Teil IV Musterklausuren (Univ. Essen) mit Lösungen

Hauptklausur WS 95/96

Aufgabe 1:

a) Revolverheld R sitzt im Saloon und pokert. Die Wahrscheinlichkeit, daß er dabei einen seiner Mitspieler beim Falschspiel erwischt (Ereignis F), beziffert er auf 0,1. Die Wahrscheinlichkeit, daß es daraufhin zu einem Duell kommt (Ereignis D), beträgt 0,8. Da es außer Falschspiel noch weitere Gründe für ein Duell geben kann, gilt allgemein P(D) = 0,5.

   i) Nach welchem Wahrscheinlichkeitsbegriff wurde P(F) bestimmt? (1 Punkt)

   ii) Zeigen Sie, daß die Ereignisse D und F nicht unabhängig sind. (2 Punkte)

   iii) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß genau eines der Ereignisse (D oder F) eintritt? (2 Punkte)

   iv) Zeichnen Sie ein Venn-Diagramm für das Ereignis $\overline{D} \cap \overline{F}$. (1 Punkt)

b) Zur Auswahl stehen zwei verschiedene Kartenspiele. Wird mit Kartenspiel A gepokert, dessen Karten von R gezinkt wurden, beträgt seine Gewinnchance (Gewinn = Ereignis G) 0,7. Bei Spiel B, dessen Karten nicht gezinkt sind, beträgt die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen für R nur 0,2. Das Spiel wird vor Beginn der Pokerpartie mit Hilfe einer (fairen) Münze ausgelost.

   i) Wie groß ist die Chance für R zu gewinnen, wenn er noch nicht weiß, mit welchem Kartenspiel gespielt wird? (3 Punkte)

   ii) Angenommen R hat gewonnen. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, daß mit Kartenspiel B gespielt wurde? (3 Punkte)

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß R alle vier Asse auf der Hand hält, wenn mit einem Spiel aus 32 Karten gespielt wird und jeder fünf Karten bekommt?

   (Hinweis für alle Pokerfans: Es wurden noch keine Karten getauscht!!!) (3 Punkte)

d) Zu Beginn des Spiels wurde auf ein faires Spiel angestoßen. Aus wie viel Personen besteht die Pokerrunde, wenn jeder mit jedem einmal angestoßen hat und die Gläser so 15 mal geklirrt haben? (4 Punkte)

Aufgabe 2:

a) Gegeben sei die folgende Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariable X:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{für} \quad -1 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   i) Welche Eigenschaften muss eine Funktion erfüllen, wenn sie eine Dichtefunktion sein soll (nicht nachweisen, nur aufzählen!)? (1 Punkt)

   ii) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X. (4 Punkte)

   iii) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß X im Intervall [0;3] liegt? (2 Punkte)

iv) Wie lautet die Verteilungsfunktion von X? (2 Punkte)

b) Ein mit kontaktfreudigen Kindern gesegneter Vater betrachtet mit Sorge die Entwicklung der Telefonrechnungen. Der Vater behauptet, daß die erwartete monatliche Telefonrechnung höher als 80 DM ist.

Um seine Vermutung zu überprüfen zieht er eine Stichprobe von 8 Telefonrechnungen der letzten Jahre. Die Telefonrechnungen lauten:

50	70	80	100
90	120	75	115

Die Varianz der Grundgesamtheit schätzt er mittels:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right).$$

i) Überprüfen Sie die Hypothese des Vaters durch einen Test zum Niveau $\alpha = 0.05$. Zu welcher Entscheidung kommen Sie? (5 Punkte)

ii) Wie hoch ist der „kritische Mittelwert" der Stichprobe, d.h. bis zu welcher Höhe von $\overline{X}$ kann er die Nullhypothese nicht ablehnen? (3 Punkte)

iii) Berechnen Sie den Fehler 2. Art unter der Alternativhypothese $H_1: \mu = 100$.

Erläutern Sie, was es hier bedeutet, einen Fehler 2. Art zu begehen.

(5 Punkte)

Aufgabe 3:

a) Gegeben sei folgende zweidimensionale Funktion:

$$f(x,y) = \begin{cases} c(x + y + xy) & 0 < x < 1\ ;\ 0 < y < 1. \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

i) Zeigen Sie, daß die Konstante c den Wert 0.8 annehmen muss, damit f(x,y) eine Dichtefunktion ist. (3 Punkte)

ii) Berechnen Sie die Randverteilungen für X und Y. (2 Punkte)

iii) Bestimmen Sie die Kovarianz zwischen X und Y. (5 Punkte)

b) Die Zufallsvariable X sei normalverteilt mit $\mu = 2$ und $\sigma^2 = 25$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß X sich im Intervall [3; 8] realisiert?

(3 Punkte)

c) Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängig identisch verteilt mit $E(X_i) = \mu$ und $V(X_i) = \sigma^2$. Sind die folgenden Schätzfunktionen für μ erwartungstreu und konsistent?

(6 Punkte)

i) $\hat{\mu}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{500}{n}$

ii) $\hat{\mu}_2 = \frac{n-2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} X_i$

Nachklausur WS 96/97

Aufgabe 1

a) Die Tennisprofis B und S haben sich vertraglich verpflichtet für ihr Land im Davis-Cup zu spielen. Leider muss der geplagte Präsident des Tennisverbandes feststellen, daß die beiden es mit ihrer Verpflichtung nicht so genau nehmen, so daß er die Wahrscheinlichkeit, daß B tatsächlich spielt (Ereignis B) mit 0,6 und die Wahrscheinlichkeit, daß S spielt, mit 0,7 beziffert. Da sich die beiden nicht besonders gut verstehen, ist die Wahrscheinlichkeit, daß beide spielen nur 0,5.

   i) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß S spielt, wenn klar ist, daß B nicht antritt? (3 Punkte)

   ii) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß genau einer der beiden (aber nicht beide zusammen) spielen? (2 Punkte)

b) Der Präsident des Tennisverbandes glaubt, daß die Wahrscheinlichkeit für einen Sieg seiner Mannschaft (Ereignis V) bei 0,7 liegt, wenn S mitspielt, aber nur bei 0,4, wenn S nicht mitspielt.

   i) Zeigen Sie, daß die Ereignisse V und S abhängig sind. (1 Punkt)

   ii) Wie groß ist P(V)? (2 Punkte)

c) B frühstückt am liebsten Brötchen mit einer bestimmten Nuß-Nougat-Creme. Leider ißt er an 30% aller Tage zuviel davon, so daß er nachher nicht mehr ordentlich Tennis spielen kann. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er an einem Davis-Cup-Wochenende (3 Tage) höchstens einmal zuviel frühstückt? (2 Punkte)

d) Die bei einem Frühstück zu sich genommene Kalorienmenge beschreibt B als normalverteilt mit $\mu = 500$ und $\sigma^2 = 625$.

   i) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß B an einem Morgen zwischen 450 und 550 Kalorien zu sich nimmt? (2 Punkte)

   ii) Angenommen B könnte keine Angaben über die Verteilung der Kalorienmenge machen, sondern wüsste nur, daß $\mu = 500$ und $\sigma^2 = 625$ ist. Was könnte er dann über die Wahrscheinlichkeit aussagen, zwischen 450 und 550 Kalorien zu sich zu nehmen? (3 Punkte)

e) B verfügt eine Kollektion von 10 Tennisschlägern. Davon wurden ihm 8 Schläger von seinem Sponsor geschenkt. Die anderen beiden hat er von seiner Frau zum Geburtstag bekommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß unter den 5 Schlägern, die er mit zum Tennisplatz nimmt (und die er zufällig ausgewählt hat), die beiden Schläger von seiner Frau sind? (3 Punkte)

f) Angenommen die Geschwindigkeit des Aufschlags des S sei normalverteilt mit $\mu = 200 \text{ km / h}$ und $\sigma^2 = 100$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß S bei 10 Aufschlägen, die er macht, eine durchschnittliche Geschwindigkeit von über 205,06 km/h erreicht? (3 Punkte)

Aufgabe 2:

a) Student S erscheint die Behauptung seiner Freundin völlig unglaubwürdig, er würde im Monat durchschnittlich mehr als 80 DM für Kinogänge ausgeben.

Um diese Vermutung zu überprüfen zieht er eine Stichprobe von 8 Monaten Die Ausgaben waren:

50.00	60.00	80.00	100.00
100.00	120.00	90.00	120.00

Die Varianz der Grundgesamtheit schätzt er mittels:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right).$$

i) Überprüfen Sie die Hypothese der Freundin durch einen Test zum Niveau $\alpha = 0{,}05$. Zu welcher Entscheidung kommen Sie? (5 Punkte)

ii) Wie hoch ist der „kritische Mittelwert" der Stichprobe, d.h. bis zu welcher Höhe von $\overline{X}$ kann die Nullhypothese nicht abgelehnt werden? (3 Punkte)

iii) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art unter der Alternativhypothese $H_1 : \mu = 90$.

Erläutern Sie, was es hier bedeutet, einen Fehler 2. Art zu begehen. (5 Punkte)

b) Gegeben sei die folgende zweidimensionale Dichtefunktion:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0{,}8(x + y + xy) & 0 < x < 1\ ;\ 0 < y < 1. \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

i) Bestimmen Sie die Randverteilungen von X und Y. (2 Punkte)

ii) Bestimmen Sie die Kovarianz zwischen X und Y.

Welche Aussage können Sie über die Abhängigkeit/Unabhängigkeit von X und Y machen? (5 Punkte)

Aufgabe 3:

a) Eine Gesellschaft von 6 Personen muss für eine Flussüberfahrt auf zwei Boote aufgeteilt werden, die je drei Personen fassen. Auf wie viel Arten kann die Gesellschaft auf die zwei Boote aufgeteilt werden, wenn das Ehepaar Meier die Überfahrt nur auf beide Boote verteilt antreten will?

Hinweis: Wichtig ist nur in welchem Boot eine Person sitzt, also nicht auf welchem Platz im Boot diese Person sitzt. (4 Punkte)

b) Bei einer Wahlumfrage soll der Anteil $\hat{\pi}$ der Wähler der Partei A ermittelt werden.

i) Dabei soll der Schätzwert vom wahren Wert π um höchstens absolut 0,02 abweichen. Wie groß muß der Umfang einer Stichprobe von Wählern mindestens sein, wenn man eine Sicherheitswahrscheinlichkeit von 0,95 fordert? (3 Punkte)

ii) Die Wahlumfrage ergibt für eine Stichprobe von n=101 Wählern einen Anteil p=0.4 für die Partei A. Bestimmen Sie ein 95%-iges Konfidenzintervall für den Anteil π in der Grundgesamtheit. (4 Punkte)

c) Die mittleren Ausgaben μ der Bundesbürger für Urlaubszwecke sollen durch eine Stichprobe (Ziehen mit Zurücklegen) vom Umfang 3000 ermittelt werden. Die Bevölkerung wird in zwei Schichten zerlegt, wobei die erste Schicht die besser verdienenden Personen enthalte. Die zweite Schicht sei doppelt so groß wie die erste Schicht.

Die Schichten seien bezüglich der Ausgaben für Urlaubszwecke homogen, d.h. es gilt

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \frac{1}{10}\sigma^2 .$$

Dabei ist σ_1^2 die Varianz in der ersten Schicht, σ_2^2 die Varianz in der zweiten Schicht und σ^2 die Varianz der Grundgesamtheit.

Hinweis: Beachten Sie, daß N_1 und N_2 unbekannt sind!

i) Wie groß sind die Stichprobenumfänge in den einzelnen Schichten bei optimaler Aufteilung der Schichten? (4 Punkte)

ii) Vergleichen Sie die Varianzen des Schätzers $\overline{x}$ bei einfacher Zufallsauswahl und bei der optimalen Schichtung. (4 Punkte)

Hauptklausur WS 97/98

Aufgabe 1:

Herr Dittmeyer verkauft in einer Fußgängerzone Apfelsinen und Orangensaft, der fast so schmeckt wie frisch gepresst. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Passant Apfelsinen kauft (Ereignis A) beträgt 0,2. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Passant Saft kauft (Ereignis S), beträgt 0,3. Die Wahrscheinlichkeit, daß genau eines der beiden Produkte gekauft wird (aber eben nicht beide zusammen!) beträgt 0,3.

a) Stellen Sie das folgende Ereignis in einem Venn-Diagramm graphisch dar:

$(A \cap S) \cup (\overline{A} \setminus S)$ (2 Punkte)

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß

i) ein Passant beide Produkte kauft? (2 Punkte)

ii) ein Passant Apfelsinen kauft, wenn er sich bereits gegen den Kauf von Saft entschieden hat? (2 Punkte)

iii) sich von 8 Passanten 3 zum Kauf von Apfelsinen entscheiden? (2 Punkte)

c) Zur Förderung seines Verkaufs veranstaltet Herr D. ein kleines Glücksspiel. In einen zugedeckten Behälter legt er weiße und schwarze Kugeln. Ein Passant darf solange ziehen (mit Zurücklegen), bis er das erste Mal eine schwarze Kugel erwischt. Für jede vorher gezogene weiße Kugel gewinnt er eine Apfelsine. Es ist klar, daß die Zufallsvariable X = Misserfolge (= weiße Kugeln) vor dem ersten Erfolg (= schwarze Kugel) einer geometrischen Verteilung gehorcht.

i) Geben Sie eine Maximum-Likelihood-Schätzung für die Erfolgswahrscheinlichkeit π auf der Grundlage der folgenden Stichprobe an:

Passant	A	B	C	D
weiße Kugeln	2	0	1	3

(4 Punkte)

ii) Berechnen Sie für diese Verteilung den Erwartungswert und die Varianz.

(4 Punkte)

iii) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, frühestens beim zweiten und spätestens beim vierten Zug erstmals eine schwarze Kugel zu erwischen? (2 Punkte)

Aufgabe 2:

a) In einer Flasche Orangensaft ist im Schnitt 1 Liter Saft. Die Varianz betrage 0,0025. Wie groß ist die Mindestwahrscheinlichkeit, beim Kauf einer Flasche zwischen 0,9 und 1,1 Litern Saft zu bekommen? (3 Punkte)

b) Angenommen, die Abfüllmenge sei normalverteilt mit $\mu = 1$ und $\sigma^2 = 0{,}0025$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim Kauf eines Kastens Saft (= 6 Flaschen) mindestens 6,122 Liter zu bekommen?

c) Kunde K errechnet ein Konfidenzintervall für den durchschnittlichen Inhalt der Flaschen. Eine Stichprobe von 16 Flaschen ergab $\bar{x} = 1{,}01$. Welche Standardabweichung $\hat{\sigma}$ hat K aus der Stichprobe gewonnen, wenn das Konfidenzintervall wie folgt aussah

$$P(0{,}9727 \leq \mu \leq 1{,}0473) = 0{,}95\,?$$ (4 Punkte)

d) Die Verbraucherzentrale V glaubt, daß die Flaschen im Schnitt weniger als 1 Liter Saft enthalten und möchte dies mit Hilfe eines statistischen Tests nachweisen. Eine Stichprobe vom Umfang $n = 36$ ergab eine Varianz für die Füllmenge von 0,0049.

i) Stellen Sie die Hypothesen (Null- und Alternativhypothese) auf. (1 Punkt)

ii) Wo liegt der „kritische Mittelwert“, d.h. bis zu welchem $\bar{x}$ kann V die Nullhypothese nicht ablehnen, wenn mit $\alpha = 0{,}05$ getestet werden soll? (3 Punkte)

e) Der Statistiker S betrachtet eine Stichprobe von n Flaschen. Die Zufallsvariable X_i sei der Inhalt der i-ten Flasche mit $i = 1,2,\ldots,n$. Alle X_i seien identisch unabhängig verteilt mit $E(X_i) = \mu$ und $V(X_i) = \sigma^2$. Für den durchschnittlichen Flascheninhalt μ schlägt S die folgenden Schätzfunktionen vor:

i) $\hat{\mu}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ ii) $\hat{\mu}_2 = X_1$

Sind $\hat{\mu}_1$ und $\hat{\mu}_2$ erwartungstreu und konsistent? Welchen der beiden Schätzer würden Sie vorziehen? (5 Punkte)

Aufgabe 3:

a) Gegeben sei die folgende Funktion:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{10}{18}-\frac{7}{6}x^2+x^2y(1-y)-\frac{4}{3}y(1-y) & \text{für } 0\le x,y\le 1\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

Könnte es sich dabei um eine zweidimensionale Dichtefunktion handeln? (3 Punkte)

b) Diplom-Kaufmann K aus E betritt mit 4 anderen Patienten zeitgleich eine Zahnarztpraxis. Die Arzthelferin hält es in diesem Fall für fair die Reihenfolge, in der die fünf Personen behandelt werden, auszulosen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß K nicht als Erster in das Behandlungszimmer gerufen wird? (4 Punkte)

c) X_i seien Zufallsvariablen, für die gilt:

$$E(X_1)=5,\ E(X_2)=10,\ E(X_3)=8,$$

$$V(X_1)=3,\ V(X_2)=4,\ V(X_3)=6,\ C(X_i,X_j)=1 \text{ für alle } i\neq j$$

Die Zufallsvariable Z sei als folgende Linearkombination gebildet:

$$Z=X_1+X_2-X_3.$$

Berechnen Sie $E(Z)$ und $V(Z)$. (4 Punkte)

d) Die Kunden einer Krankenkasse bestehen zu 20% aus Kindern (Schicht 1), zu 50% aus Menschen im arbeitsfähigen Alter (Schicht 2) und zu 30% aus Rentnern (Schicht 3). Aus einer Stichprobe im Umfang n = 400 sollen die mittleren jährlichen Ausgaben für Medikamente μ geschätzt werden. Es gelte: $\sigma_1^2=25$, $\sigma_2^2=100$ und $\sigma_3^2=81$.

Berechnen Sie den Stichprobenumfang bei proportionaler und optimaler Aufteilung sowie jeweils die Varianz der Schätzfunktion $\hat{\mu}=\bar{x}$. (8 Punkte)

e) Wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in einem Flugzeug x = 2 Terroristen mit zwei Bomben sitzen, nur ein Zehntel der Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß x = 1 Terrorist mit einer Bombe im Flugzeug ist, dann ist X poissonverteilt mit $\lambda=\ldots$?

(3 Punkte)

Lösungen

Hauptklausur WS 95/96

Aufgabe 1:

a) $P(F) = 0{,}1$, $P(D|F) = 0{,}8$; $P(D) = 0{,}5$

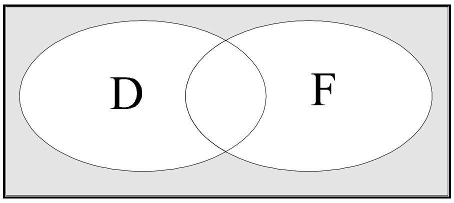
i) Subjektiver Wahrscheinlichkeitsbegriff

ii) $P(D) \neq P(D|F)$

iii) $P(D \cup F) - P(D \cap F) = P(D) + P(F) - 2P(D \cap F)$

$= P(D) + P(F) - 2P(D|F)P(F) = 0{,}5 + 0{,}1 - 2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1 = 0{,}44$

iv)



b) $P(G|A) = 0{,}7$; $P(G|B) = 0{,}2$

i) $P(G) = P(G|A)P(A) + P(G|B)P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}5 + 0{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}45$

ii) $P(B|G) = \dfrac{P(G|B)P(B)}{P(G)} = \dfrac{0{,}2 \cdot 0{,}5}{0{,}45} = 0{,}\overline{2}$

c) $X \sim H(5;4;32)$

$$P(x = 4) = \frac{\binom{4}{4}\binom{32-4}{5-4}}{\binom{32}{5}} = \frac{1 \cdot 28}{201.376} = 0{,}00014$$

d) $K = \binom{n}{2} = \dfrac{n!}{2!(n-2)!} = 15$

$n(n-1) = n^2 - n = 30$

$\left(n - \dfrac{1}{2}\right)^2 = 30 + 0{,}25$

$n - \dfrac{1}{2} = 5{,}5 \Rightarrow n = 6$

Aufgabe 2:

a)

i) $0 \leq f(x) < \infty$ und $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

ii) $E(x) = \int_{-1}^{5} \dfrac{1}{6} x dx = \dfrac{1}{12} x^2 \Big|_{-1}^{5} = \dfrac{25}{12} - \dfrac{1}{12} = 2$

$V(x) = \int_{-1}^{5} \dfrac{1}{6} x^2 dx - 2^2 = \dfrac{1}{18} x^3 \Big|_{-1}^{5} - 4 = \dfrac{125}{18} + \dfrac{1}{18} - 4 = 3$

iii) $\int_0^3 \frac{1}{6} dx = \frac{1}{6} x \Big|_0^3 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

iv) $F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{1}{6} du = \frac{1}{6} \Big|_{-1}^{x} = \frac{1}{6} x + \frac{1}{6}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{1}{6} x + \frac{1}{6} & -1 \le x \le 5 \\ 1 & x > 5 \end{cases}$$

b) $\overline{x} = 87{,}5$; $\hat{\sigma}^2 = \frac{3900}{7}$

i) $H_0 : \mu = 80$ vs. $H_1 : \mu > 80$

Fall 3:

$$T = \frac{\overline{x} - \mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} = \frac{87{,}5 - 80}{\sqrt{3900/7}/\sqrt{8}} = 0{,}8987$$

$z_\alpha = 1{,}89$

Die Hypothese kann nicht abgelehnt werden.

ii) $\frac{\overline{x} - 80}{\sqrt{3900/56}} = 1{,}89\sqrt{\frac{3900}{56}} + 80 = 95{,}77$

iii) $P(\overline{x} < 95{,}77 | H_1) = P\left(z < \frac{95{,}77 - 100}{\sqrt{3900/56}} | H_1 \right)$

$= P(z < -0{,}5 | H_1) = 1 - P(z < 0{,}5 | H_1) = 1 - 0{,}6915 = 0{,}3085$

Einen Fehler 2. Art zu begehen bedeutet hier, die H_0-Hypothese als richtig anzunehmen obwohl sie falsch ist, d.h. anzunehmen, die durchschnittliche Telefonrechnung läge unter 80 DM, obwohl sie in Wahrheit über 80 DM liegt.

Aufgabe 3:

a)

i) $\int_0^1 \int_0^1 cx + cy + cxydxdy = \int_0^1 \left[\frac{c}{2} x^2 + cxy + \frac{c}{2} x^2 y \right]_0^1 dy = \int_0^1 \frac{c}{2} + cy + \frac{c}{2} ydy$

$= \left[\frac{c}{2} y + \frac{c}{2} y^2 + \frac{c}{4} y^2 \right]_0^1 = \frac{c}{2} + \frac{c}{2} + \frac{c}{4} = 1{,}25c = 1$

$\Leftrightarrow c = 0{,}8$

ii) $f(x) = \int_0^1 0{,}8x + 0{,}8y + 0{,}8xydy = \left[0{,}8xy + 0{,}4y^2 + 0{,}4xy^2 \right]_0^1$

$= 0{,}8x + 0{,}4 + 0{,}4x = 0{,}4 + 1{,}2x$

$f(y) = 0{,}4 + 1{,}2y$

iii) $C(xy) = \int_0^1 \int_0^1 0{,}8x^2 y + 0{,}8xy^2 + 0{,}8x^2 y^2 dxdy - \mu_x \mu_y$

$$E(x) = \int_0^1 0{,}4x + 1{,}2x^2 dx = 0{,}2x^2 + 0{,}4x^3 \Big|_0^1 = 0{,}2 + 0{,}4 = 0{,}6 = E(y)$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{0{,}8}{3} x^3 y + 0{,}4 x^2 y^2 + \frac{0{,}8}{3} x^3 y^2 dy \right]_0^1 - 0{,}6 \cdot 0{,}6$$

$$= \int_0^1 \frac{0{,}8}{3} y + 0{,}4 y^2 + \frac{0{,}8}{3} y^2 dy - 0{,}36$$

$$\left[\frac{0{,}8}{6} y^2 + \frac{0{,}4}{3} y^3 + \frac{0{,}8}{9} y^3 \right]_0^1 - 0{,}36 = \frac{0{,}8}{6} + \frac{0{,}4}{3} + \frac{0{,}8}{9} - 0{,}36 = -0{,}00\overline{4}$$

b) $X \sim N(2;25)$

$P(3 \le x \le 8)$

$$z_1 = \frac{3-2}{5} = 0{,}2$$

$$z_2 = \frac{8-2}{5} = 1{,}2$$

$$= P(0{,}2 \le z \le 1{,}2) = P(z \le 1{,}2) - P(z \le 0{,}2) = 0{,}8849 - 0{,}5793 = 0{,}3056$$

c)

i) $E(\hat{\mu}_1) = E\left(\frac{1}{n} \sum X_i + \frac{500}{n} \right) = \frac{1}{n} \sum E(X_i) + \frac{500}{n} = \frac{1}{n} n\mu + \frac{500}{n} = \mu + \frac{500}{n}$

$\Rightarrow \hat{\mu}_1$ ist nicht erwartungstreu, aber

$\lim_{n\to\infty} E(\hat{\mu}_1) = \mu \Rightarrow \hat{\mu}_1$ ist asymptotisch erwartungstreu

$V(\hat{\mu}_1) = V\left(\frac{1}{n} \sum X_i + \frac{500}{n} \right) = \frac{1}{n^2} \sum V(X_i) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

$\lim_{n\to\infty} V(\hat{\mu}_1) = 0 \Rightarrow \hat{\mu}_1$ ist konsistent.

ii) $E(\hat{\mu}_2) = E\left(\frac{n-2}{n^2} \sum X_i \right) = \frac{n-2}{n^2} \sum E(X_i) = \frac{n-2}{n^2} n\mu = \frac{n-2}{n} \mu$

$\Rightarrow \hat{\mu}_2$ ist nicht erwartungstreu, aber

$\lim_{n\to\infty} E(\hat{\mu}_2) = \mu \Rightarrow \hat{\mu}_2$ ist asymptotisch erwartungstreu

$V(\hat{\mu}_2) = V\left(\frac{n-2}{n^2} \sum X_i \right) = \frac{(n-2)^2}{n^4} \sum V(X_i) = \frac{(n-2)^2}{n^4} n\sigma^2 = \frac{(n-2)^2}{n^3} \sigma^2$

$\lim_{n\to\infty} V(\hat{\mu}_2) = 0 \Rightarrow \hat{\mu}_2$ ist konsistent.

Nachklausur WS 96/97

Aufgabe 1:

a) $P(B) = 0{,}6;\ P(S) = 0{,}7;\ P(B \cap S) = 0{,}5$

i) $P(S|\overline{B}) = \frac{P(S \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}$

$$P(S \cap \overline{B}) = P(S) - P(S \cap B) = 0{,}7 - 0{,}5 = 0{,}2$$

$$= \frac{0{,}2}{0{,}4} = 0{,}5$$

ii) $P(S \cup B) - P(S \cap B)$

$= P(S) + P(B) - 2P(S \cap B) = 0{,}7 + 0{,}6 - 2 \cdot 0{,}5 = 0{,}3$

b) $P(V|S) = 0{,}7;\ P\left(V|\overline{S}\right) = 0{,}4$

i) Wären V und S unabhängig, müsste gelten:

$$P(V|S) = P\left(V|\overline{S}\right)$$

Da dies nicht zutrifft, sind die Ereignisse abhängig.

ii) $P(V) = P(V|S)P(S) + P\left(V|\overline{S}\right)P\left(\overline{S}\right) = 0{,}7 \cdot 0{,}7 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}61$

c) X = B frühstückt zuviel; $X \sim B(3;\ 0{,}3)$

$P(X \le 1) = 0{,}7840$ lt. Tabelle

d) X = Kalorienmenge; $X \sim N(500;\ 625)$

i) $P(450 \le X \le 550)$

$$Z_1 = \frac{450-500}{25} = -2$$

$$Z_2 = \frac{550-500}{25} = 2$$

$= P(-2 \le Z \le 2) = 0{,}9545$ lt. Tabelle

ii) $P(450 \le X \le 550) = P(500 - 2 \cdot 25 \le X \le 500 + 2 \cdot 25) > 1 - 1/2^2 = 0{,}75$

e) X = Schläger von seiner Frau; $X \sim H(5;\ 2;\ 10)$

$$P(X=2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{10-2}{5-2}}{\binom{10}{5}} = \frac{1 \cdot 56}{252} = 0{,}\overline{2}$$

f) X = Aufschlaggeschwindigkeit; $X \sim N(200;\ 100) \Rightarrow \overline{X} \sim N\left(200;\ \frac{\sigma^2}{n} = 10\right)$

$P\left(\overline{X} > 205{,}06\right) = 1 - P\left(\overline{X} \le 205{,}06\right)$

$$Z = \frac{205{,}06 - 200}{\sqrt{10}} = 1{,}6$$

$= 1 - P(Z \le 1{,}6) = 1 - 0{,}9452 = 0{,}0548$

<u>Aufgabe 2:</u>

a) $\overline{X} = 90;\ \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{8}\left(50^2 + 60^2 + 80^2 + 2 \cdot 100^2 + 2 \cdot 120^2 + 90^2 - 8 \cdot 90^2\right) = 575$

i) H_0: $\mu = 80$ vs. H_1: $\mu > 80$

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} = \frac{90 - 80}{\sqrt{575/8}} = 1{,}1795$$

$z_\alpha = 1{,}89$

$\Rightarrow$ Wegen $T < z_\alpha$ kann H_0 nicht abgelehnt werden.

ii) $$T = \frac{\overline{X} - 80}{\sqrt{575/8}} = 1{,}89$$

$$\overline{X} = 1{,}89 \cdot \sqrt{575/8} + 80 = 96{,}02$$

iii) $P(T < 1{,}89 | \mu = 90)$

$$= P(\overline{X} < 96{,}02 | \mu = 90) = P\left(Z < \frac{96{,}02 - 90}{\sqrt{575/8}} \; | \mu = 90\right) = P(Z < 0{,}7 | \mu = 90) = 0{,}7580$$

Einen Fehler 2. Art zu begehen bedeutet hier, die H_0-Hypothese als richtig anzunehmen obwohl sie falsch ist, d.h. anzunehmen, die durchschnittlichen Kinoausgaben lägen unter 80 DM, obwohl sie in Wahrheit über 80 DM liegen.

b) $f(x, y) = 0{,}8x + 0{,}8y + 0{,}8xy$

i) $$f(y) = \int_0^1 0{,}8x + 0{,}8y + 0{,}8xy dx$$

$$= \left[0{,}4x^2 + 0{,}8xy + 0{,}4x^2 y\right]_0^1$$

$$= 0{,}4 + 0{,}8y + 0{,}4y = 1{,}2y + 0{,}4$$

Entsprechend für X: $f(x) = 1{,}2x + 0{,}4$

ii) $C(x, y) = E(xy) - E(x)E(y)$

$$E(x) = \int_0^1 1{,}2x^2 + 0{,}4x dx = 0{,}4x^3 + 0{,}2x^2\Big|_0^1 = 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}6$$

$$E(y) = 0{,}6$$

$$E(xy) = \int_0^1 \int_0^1 0{,}8x^2 y + 0{,}8xy^2 + 0{,}8x^2 y^2 dxdy$$

$$= \int_0^1 \left[0{,}4x^2 y^2 + \frac{0{,}8}{3} xy^3 + \frac{0{,}8}{3} x^2 y^3\right]_0^1 dx$$

$$= \int_0^1 0{,}4x^2 + \frac{0{,}8}{3} x + \frac{0{,}8}{3} x^2 dx$$

$$= \left[\frac{0{,}4}{3} x^3 + \frac{0{,}8}{6} x^2 + \frac{0{,}8}{9} x^3\right]_0^1 = \frac{0{,}4}{3} + \frac{0{,}8}{6} + \frac{0{,}8}{9} = 0{,}3\overline{5}$$

$$C(x, y) = 0{,}3\overline{5} - 0{,}6 \cdot 0{,}6 = -0{,}004$$

X und Y sind nicht unabhängig, da $C(x,y) \neq 0$.

Aufgabe 3:

a) Es gibt zwei Möglichkeiten die Meiers aufzuteilen: Meier 1 in Boot 1 und Meier 2 in Boot 2 bzw. Meier 1 in Boot 2 und Meier 2 in Boot 1. Damit gibt es im ersten Boot noch zwei freie Plätze und es sind noch vier Personen übrig:

$\Rightarrow$ Kombination ohne Wiederholung: $K = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{24}{4} = 6$

Das zweite Boot ergibt sich von selbst. Damit gibt es insgesamt $2 \cdot 6 = 12$ Möglichkeiten.

b)

i) Da keine Angaben über π^* gemacht wurden: Annahme des ungünstigsten Falles, also $\pi^* = 0{,}5$

$$n^* \geq \frac{z^2 \pi^*(1-\pi^*)}{e^2} = \frac{1{,}96^2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}{0{,}02^2} = 2401$$

ii) $P\left(p - z\sqrt{\frac{pq}{n-1}} \leq \pi \leq p + z\sqrt{\frac{pq}{n-1}}\right) = 1-\alpha$

$$P\left(0{,}4 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{100}} \leq \pi \leq 0{,}4 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{100}}\right) = 0{,}95$$

$\Rightarrow KI = [0{,}304;\ 0{,}496]$

c)

i) $\frac{n_k}{n} = \frac{N_k \sigma_k}{\sum N_k \sigma_k}$

$$n_1 = n\frac{N_1\sigma_1}{N_1\sigma_1 + N_2\sigma_2} = 3000\frac{N_1\left(\sqrt{\frac{1}{10}\sigma^2}\right)}{N_1\left(\sqrt{\frac{1}{10}\sigma^2}\right) + 2 \cdot N_1\left(\sqrt{\frac{1}{10}\sigma^2}\right)} = 3000\frac{N_1\left(\sqrt{\frac{1}{10}\sigma^2}\right)}{3 \cdot N_1\left(\sqrt{\frac{1}{10}\sigma^2}\right)}$$

$$= 3000 \cdot \frac{1}{3} = 1000$$

$n_2 = 2000$

ii) Bei einfacher Zufallsauswahl: $V(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

Bei optimaler Schichtung:

$$V(\overline{X})_{opt} = \frac{1}{n}\left(\sum \frac{N_k}{N}\sigma_k\right)^2$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{N_1}{N}\sigma_1 + \frac{N_2}{N}\sigma_2\right)^2$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{N_1}{N}\sqrt{\frac{1}{10}}\sigma + \frac{N_2}{N}\sqrt{\frac{1}{10}}\sigma\right)^2$$

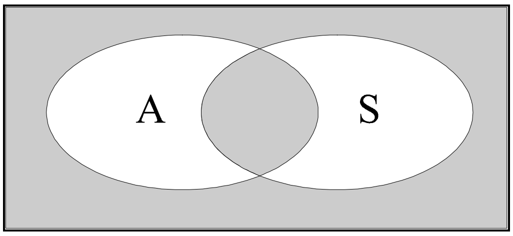
$$= \frac{1}{n}\left[\sqrt{\frac{1}{10}}\sigma\underbrace{\left(\frac{N_1 + N_2}{N}\right)}_{=1,\text{ da } N_1+N_2=N}\right]^2 = \frac{\sigma^2}{10 \cdot n}$$

$$V(\overline{X})_{opt} < V(\overline{X})$$

Hauptklausur WS 97/98

Aufgabe 1:

a)



b) $P(A) = 0{,}2$; $P(S) = 0{,}3$; $P(A \cup S) - P(A \cap S) = 0{,}3$

i) $P(A) + P(S) - 2P(A \cap S) = 0{,}3$

$$P(A \cap S) = \frac{1}{2}\left[P(A) + P(S) - 0{,}3\right] = \frac{1}{2}(0{,}2 + 0{,}3 - 0{,}3) = 0{,}1$$

ii) $P\left(A|\overline{S}\right) = \dfrac{P\left(A \cap \overline{S}\right)}{P\left(\overline{S}\right)} = \dfrac{P(A) - P(A \cap S)}{P\left(\overline{S}\right)} = \dfrac{0{,}2 - 0{,}1}{0{,}7} = 0{,}1429$

iii) $X \sim B(8;0{,}2)$

$P(x = 3) = 0{,}1468$ lt. Tabelle

c) $X \sim G(\pi)$

i) $f(x) = \pi(1-\pi)^x$

$L(\pi) = \pi(1-\pi)^2 - \pi - \pi(1-\pi)\pi(1.\pi)^3 = \pi^4(1-\pi)^6 \rightarrow \max$

$\dfrac{dL}{d\pi} = 4\pi^3(1-\pi)^6 - 6\pi^4(1-\pi)^5 = 0$

$2(1-\pi) - 3\pi = 0$

$2 - 5\pi = 0$

$5\pi = 2$

$\hat{\pi} = 0{,}4$

ii) $E(x) = \dfrac{1-\pi}{\pi} = \dfrac{0{,}6}{0{,}4} = 1{,}5$

$V(x) = \dfrac{1-\pi}{\pi^2} = \dfrac{0{,}6}{0{,}16} = 3{,}75$

iii) $P(1 \le x \le 3) = P(x \le 3) - P(x = 0) = 1 - 0{,}6^4 - (1 - 0{,}6) = 1 - 0{,}6^4 - 1 + 0{,}6 = 0{,}7296$

Aufgabe 2:

a) $P(0{,}9 \le x \le 1{,}1) = P(1 - 2\cdot 0{,}05 \le x \le 1 + 2\cdot 0{,}05) \ge 1 - \frac{1}{2^2} = 0{,}75$

b) $X_i \sim N(1;0{,}0025)$; $Y = \sum_{i=1}^{6} X_i \sim N(6;0{,}015)$

$P(y \ge 6{,}122) = 1 - P(y \le 6{,}122)$

$$z = \frac{6{,}122 - 6}{\sqrt{0{,}015}} = 1$$

$= 1 - P(z \le 1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$

c) Fall 9

Linke Grenze des Konfidenzintervalls:

$\bar{x} - z\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = 0{,}9727$

$\hat{\sigma} = \frac{\sqrt{n}}{z}(\bar{x} - 0{,}9727) = \frac{4}{2{,}13}(1{,}01 - 0{,}9727) = 0{,}07$

d)

i) $H_0: \mu = 1$ vs. $H_1: \mu < 1$

ii) $T = \frac{\bar{x} - \mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x} - 1}{0{,}07/6} = -1{,}6449$

$\bar{x} = -1{,}6449\frac{0{,}07}{6} + 1 = 0{,}9808$

e) $E(\hat{\mu}_1) = E\left(\frac{1}{n}\sum X_i\right) = \frac{1}{n}\sum E(X_i) = \frac{1}{n}n\mu = \mu$

$\Rightarrow \hat{\mu}_1$ ist erwartungstreu

$V(\hat{\mu}_1) = V\left(\frac{1}{n}\sum X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum V(X_i) = \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

$\lim_{n\to\infty} V(\hat{\mu}_1) = 0 \quad \Rightarrow \hat{\mu}_1$ ist konsistent

$E(\hat{\mu}_2) = E(X_1) = \mu \quad \Rightarrow \hat{\mu}_2$ ist erwartungstreu

$V(\hat{\mu}_2) = V(X_1) = \sigma^2$

$\lim_{n\to\infty} V(\hat{\mu}_2) = \sigma^2 \quad \Rightarrow \hat{\mu}_2$ ist nicht konsistent

Der Schätzer $\hat{\mu}_1$ ist vorzuziehen, da er nicht nur erwartungstreu ist (wie $\hat{\mu}_2$ auch) sondern auch konsistent.

Aufgabe 3:

a) $\int_0^1\int_0^1 \frac{10}{18} - \frac{7}{6}x^2 + x^2y - x^2y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{4}{3}y^2 dxdy$

$= \int_0^1 \left[\frac{10}{18}x - \frac{7}{18}x^3 + \frac{1}{3}x^3y - \frac{1}{3}x^3y^2 - \frac{4}{3}xy + \frac{4}{3}xy^2\right]_0^1 dy$

$= \int_0^1 \frac{10}{18} - \frac{7}{18} + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{4}{3}y^2 dy$

$= \int_0^1 \frac{1}{6} - y + y^2 dy$

$$= \left[\frac{1}{6} y - \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{3} y^3 \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 0 \neq 1 \qquad \Rightarrow f(x,y) \text{ kann keine Dichtefunktion sein}$$

b) Ereignis E: K wird als Erster aufgerufen

$P(\overline{E}) = 1 - P(E)$

Mögliche Ereignisse: $P = 5! = 120$

Ungünstige Ereignisse $(\overline{E})$: P=4!=24

$$P(\overline{E}) = 1 - \frac{24}{120} = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$$

c) $E(Z) = E(X_1 + X_2 - X_3) = E(X_1) + E(X_2) - E(X_3) = 5 + 10 - 8 = 7$

$$V(Z) = V(X_1 + X_2 - X_3)$$
$$= V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + 2C(X_1, X_2) - 2C(X_1, X_3) - 2C(X_2, X_3)$$
$$= 3 + 4 + 6 + 2 - 2 - 2 = 11$$

d) $N_1 = 0{,}2 \cdot N$; $N_2 = 0{,}5 \cdot N$; $N_3 = 0{,}3 \cdot N$

<u>Proportionale Aufteilung</u>

$n_1 = 0{,}2 \cdot 400 = 80$

$n_2 = 0{,}5 \cdot 400 = 200$

$n_3 = 0{,}3 \cdot 400 = 120$

$$V(\overline{x})_{prop} = \frac{1}{n} \sum \frac{n_k}{n} \sigma_k^2 = \frac{1}{400}(0{,}2 \cdot 25 + 0{,}5 \cdot 100 + 0{,}3 \cdot 81) = \frac{1}{400} \cdot 79{,}3 = 0{,}19825$$

<u>Optimale Aufteilung</u>

$$\sum N_k \sigma_k = 0{,}2 \cdot N \cdot 5 + 0{,}5 \cdot N \cdot 10 + 0{,}3 \cdot N \cdot 9 = 8{,}7 \cdot N$$

$$n_1 = 400 \frac{0{,}2 \cdot N \cdot 5}{8{,}7 \cdot N} = \frac{400}{8{,}7} \approx 46$$

$$n_2 = 400 \frac{0{,}5 \cdot N \cdot 10}{8{,}7 \cdot N} = 400 \cdot \frac{5}{8{,}7} \approx 230$$

$$n_3 = 400 \frac{0{,}3 \cdot N \cdot 9}{8{,}7 \cdot N} = 400 \cdot \frac{2{,}7}{8{,}7} \approx 124$$

$$V(\overline{x})_{opt} = \frac{1}{n} \sum \left(\frac{N_k}{N} \sigma_k \right)^2 = \frac{1}{400}(0{,}2 \cdot 5 + 0{,}5 \cdot 10 + 0{,}3 \cdot 9)^2 = \frac{1}{400} \cdot 75{,}69 = 0{,}1892$$

e) $\frac{1}{10}\left(\frac{\lambda}{1} e^{-\lambda} \right) = \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda}$

$$\frac{1}{10} = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 0{,}2$$