pi = \lambda = \text{const.}$

f) Konvergenz von Verteilung.

g) Da n = 36 ist, dürfte für die Stichprobenverteilung von $\bar{x}$ bei poissonverteilter Grundgesamtheit die übliche Approximation der Normalverteilung bereits hinreichend gut sein. Die Fragestellung entspricht dem Test der Hypothese $H_0 : \mu = \lambda = 1$ bei $\sigma_0 = 1$ (poissonverteilt), $z_\alpha = 2{,}3262$. Testgröße folglich:

$$\frac{\frac{1}{3}-1}{\sqrt{\frac{1}{36}}} = -4 \text{ da ja } \bar{x} = \frac{4+2\cdot 4}{36} = \frac{1}{3} \quad \text{und } n = 36$$

Da $4 > z_\alpha$ ist H_0 abzulehnen. Einseitiger Test, da $H_1 : \mu < \lambda = 1$.

Anmerkung: Da die Poissonverteilung reproduktiv ist, ist auch $\sum X_i$ und $\frac{1}{n}\sum X_i$ poissonverteilt. Im Beispiel dieser Aufgabe ist bei Geltung der Nullhypothese $\sum X_i$ poissonverteilt mit $\lambda = \sum \lambda_i = 36$. Die exakte Wahrscheinlichkeit für 12 oder weniger Bisse wäre dann: $\sum_{x=0}^{12} \frac{36^x}{x!} e^{-36}$.

Aufgabe 14

a)

Leberwürste	N = 100	Teewürste	N = 40
	M = 10		M = 4
	n = 2		n = 1
	x = 2		x = 1

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$\frac{\binom{10}{2}\binom{90}{0}}{\binom{100}{2}} \cdot \frac{\binom{4}{1}\binom{36}{0}}{\binom{40}{1}} = \frac{45\cdot 4}{4950\cdot 40} = 0{,}000909\,.$$

b) Grundgesamtheit ist zweipunktverteilt $f(x) = \begin{cases} \pi = 0{,}1 & \text{für } x = 1 \text{ (verdorben)} \\ 1 - \pi = 0{,}9 & \text{für } x = 0 \text{ (unverdorben)} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Stichprobenverteilung für n = 10 ohne Zurücklegen ist die hypergeometrische Verteilung

$$f(x) = \frac{\binom{10}{x}\binom{90}{10-x}}{\binom{100}{10}},\ x = 0,1,\ldots,10\,.$$

Exkurs:

Zu konkreten Berechnungen empfiehlt es sich wegen des mit f(x) verbundenen Rechenaufwandes (man verwende, zumindest zur Kontrolle, Rekursionsformeln) diese Verteilung durch die Normalverteilung mit $\mu = n\pi$ und $\sigma^2 = n\pi(1-\pi)\frac{N-n}{N-1}$ also mit $\mu = 1$ und $\sigma^2 = 10 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot \frac{90}{99} = 0{,}8182$, d.h. σ = 0,9045 zu approximieren. Man erhält folgende Wahrscheinlichkeiten:

	exakt: f(x)	approximiert mit Normalverteilung (ohne Kontinuitätskorrektur)	
x = 0	0,3305	$z = \frac{0-1}{0{,}9045} \to F(-1{,}1) =$	0,1351
x = 1	0,4080	$z = 0 \to F(0) - F(-1{,}1) =$	0,3679
x = 2	0,2015	$z = 1{,}1$	0,3649
x > 2	0,0600		0,1351

Die Approximation ist bei N = 100 und $\frac{n}{N} = 0{,}1$ noch ziemlich schlecht. Das zeigt sich auch daran, daß die Schiefe der hypergeometrischen Verteilung bei diesem Parameter N, M und n

$$\gamma = \frac{(N-2n)\left(1-2\frac{M}{N}\right)}{(N-2)\sqrt{n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}}} = \frac{80 \cdot 0{,}8}{98\sqrt{0{,}9\frac{90}{99}}} = 0{,}722$$

erheblich von der Symmetrie ($\gamma = 0$) der Normalverteilung abweicht.[1]

c) Vgl. Exkurs: $\mu = 1$, $\sigma^2 = 0{,}8182$

d) Normalverteilung mit den Parametern von Teil c (vgl. Exkurs).

e) Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace

f) Test der Hypothese $H_0 : \pi = 0{,}1$ bei $p = \frac{1}{4}$ und n = 4, N = 100, $z_\alpha = 1{,}6449$. Testgröße folglich $\frac{\frac{1}{4} - 0{,}1}{\sqrt{\frac{0{,}1 \cdot 0{,}9}{4} \cdot \frac{100-4}{100-1}}} = 1{,}0155 < z_\alpha$ also H_0 annehmen!

Einseitiger Test, da Arbeitshypothese der Hausfrau $H_1 : \pi > 0{,}1$!

g) Anwendung der polyhypergeometrischen Verteilung $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$

$$\frac{\binom{6}{2}\binom{8}{1}\binom{126}{0}}{\binom{140}{3}} = 0{,}000268 \text{ also noch kleiner als im Teil a).}$$

Aufgabe 15

a) 1. $P(V) = 0{,}2$; $P(S) = 0{,}3$

[1] Die Schiefe der entsprechenden Binomialverteilung mit n = 10 und p = 0,1 wäre + 0,84.

$P(\overline{V} \cap \overline{S}) = 0{,}6$

$P(\overline{V} \mid \overline{S}) = \dfrac{P(\overline{V} \cap \overline{S})}{P(\overline{S})} = \dfrac{0{,}6}{0{,}7} = 0{,}8571$

2. $P(V \cup S) - P(V \cap S)$

$= P(V) + P(S) - 2P(V \cap S)$

$= 0{,}2 + 0{,}3 - 2 \cdot 0{,}1 = 0{,}3$

b) 1. $X \sim B(8;0{,}2)$

$P(x = 3) = 0{,}1468$

2. $X \sim G(0{,}8)$

$P(x = 2) = 0{,}8 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}032$

c) $X \sim H(10;23;178)$

$$P(x = 3) = \frac{\binom{23}{3}\binom{178-23}{10-3}}{\binom{178}{10}}$$

d) 1) Ja, da $P(A|G) \neq P(A \mid \overline{G})$

2) $P(A) = P(A \mid G) \cdot P(G) + P(A \mid \overline{G}) \cdot P(\overline{G}) = 0{,}1 \cdot 0{,}871 + 0{,}05 \cdot 0{,}129 = 0{,}09355$

e) 1) H_0: $\mu = 15$ vs. H_1: $\mu > 15$

$$T = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}} = \frac{16 - 15}{\frac{2}{5}} = 2{,}5$$

$z_\alpha = 1{,}6449 \quad \Rightarrow \quad H_0$ ablehnen

2) Fehler 1. Art: S glaubt fälschlich, daß der Sender mehr als 15 Minuten Werbung bringt.

Fehler 2. Art: S glaubt, der Sender bringe wirklich nur 15 Minuten Werbung, obgleich es mehr sind

Aufgabe 16

a) 1. $Z = \dfrac{0{,}8 - 0{,}4}{0{,}4} = 1$; gesuchte Wahrscheinlichkeit für $x \geq 0{,}8$ ist

$1 - F(Z) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$

2. $(0{,}1587)^9 = 0{,}639 \cdot 10^{-8}$

b) Zu achten ist auf die Formulierung „im Mittel“. Während unter a nach der Verteilung von X gefragt ist, ist jetzt die Verteilung von $\overline{X}$ zu betrachten. Es gilt:

Wenn X ~ N ($\mu = 0{,}4$, $\sigma^2 = 0{,}16$), dann $\overline{X} = \frac{\sum X}{n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

also ist $Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0{,}1)$

Mithin ist $Z = \frac{0{,}8 - 0{,}4}{\frac{0{,}4}{\sqrt{9}}} = 3$ und die gesuchte Wahrscheinlichkeit für $\overline{x} \geq 0{,}8$ ist $1 - F(3) = 1 - 0{,}9987 = 0{,}0013$, das ist ca. 20359 mal soviel wie im Teil a). Diese Relation überrascht nicht, da bei a) Verlangt war, daß **alle** Spaghettilängen X_1, X_2, ... ,X_9 über 80 cm sind, im Teil b) nur, daß das Mittel $\overline{X} \geq 0{,}8$ ist, was ja bedeutet, daß einige Spaghetti **unter** 80 cm lang sein können, wenn andere über 80cm lang sind, daß aber keinesfalls alle Spaghetti über 80 cm lang sein können.

c) Fragestellung von Teil b): nach $\overline{X}$, relevant für Stichprobentheorie

Fragestellung von Teil a): nach X, betrifft den einleitenden Text („alle länger als 80cm").

Aufgabe 17

a) $\frac{\binom{1}{0}\binom{5}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{2}{3}$

oder:

A = erster Zug keine vergiftete Praline
B = zweiter Zug keine vergiftete Praline

$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{3}$

b) $E(X) = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$; $\sigma_x^2 = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{9} = 0{,}222$

c) Grundgesamtheit ist zweipunktverteilt

$$f(x)\begin{cases} \pi = \frac{1}{6} & \text{für x = 1 (Vergiftung)} \\ 1 - \pi = \frac{5}{6} & \text{für x = 0 (keine Vergiftung).} \end{cases}$$

Die (Ober)- Grenze des 90%-einseitigen Schwankungsintervalls für den Stichprobenanteil p bei Stichproben vom Umfang n = 2 aus dieser Grundgesamtheit sollte $\geq 0{,}5$ sein, da nur dann der Tod eintritt. Sie beträgt bei $z_\alpha = 1{,}2816$

$$\pi + z_\alpha \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} \sqrt{\frac{6-2}{6-1}} = \frac{1}{6} + 1{,}2816 \cdot 0{,}2357 = 0{,}4687.$$

Die Annäherung an die Normalverteilung ist jedoch bei n = 2 sehr schlecht. Die exakten Wahrscheinlichkeiten nach der hypergeometrischen Verteilung sind (vgl. Teil a)

für x = 1 vergiftete Praline, also p = 0,5 genau 1/3

für x = 0 p = 0 2/3.

Rechnet man mit **zwei** vergifteten Pralinen bei 6 Pralinen so ist

$$\left.\begin{array}{l} \text{für } x = 2 \text{ also } p = 1 \quad \text{Wahrsch. } \frac{1}{15} \\ \text{für } x = 1 \text{ also } p = 0{,}5 \quad \text{Wahrsch. } \frac{8}{15} \end{array}\right\} \text{Summe: } 0{,}6 < 0{,}9.$$

Erst bei **M=3** vergifteten Pralinen ist die Wahrscheinlichkeit für $p \geq \frac{1}{2}$ nach der hypergeometrischen Verteilung 0,8. Rechnet man mit einem 90% Schwankungsintervall wie oben, so ist die Obergrenze 0,9053!!

Der Statistiker wird ihm sagen, daß **mindestens** drei, besser aber vier Pralinen vergiftet werden sollten. Mit der Approximation der Normalverteilung an die hypergeometrische Verteilung werden jedoch die Wahrscheinlichkeiten für $p \geq 0{,}5$ stark überschätzt, wie die folgende Tabelle zeigt:

Wahrscheinlichkeit für einen Anteil $p \geq \frac{1}{2}$ von vergifteten Pralinen bei n = 2 in der Stichprobe bei unterschiedlicher Anzahl M der vergifteten Pralinen

M	Hypergeometrische Verteilung	Normalverteilung (ohne Kontinuitätskorrektur) μ	σ	Wahrscheinlichkeit
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0,2357	1 - F (-0,707) = 0,7611
2	0,6	$\frac{2}{6}$	0,2981	1 - F (-1,118) = 0,8686
3	0,8	0,5	0,3162	1 - F (-1,581) = 0,9441
4	$\frac{14}{15}$=0,9333	0,6667	0,2981	1 - F (-2,236) = 0,9875
5	1	0,8333	0,2357	1 - F (-3,535) = 0,9998
6	1	1	0	1

d) Ist die Grundgesamtheit zweipunktverteilt, so ist die Stichprobenverteilung bei Stichproben **ohne** Zurücklegen für X bzw. p die hypergeometrische Verteilung mit den Parametern

$$E(\overline{X}) = n\pi \qquad \sigma_{\bar{x}}^2 = n\pi(1-\pi)\frac{N-n}{N-1}$$

$$E(p) = \pi \qquad \sigma_p^2 = \frac{\pi(1-\pi)}{n}\frac{N-n}{N-1}$$

Bei **großem** n (meist n $\geq$ 30) ist diese Verteilung mit der Normalverteilung zu approximieren (bei entsprechendem μ und σ). Diese Approximationsbedingungen sind hier nicht erfüllt, wie obige Berechnungen zeigen (n ist ja nur 2 !!).

Im Fall „mit Zurücklegen" ist die Stichprobenverteilung für p die Binomialverteilung mit der Varianz $\frac{\pi(1-\pi)}{n}$, was größer ist als im Falle der hypergeometrischen Verteilung, da der Korrekturfaktor $0 \leq \frac{N-n}{N-1} \leq 1$ ist.

Aufgabe 18

a) Konfidenzintervall für $\Delta = \pi_1 - \pi_2$ bei $p_1 - p_2 = 0{,}1 - 0{,}05 = 0{,}05$, $n_1 = 30$ und $n_2 = 100$. Die Intervallgrenzen sind dann (bei $z_\alpha = 1{,}96$; mit t-Verteilung $\approx 1{,}98$).

$$0{,}05 \pm 1{,}96\sqrt{0{,}003475} \text{ also } -0{,}066 \leq \Delta \leq 0{,}166$$

b) $\lambda = 80 \cdot 0{,}05 = 4$, $1 - F(8) = 1 - 0{,}9786 = 0{,}0214$

c) Die erste Antwortmöglichkeit ist nicht notwendig richtig (sie kann richtig sein). Denn man kann auch (wie oben geschehen) mit der Annahme $\pi_1 = 0{,}1$ und $\pi_2 = 0{,}05$ also explizit $\pi_1 \neq \pi_2$ ein Konfidenzintervall bestimmen, das $\Delta = 0$ umschließt. Aus obigem Ergebnis folgt also nicht, daß $\Delta = 0$ sein muß, wohl aber, daß $\Delta = 0$ sein kann. Mit $\Delta = 0$ ist nicht verbunden $\pi_1 = \pi_2 = 0$ und auch nicht $\pi_1 = \pi_2 = 0{,}1$ sonder nur $\pi_1 = \pi_2$, so daß auch die Antworten 4 und 6 falsch sind. Es gilt also

F, F, R, F, R, F.

d) 1. Proportionale Aufteilung $n_1 = \frac{18000}{208000} \cdot 104 = 9$ und $n_2 = \frac{190000}{208000} \cdot 104 = 95$.

2. Optimale Aufteilung ($n = n_1 + n_2$) $N_1 = 190000$ und $N_2 = 18000$

$$\frac{n_k}{n} = \frac{N_k \sigma_k}{\sum_k N_k \sigma_k} \text{ mit } \sigma_k^2 = \pi_k(1-\pi_k) \text{ und } k = 1,2; \text{ also}$$

$n_1 = 11{,}89 \approx 12$ Christen und $n_2 = 92{,}1 \approx 92$ Moslems.

e) $n - 1 \geq \frac{1{,}96^2 \cdot 0{,}25}{(0{,}02)^2 + K}$ bei $K = \frac{1{,}96^2 \cdot 0{,}25}{18000}$ liefert $n \geq 2120$.

Aufgabe 19

a) Subskript 1 : Indien, 2 : Deutschland, einseitiger Test, da $H_1 : \mu_1 < \mu_2$.

Zwei - Stichproben - Test der Hypothese $H_0 : \Delta = \mu_1 - \mu_2 = 0$

b) Testgröße z (alles nach Umrechnung in DM)

$$\hat{\Delta} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 4 - 5 = -1 \text{ DM}$$

$$\left.\begin{array}{l} n_1 = 100,\ s_1^2 = \frac{1}{4}\cdot 49 = 12{,}25\ \text{DM}^2 \\ n_2 = 400,\ s_2^2 = 4\ \text{DM}^2 \end{array}\right\}\ \hat{\sigma}^2 = \frac{2825}{498} = 5{,}67,\ \hat{\sigma} = 2{,}38$$

$$z = \frac{-1}{2{,}38}\sqrt{\frac{40000}{500}} = -3{,}755 \text{ also hochsignifikant (größer als } 1{,}2816 = z_\alpha\text{).}$$

Der Kinobesuch ist in Indien signifikant billiger als in der Bundesrepublik.

c) Zehn Antwortmöglichkeiten, gezählt von oben an. Richtig sind die Antworten

5: bei Geltung von H_0 tritt $z \geq 1{,}2816$ **höchstens** mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% auf; da bei $z \geq 1{,}2816$ H_0 verworfen würde, begeht man einen Fehler 1. Art (da ja H_0 gilt) höchstens mit einer Wahrscheinlichkeit von $\alpha = 0{,}1$

10: da ja die für $z = -3{,}755$ entsprechende Wahrscheinlichkeit viel kleiner ist als 10%

Ob die Nullhypothese richtig oder falsch ist und mit welcher (subjektiven) Wahrscheinlichkeit man sie annimmt oder verwirft, berührt den Test nicht. Folglich sind die Antworten 1 bis 4, 7 und 8 definitiv falsch. Gelten lassen könnte man auch Antwort 6 mit dem Zusatz, daß die Irrtumswahrscheinlichkeit eine Obergrenze für diese exakte (sog. Probit) Wahrscheinlichkeit darstellt. Entsprechendes gilt für Antwort 9.

Aufgabe 20

a) Da $\bar{x} = 0{,}4$ und $s^2 = 0{,}4$ wird eine Poissonverteilung mit $\lambda = E(X) = \sigma_x^2 = 0{,}4$ und eine Normalverteilung mit $\mu = \sigma^2 = 0{,}4$ angenommen. Man erhält für n = 100 danach folgende (theoretische, d.h. bei Geltung der betreffenden Verteilung) zu erwartenden Häufigkeiten

x	Poissonverteilung	Normalverteilung	empirisch
0	$67{,}03 \approx 67$	F(0,16) 100 = 56,36	67
1	$26{,}81 \approx 27$	[F(1,74) - F(0,16)] · 100 = 39,55	27
2	$5{,}36 \approx 5$	[F(3,32) - F(1,74)] · 100 = 4,04	5
3	$0{,}72 \approx 1$		1
4 und mehr	$0{,}08 \approx 0$		0

Da die Normalverteilung stetig ist, empfiehlt es sich als Klassengrenze $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$ (Kontinuitätskorrektur) einzuführen. Dann entspricht z = 0,158; z = 1,739; usw.

b) Die empirische Häufigkeitsverteilung entspricht augenscheinlich gut einer Poissonverteilung (mit $\lambda = 0{,}4$) d.h. die χ^2 - Testgröße ist Null. Sie entspricht offensichtlich weniger der entsprechenden Normalverteilung. Gleichwohl ist ein χ^2 - Anpassungstest wenig sinnvoll, da theoretische Häufigkeiten auftreten, die weit kleiner als 5 sind. Durch Zusammenfassung von Klassen (etwa „2 und mehr“) würden jedoch Freiheitsgrade verlorengehen.

c) 1. Geometrische Verteilung mit x = 2, also y = 3, also $0{,}4 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}144$

2. $1 - 0{,}6^3 = 0{,}784$

3. Negative Binomialverteilung mit r = 2 und p = 0,4; man erhält für m = 3 die Wahrscheinlichkeit $\binom{2}{1}\pi \cdot (1-\pi) = 0{,}192$

d) $E(Y) = \frac{1}{\pi} = \frac{1}{0{,}4} = 2{,}5$ und $\sigma_y^2 = \frac{1-\pi}{\pi^2} = 3{,}75$

e) 1. $1 - \left(1 - \frac{0{,}4}{200}\right)^{300} = 0{,}45152$

2. $1 - e^{0{,}4 \cdot 1{,}5} = 0{,}45119.$

Die Ähnlichkeit der beiden Ergebnisse war zu erwarten, da die EV das stetige Analogon zur GV ist.

f) Da in einem Intervall von einem Jahr die Anzahl X der Teufel poissonverteilt ist mit λ = 0,4 ist für das Intervall von t = 4 Jahren X poissonverteilt mit $\lambda \cdot t = 1{,}6$.

Dann gilt

$E(X) = 1{,}6$ Teufel

$$f(2) = \frac{1{,}6^2}{2!} e^{-1{,}6} = 0{,}2584$$

g) $P\left(0{,}4 \pm 1{,}6449\sqrt{\frac{0{,}4}{100}}\right) = 0{,}9$; Grenzen des Intervalls $0{,}296 \le \mu = \lambda \le 0{,}504$

Aufgabe 21

a) Exakte Wahrscheinlichkeit $\sum_{x=0}^{4} \binom{21}{x} \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{21-x} = 0{,}121156$,

angenähert durch die Normalverteilung mit $\mu = 21 \cdot \frac{1}{3} = 7$ und $\sigma^2 = 21 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = 4\frac{2}{3}$ ergibt sich z = -1,39 also F(z) = 0,823, eine um fast 4% geringere Wahrscheinlichkeit.

b) Multinomialverfahren (Polynomialverteilung)

$$\frac{21!}{10!7!4!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 \left(\frac{1}{3}\right)^4 = 0{,}01127 = P(10,\ 7,\ 4)$$

c) Es ist $\frac{P(7,\ 7,\ 7)}{P(10,\ 7,\ 4)} = \frac{21!}{7!7!7!} : \frac{21!}{10!7!4!} = 3{,}4286$, so daß $P(7,\ 7,\ 7) = 0{,}038151$ ist.

d) 21 mal Ziehen **mit** Zurücklegen aus einer Urne mit jeweils gleich vielen schwarzen (B), weißen (C) und roten (D) Kugeln.

e) Die Likelihood-Funktion lautet

$$L = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} \ldots \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} = e^{-12\lambda}\left(1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\lambda}{1!} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\lambda^2}{2!} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\lambda}{1!}\right) = e^{-12\lambda}\left(\frac{\lambda^4}{2}\right)$$

Folglich ist $\ln L = -12\lambda + 4 \ln\lambda - \ln 2$

und aus $\frac{d\ln L}{d\lambda} = -12 + \frac{4}{\lambda} = 0$ folgt $\hat{\lambda} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} = \overline{x}$ für den Maximum-Likelihood-Schätzer von λ.

f) Gemäß Poissonverteilung mit $\lambda = \frac{1}{3}$ ist die Wahrscheinlichkeit 1 - F(2) = 0,00482.

Aufgabe 22

Die Aufgabe behandelt verschiedene Varianten des χ^2 - Tests, nämlich den Anpassungs-, Unabhängigkeits- und Homogenitätstest.[2])

a) Randverteilung $\{n_{.j}\}$ der Reaktionsstufen $n_{.j} = \sum_i n_{ij}$ wobei n_{ij} die vorgegebenen empirischen Häufigkeiten sind.

Stufe	1	2	3	4
Häufigkeit	50	40	50	60

Randverteilungen $\{n_{.j}\}$ der Musikarten $n_{i.} = \sum_j n_{ij}$, $n = \sum_i n_{i.}$

Musik	klass.	alpen.	orient.	Protest	Punk
Häufigkeit	40	50	50	20	40

gemeinsame Verteilung $\{U_{ij}\}$ bei Unabhängigkeit $U_{ij} = \frac{n_{i.}n_{.j}}{n}$

i\j	1	2	3	4	Σ
klassisch	10	8	10	12	40
alpen.	12,5	10	12,5	15	50
orient.	12,5	10	12,5	15	50
Protest	5	4	5	6	20
Punk	10	8	10	12	40
Σ	50	40	50	60	200

Man beachte, daß die theoretischen Häufigkeiten z.T. kleiner als 10 sind, in einem Fall nämlich U_{42} sogar kleiner als 5, was die Anwendbarkeit des χ^2-Tests beeinträchtigt.

b) Bei Gleichverteilung wären folgende Häufigkeiten zu erwarten 50, 50, 50 und 50. Man berechnet dann die

Prüfgröße P: $P = \frac{0^2}{50} + \frac{10^2}{50} + \frac{0^2}{50} + \frac{10^2}{50} = 4$,

[2]) Vgl. hierzu F. Vogel, Beschreibende und schließende Statistik: Formeln, Definitionen, Erläuterungen, Stichwörter und Tabellen, München, Wien 1979, S. 146 ff.

die χ^2 verteilt ist mit 4 - 1 = 3 Freiheitsgraden. Für 5% zweiseitig (nur die zweiseitige Fragestellung ist angesichts der Konstruktion von P sinnvoll) zeigt die Tabelle der χ^2-Verteilung die Werte 0,22 und 9,35, mithin ist, da 0,22 < P < 9,35 die empirische Verteilung der Reaktion nicht signifikant verschieden von einer Gleichverteilung.

Für alle 20 Felder muß die quadrierte Differenz der empirischen Häufigkeiten N_{ij} von den theoretischen Häufigkeiten U_{ij} durch U_{ij} dividiert werden und die Summe gebildet werden. Das Prüfmaß P ist also

$$P = \sum_{i,j} \frac{\left(n_{ij} - U_{ij}\right)^2}{U_{ij}} = \frac{(17-10)^2}{10} + \ldots + \frac{(22-12)^2}{12} = 55{,}367$$

Bei 3 · 4 = 12 Freiheitsgraden erhält man folgende χ^2-Werte der Tabelle: 4,40 und 23,34. Die Hypothese der Unabhängigkeit ist also zu verwerfen.

d) Bei Geltung der Nullhypothese (Gleichheit aller fünf Verteilungen) müßten die relativen Häufigkeiten für **jede** der fünf Zeilen sein

Reaktion	1	2	3	4
relative Häufigkeit	$\frac{11+3}{90} = 0{,}15\overline{5}$	$\frac{21}{90} = 0{,}23\overline{3}$	$\frac{25}{90} = 0{,}27\overline{7}$	$\frac{30}{90} = 0{,}33\overline{3}$

Man erhielte dann folgende Tafel der absoluten Häufigkeiten:

	1	2	3	4	Σ
alpenl.	$7{,}\overline{7}$	$11{,}\overline{6}$	$13{,}\overline{8}$	$16{,}\overline{6}$	50
Punk-Rock	$6{,}\overline{2}$	$9{,}\overline{3}$	$11{,}\overline{1}$	$13{,}\overline{3}$	40
Σ	14	21	25	30	90

Die Prüfgröße P wird wieder entsprechend Teil c) der Aufgabe gebildet

$$P = \frac{(7{,}\overline{7} - 11)^2}{7{,}8} + \ldots + \frac{(13{,}\overline{3} - 22)^2}{13{,}3} = 24{,}06\,,$$

was bei 4 - 1 = 3 Freiheitsgraden signifikant ist (vgl. Teil b) der Aufgabe). Die Schlange reagiert auf Punk-Rock offenbar **anders** als auf alpenländische Musik.

e) Wie leicht zu sehen ist, führt eine Verdoppelung aller empirischen Häufigkeiten n_{ij} zu einer Verdoppelung der Prüfgröße. Für Teil a) erhielte man also P = 8, was auf dem 10%-, nicht aber auf dem 5%-Niveau Signifikanz bedeuten würde.

f) Wir fassen, (wie schon in den vorangegangenen Teilen) die beobachteten Reaktionen auf k = 2 bzw. k = 5 Musikarten als k **unabhängige** Stichproben auf (die Präferenzen der Schlange werden nicht von der vorangegangenen Darbietung beeinflußt). Die Reaktionsstufen sind als Nominal- oder Ordinalskalenwerte zu interpretieren, weshalb ein parametrischer Test wenig aussagefähig wäre[3]). Die für die Daten und Fragestellung relevanten Tests (z.B. der Mann Whitney U-Test) setzen voraus, daß man für die beiden samples (insgesamt 90 Beobachtungen) durchgängig Rangzahlen vergeben kann, d.h. eine lineare Rangstatistik[4]) konstruiert, was hier schwer durchführbar ist, weil Bindungen (gleiche Skalenwerte) nicht nur innerhalb einer Stichprobe, sondern auch zwischen den beiden Stichproben auftreten. Ein einfacher nichtparametrischer Test für die gestellte Frage wäre der Mediantest, der jedoch bei diesen Daten, wenn man auf eine Interpolation des Zentralwertes verzichtet, Unterschiede kaum aufdecken kann. Wie man sieht, gibt es nicht für jede Art von Fragestellung und Daten einen befriedigenden statistischen Test.

Aufgabe 23

a) $P(0{,}99 \le x \le 1{,}01)$

$$Z_1 = \frac{0{,}99 - 1}{0{,}01} = -1$$

$$Z_2 = \frac{1{,}01 - 1}{0{,}01} = 1$$

$= P(-1 \le Z \le 1) = 0{,}6827$

b) $H_0{:}\mu = 1$ vs. $H_1{:}\mu > 1$

$$T = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{1{,}003 - 1}{0{,}001 / 6} = 1{,}8$$

$z_\alpha = 1{,}6449$ $\Rightarrow H_0$ ablehnen

c) $P\left(\bar{x} - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$

$$P\left(1{,}003 - 1{,}96\frac{0{,}01}{6} \le \mu \le 1{,}003 + 1{,}96\frac{0{,}01}{6}\right) = 0{,}95$$

$0{,}99973 \le \mu \le 1{,}0062$

d) $P(25 \le x \le 35) = P(30 - 5 \le x \le 30 + 5) > 1 - \frac{12}{25} = 0{,}52$ oder

$$P(25 \le x \le 35) = 1 - \frac{1}{\left(\frac{5}{\sqrt{12}}\right)^2} = 1 - \frac{12}{25} = 0{,}52$$

e) $f(x) = \frac{1}{b - a}$ $a \le x \le b$

1. $E(x) = \frac{(b + a)}{2} = 30$

2. $V(x) = \frac{(b - a)^2}{12} = 12$

---

[3])Der t-Test führt allerdings mit der Prüfgröße $\frac{2{,}94 - 3{,}35}{\sqrt{0{,}04313}} = -1{,}9743 < -1{,}66 \approx t_{0{,}95;88}$ zu einem signifikanten Ergebnis (Punk-Rock wird bevorzugt).

[4]) Zu diesem Begriff und den geeigneten Tests (Mann Whitney, v. d. Waerden, Wilcoxon usw.) vgl. H. Büning und G. Trenkler, Nichtparametrische statitische Methoden, Berlin, New York 1978, S 157 ff. Bei Bindungen zwischen den beiden Stichproben könnte man alle möglichen kombinierten geordneten Stichproben untersuchen (wie z.B. in Fishers Permutationstest), was jedoch enorm aufwendig wäre.

Aus 1: b = 60 - a

In 2 eingesetzt: $\frac{(60-a-a)^2}{12} = 12 \;\Rightarrow a = 24$

$\Rightarrow$ b = 60 - 24 = 36

$\Rightarrow \; f(x) = \frac{1}{36-24} = \frac{1}{12} \qquad 24 \le x \le 36$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{36-24} = \frac{1}{12} & \text{für } 24 \le x \le 36 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

f) $\int_{25}^{35} \frac{1}{12}\, dx = \frac{1}{12} x \Big|_{25}^{35} = \frac{35}{12} - \frac{25}{12} = 0{,}8\overline{3}$

Aufgabe 24

a) $\frac{\binom{8}{3}\binom{2}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{42}{90} = 0{,}4667$

b)

	H	$\overline{H}$	Σ
R	0,1	0,1	0,2
$\overline{R}$	0,2	0,6	0,8
Σ	0,3	0,7	1,0

Aus $P(\overline{R}|H) = \frac{2}{3}$ folgt $P(R|H) = \frac{1}{3}$ also $P(HR) = 0{,}1$. Ferner ist bekannt (Teil a), daß P(R) = 0,2 ist.

c) Da die Grundgesamtheit zweipunktverteilt ist mit P(R) = 0,2, $P(\overline{R}) = 0{,}8$ und ohne Zurücklegen gezogen wird, ist die Stichprobenverteilung der hypergeometrischen Verteilung

falsche Frauen	0	1	2
Wahrschein-lichkeit	$\frac{\binom{12}{0}\binom{3}{2}}{\binom{15}{2}} = \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{14} = 0{,}02857$	0,34286	0,62857

d) Bei Unabhängigkeit ergibt sich

	H	$\overline{H}$
R	0,06	0,14
$\overline{R}$	0,24	0,56

dann ist $P(\overline{H}|R) = \frac{P(\overline{H}R)}{P(R)} = \frac{0{,}14}{0{,}2} = 0{,}7$ und $P(H|\overline{R}) = \frac{0{,}24}{0{,}8} = 0{,}3$

Der Fehler erster Art (H_0: die richtige Frau) ist also wahrscheinlicher.

e) P(H) = 0,2 statt bisher 0,3. Dann ergibt sich wieder bei Unabhängigkeit da P(R) = 0,2 = const. stets für

$$P(\overline{H}|R) = P(\overline{H}) = 0{,}8 \text{ und für } P(H|\overline{R}) = P(H) = 0{,}2$$

somit vergrößert (verringert) sich für Z die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster (zweiter) Art, indem er seltener heiratet (P(H) sinkt). Er kann unmöglich beide Fehler reduzieren. Es gilt also F, R, F, F.

Aufgabe 25

a) $P(G|S) = 0$, $P(G|\overline{S}) = 0{,}2$. Die totale Wahrscheinlichkeit ist also

$$P(G) = P(G|S) \cdot P(S) + P(G|\overline{S}) \cdot P(\overline{S}) = 0 + 0{,}2 \cdot 0{,}25 = 0{,}05$$

b) $\binom{40}{x} \cdot \left(\frac{1}{20}\right)^x \left(\frac{19}{40}\right)^{40-x}$

c) $E(X) = n\pi$ also $E\left(\frac{X}{n}\right) = \pi = P(G)$ (Erwartungstreue) und $V\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{\pi(1-\pi)}{n^2}$ also Konsistenz, da $\lim_{n\to\infty} V\left(\frac{X}{n}\right) = 0$.

d) Es ist einseitig zu testen; $H_0 : P(G) = \pi = 0{,}06$ und $H_1 : \pi < 0{,}06$.

e) Es gilt, den Fehler 1. Art zu vermeiden und deshalb führen **kleine Stichproben mit kleinen Irrtumswahrscheinlichkeiten** α (und damit großem Annahmebereich) seltener zur Ablehnung von H_0 obgleich H_0 richtig ist (also zum Fehler erster Art). Der Annahmebereich wird mit abnehmenden α und n größer, so daß der Eindruck entsteht, es gäbe keinen „wesentlichen“ (signifikanten) Unterschied zur Nullhypothese. Die bewußte Wahl eines niedrigen n, um Nichtsignifikanz zu erzielen, wäre natürlich eine Verfälschung des Urteils. Die Aufgabe soll vor einem unreflektierten Umgehen mit dem Begriff „signifikant“ (ohne den Zusammenhang mit n zu bedenken) warnen.

Aufgabe 26

a) Die Gesamtvarianz s^2 errechnet sich wie folgt aus den Varianzen s_i^2 innerhalb der einzelnen Schichten (Gesamtmittel ist 200)

$$s^2 = \sum_i s_i^2 h_i + \sum_i \left(\bar{x}_i - \bar{x}\right)^2 h_i = 144 \cdot \frac{1}{3} + 900 \cdot \frac{2}{3} + (300-200)^2 \cdot \frac{1}{3} + (150-200)^2 \cdot \frac{2}{3} = 5648$$

Es ist die χ^2-Verteilung bei n - 1=89 Freiheitsgraden zu betrachten. Für 90 Freiheitsgrade erhält man $c_1 = \chi^2_{0,025} = 65{,}65$ und $c_2 = \chi^2_{0,975} = 118{,}14$.

Die Intervallgrenzen sind dann

$$\frac{89 \cdot 5648}{65{,}65} = 7656{,}85 \text{ und } \frac{89 \cdot 5648}{118{,}14} = 4254{,}88 .$$

Dem entsprechenden Standardabweichungen von etwa 65 bis 87 Jahren, während sie innerhalb der beiden Gruppen nur 12 bzw. 30 betragen. Die interne Varianz ist also klein im Verhältnis zur externen Varianz (zwischen den Gruppen).

b) Die Prüfgröße $\frac{n_2 s_2^2 / (n_2 - 1)}{n_1 s_1^2 / (n_1 - 1)} = F$ ist F-verteilt mit n_2 - 1 und n_1 - 1 Freiheitsgraden $\left(s_2^2 > s_1^2\right)$.

Man erhält: $F = \frac{915{,}25}{148{,}97} = 6{,}14$

Der F-Wert der Tabelle ist jedoch 1,96. Folglich wird die Hypothese (H_0) der Homogenität der Varianzen $\left(\sigma_1^2 = \sigma_2^2\right)$ verworfen.

c) Test des Unterschieds von Korrelation bei zwei unabhängigen Stichproben. Die standardnormalverteilte Prüfgröße ist

$$z = \frac{r_1^* - r_2^*}{\sigma_{r*}} \text{ wobei } r^* = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} \text{ (Fisher'sche Transformation)}$$

und $\sigma_{r*}^2 = \frac{1}{n_1 - 3} + \frac{1}{n_2 - 3}$. Mit den Zahlen der Aufgabe erhält man

$$z = \frac{1{,}472 - 0{,}867}{0{,}234} = 2{,}5855$$

während die Signifikanzschranke $z_\alpha = 1{,}96$ ist. Die Korrelationen unterscheiden sich also signifikant.

d) Ein- Stichprobentest der Nullhypothese $H_0 : \rho = 0$. Da $n_2 > 50$ kann die standardnormalverteilte Prüfgröße

$$z = r_2 \sqrt{n_2 - 1} = 5{,}377 > z_\alpha$$

betrachtet werden. Somit ist die Hypothese zu verwerfen.

Aufgabe 27

a) $$f_1(x) = \int_0^{10} \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{200} y \right) e^{-\frac{1}{4}x} \, dy = e^{-\frac{1}{4}x} \left[\frac{1}{20} y - \frac{1}{400} y^2 \right]_0^{10} = \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{4}x} \text{ Exponentialverteilung}$$

$$f_2(y) = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{200} y \right) e^{-\frac{1}{4}x} \, dx = \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{200} y \right) \left[-4e^{-\frac{1}{4}x} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{5} - \frac{1}{50} y \text{ Dreiecksverteilung}$$

b) $$E(X) = \int_0^{\infty} x \left(\frac{1}{4} e^{-\frac{1}{4}x} \right) dx = 4 \text{ Jahre}$$

$$E(Y) = \int_0^{10} \left(\frac{1}{5}y - \frac{1}{50}y^2\right) dy = 3{,}33\%$$

c) $f_y(y|x) = \dfrac{f(x,y)}{f_1(x)} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{50}y$,

d.h. die bedingte Verteilung der Ausfallrate ist gleich der unbedingten, die Zufallsvariablen X und Y sind demnach stochastisch unabhängig.

$$E(Y|x) = \int_0^{10} y f_y(y|x)\, dy = \int_0^{10} \left(\frac{1}{5}y - \frac{1}{50}y^2\right) dy = E(Y) = 0{,}033 = 3{,}33\%$$

d) 1. Vgl. Teil c) der Aufgabe. Außerdem ist leicht zu zeigen, daß gilt $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(x)$

2. $\displaystyle\int_0^{\infty}\int_0^{10} \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{200}y\right) \text{ - } e^{-\frac{1}{4}x}\, dy \cdot dy = \int_0^{\infty} \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{4}x}\, dx = 1$.

e) Gesucht ist eine Transformation der Dichte f(x,y) in die Dichte g(u,v), mit den neuen (transformierten) Zufallsvariablen

$$u = \frac{1}{2}x + ty \quad \text{und } v = x$$

Aus diesem Gleichungssystem folgt

$$x = v$$

$$y = \frac{1}{7}u - \frac{1}{14}v\,.$$

Die Jacobinische Funktionsdeterminante ist $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{7} & -\frac{1}{14} \end{vmatrix} = -\frac{1}{7}$

und die transformierte Dichte lautet

$$g(u,v) = \left[\frac{1}{20} - \frac{1}{200}\left(\frac{1}{7}u - \frac{1}{4}v\right)\right] e^{-\frac{1}{4}v} \left(-\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{140}\left(\frac{u}{70} - \frac{v}{140} - 1\right) e^{-\frac{1}{4}v}$$

Aufgabe 28

a) 1) P (A) = 0,2 ; P (S) = 0,3

$P(AS) = P(S) - P(\overline{A} \cap S) = P(S) - P(S \mid \overline{A}) \cdot P(\overline{A}) = 0{,}3 - 0{,}125 \cdot 0{,}8 = 0{,}2$

2) $P(S \mid A) = \dfrac{P(A \cap S)}{P(A)} = \dfrac{0{,}2}{0{,}2} = 1$

abhängig, da $P(S \mid A) \neq P(S \mid \overline{A})$

b) 1) n = 3 ; i = 5

$$K_w = \binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = 21$$

2) $\frac{n}{n-i} \cdot \frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!} = \frac{n!}{i!(n-i)!} = \binom{n}{i}$

c) $X \sim B(10;0{,}1)$

$P(x=0) = \binom{10}{0} \cdot 0{,}1^{0} \cdot 0{,}9^{10} = 0{,}3487$

d) $n \cdot \pi = 500 \cdot 0{,}01 = 5$

$X \sim P(5)$

$P(x < 10) = P(x \leq 9) = 0{,}9682$

e) $n \geq \frac{z^2\sigma^2}{e^2} = \frac{1{,}96^2 \cdot 50^2}{15^2} = 42{,}68 \quad \Rightarrow \quad$ mind. 43 Netze

f) $Y = X + X + X \sim N(3000,\ 7500)$

$P(y < 2974)$

$$Z = \frac{2974 - 3000}{\sqrt{7500}} = -0{,}3$$

$= P(Z < -0{,}3) = 1 - P(Z < 0{,}3) = 1 - 0{,}6179 = 0{,}3821$

Falsch wäre: $y = 3X \sim N(3000;\ 22500)$; 3X ist eine andere ZV als $X + X + X$

Aufgabe 29

a) Normalgleichungen

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 200 & 5500 \\ 5500 & 195000 \end{bmatrix}}_{(X'X)} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4000 \\ 140000 \end{bmatrix} \quad \text{also} \quad \begin{array}{l} a = 1{,}142857 \\ b = 0{,}685714 \end{array}$$

b) Ein erwartungstreuer Schätzer für die gesuchte Varianz σ^2 ist $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum \hat{u}^2}{n-2}$.

Man erhält $\sum \hat{u}^2$ aus $r^2 = 1 - \frac{\sum \hat{u}^2}{\sum (y-y)^2}$ und $r = 0{,}8213$ also ist $\sum \hat{u}^2 = 9926{,}7$ und $\hat{\sigma}^2 = 50{,}13$.

Mit den Prozentpunkten a (für 0,975) und b (für 0,025) der χ^2-Verteilung bei n - 2 = 198 Freiheitsgraden erhält man das Konfidenzintervall

$$P\left(\frac{\sum \hat{u}^2}{a} \leq \sigma^2 \leq \frac{\sum \hat{u}^2}{b}\right) = 0{,}95.$$

Die Grenzen a und b werden in den meisten Lehrbüchern nur bis zu r = 100 Freiheitsgraden mitgeteilt. Für r > 100 erhält man mit der Umrechnungsformel

(*) $\frac{1}{2}\left(\sqrt{2r-1} \pm z_\alpha\right)^2$ bei $z_\alpha = 1{,}96$

die Grenzen a = 238,38 und b = 160,47. Das führt zum Konfidenzintervall $41{,}6 \le \sigma^2 \le 61{,}9$. Die Grenzen a und b erhält man auch indem man davon ausgeht, daß die χ^2-verteilte Variable $z = \frac{\sum \hat{u}^2}{\sigma^2}$ asymptopisch $N(198{,}2 \cdot 198)$ verteilt ist, einer Überlegung, auf der die Formel (*) beruht.

Dann führt $\pm 1{,}96 = \frac{z-198}{\sqrt{396}}$ zu z_1 = b = 159 und z_2 = a = 237 und damit zum Konfidenzintervall $41{,}9 \le \sigma^2 \le 62{,}4$.

c) Zu diesem Zweck ist zu bilden

$$\hat{\sigma}^2 (X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}145942 & -0{,}315134 \\ -0{,}315134 & 0{,}011459 \end{bmatrix}$$

Man erhält dann bei t = 1,97 (t-Verteilung mit ca. 200 Freiheitsgraden) folgende Konfidenzintervalle

für α: $a \pm t\sqrt{1{,}145942} \rightarrow -0{,}9660 \le \alpha \le 3{,}2517$

für β: $b \pm t\sqrt{0{,}011459} \rightarrow 0{,}4748 \le \beta \le 0{,}8966$

Man beachte, daß insbesondere b gegen $\beta = 0$ gesichert ist. Folglich wird auch r signifikant von Null verschieden sein.

Da der Stichprobenumfang hinreichend groß ist, kann man davon ausgehen, daß die Prüfgröße $z = r\sqrt{n-1} = 0{,}8213\sqrt{199} = 11{,}586$ standardnormalverteilt ist. Das Ergebnis besagt, daß r hochsignifikant ist ($z_\alpha = 1{,}96$). F-Test:

$$\frac{r^2}{\left(1-r^2\right)/(n-2)} \sim F_{1,n\text{-}2} = 410{,}358 \quad (\text{Tabellenwert } F_{1,\infty} = 5{,}02 \text{ bei } \frac{1}{2}\alpha = 2{,}5\%)$$

d) In diesem Fall ist die Fisher'sche Transformation durchzuführen:

$$r^* = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r} = \frac{1}{2}\ln\frac{1{,}8213}{0{,}1787} = 1{,}1608.$$

Entsprechend erhält man für $\rho^2 = 0{,}6$ den Wert $\rho = 0{,}7746$ und $\rho^* = 1{,}0317$.

Dann ist die standardnormalverteilte Prüfgröße

$$\left(r^* - \rho^*\right)\sqrt{n-3} = 1{,}8117 > 1{,}6449.$$