

# Beispiele für Aufgaben in der Ökonometrieklausur in Duisburg

Die Aufgaben sind (z.T. modifizierte) tatsächlich gestellte Aufgaben unterschiedlichen Schwierigkeitsgrads und daher auch mit unterschiedlicher Punktzahl

## Aufgabe 1

In einem Modell wird die Aktienrendite  $y_t$  wie folgt mit der Rendite des Marktportfolios  $x_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ) erklärt

$$y_t = \alpha + \beta_1 x_t + u_t$$

und mit  $T = 100$  Monatswerten mit folgenden Resultaten geschätzt:

$$\bar{y} = 0.2, \quad \bar{x} = 0.1, \quad \sum_{t=1}^T x_t y_t = 4, \quad \sum_{t=1}^T x_t^2 = 2, \quad \sum_{t=1}^T y_t^2 = 10,$$

wobei  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  die Mittelwerte der Variablen bezeichnen. Die Renditen sind in Dezimalzahlen gemessen (d.h.  $0.1 = 10$  Prozent).

- Bestimmen Sie die KQ-Schätzer<sup>1</sup> für  $\alpha$  und  $\beta$ .
- Der Korrelationskoeffizient zwischen  $x_t$  und  $y_t$  beträgt 0.8165. Berechnen Sie das Bestimmtheitsmaß  $R^2$  und interpretieren Sie dieses. Welchen Wert hat  $R^2$ , wenn die Werte der beiden Variablen  $x_t$  und  $y_t$  in allen Perioden verdoppelt werden?
- Schätzen Sie die Varianz der Störgröße. Welche Eigenschaften besitzt die von Ihnen verwendete Schätzfunktion?

## Aufgabe 2

(setzt matrixalgebraische Behandlung voraus, die nicht in jedem Semester gelehrt wird)  
Gegeben seien die folgenden Daten:

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 8 & 36 & 16 \\ 36 & 204 & 80 \\ 16 & 80 & 40 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \begin{pmatrix} 0.809 & -0.074 & -0.176 \\ -0.074 & 0.029 & -0.029 \\ -0.176 & -0.029 & 0.154 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}'\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 45 \\ 227 \\ 101 \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie die KQ-Schätzer für  $\alpha$ ,  $\beta_1$  und  $\beta_2$ .
- Berechnen Sie die Varianz-Kovarianz-Matrix. Die Summe der quadrierten Residuen sei gegeben mit  $\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}} = 3.39$ .

## Aufgabe 3

Im linearen Regressionsmodell  $y_t = \alpha + \beta_1 x_t + u_t$  liegt Autokorrelation 1. Ordnung vor, d.h. es gilt  $u_t = \rho u_{t-1} + e_t$ .

- Welche Annahmen treffen Sie über den Störterm  $e_t$ ?
- Schätzen Sie  $\rho$  mit Hilfe der KQ-Methode und interpretieren Sie das Ergebnis. Nutzen

Sie die folgenden Angaben:  $\sum_{t=2}^T \hat{u}_t \hat{u}_{t-1} = 21.6$ ,  $\sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2 = 40$ ,  $\hat{u}_T^2 = 4$ ,  $\hat{u}_1^2 = 4$ .

- Wie kann man das Modell schätzen, wenn  $\rho$  unbekannt ist. Nennen Sie kurz zwei Verfahren.

<sup>1</sup> Methode der Kleinsten Quadrate (KQ) auch als LS bzw. OLS (ordinary least squares) abgekürzt.

- d) Erläutern Sie kurz das Prinzip des Durbin-Watson-Tests auf positive Autokorrelation. Wie ändert sich die Teststatistik, wenn Sie auf negative Autokorrelation testen?

**Aufgabe 4**

Richtig (R) oder Falsch (F)? Bitte übertragen Sie Ihre Ergebnisse auf Ihr Lösungspapier.

|    |  |  |
|----|--|--|
| 1  | Beim Bestimmtheitsmaß und dem Korrelationskoeffizienten werden $x$ und $y$ als Zufallsvariablen aufgefasst.  |  |
| 2  | Der F-Test auf Gesamtsignifikanz eines Modells prüft, ob der $R^2$ Wert signifikant von Null verschieden ist.  |  |
| 3  | Die Prüfgröße $(\hat{\beta} - \beta_0) / \sigma_{\hat{\beta}}$ ist normalverteilt.   |  |
| 4  | Die Kovarianz zwischen $\alpha$ und $\beta$ bei der Einfachregression ist positiv.   |  |
| 5  | Die Varianz des Prognosefehlers im einfachen Regressionsmodell ist am Mittelwert der erklärenden Variablen am geringsten.  |  |
| 6  | Der geschätzte Steigungsparameter im einfachen linearen Regressionsmodell ist unabhängig von der gewählten Skalierung der erklärenden Variablen.   |  |
| 7  | Zur Bestimmung der KQ-Schätzer ist die Annahme normalverteilter Störgrößen nicht erforderlich.   |  |
| 8  | Das Konfidenzintervall $\text{Konf}(\hat{\beta} - t_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{\beta}} \leq \beta \leq \hat{\beta} + t_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{\beta}}) = 0.95$ bedeutet, dass der wahre Parameter $\beta$ mit 95% Wahrscheinlichkeit in das aufgrund der Stichprobe aufgestellt Intervall fällt. |  |
| 9  | Bei der Varianzzerlegung wird die Gesamtvarianz in die erklärte Varianz und die Varianz der Störgröße zerlegt.   |  |
| 10 | Ausgelassene relevante Variablen führen zu verzerrten KQ-Schätzern, wenn Sie mit den eingeschlossenen Variablen korreliert sind.   |  |

**Aufgabe 5**

Gegeben sei der folgende EViews-Output :

Dependent Variable: Y  
 Method: Least Squares  
 Date: 07/04/05 Time: 10:45  
 Sample: 1 33  
 Included observations: 33

| Variable           | Coefficient | Std. Error            | t-Statistic | Prob.    |
|--------------------|-------------|-----------------------|-------------|----------|
| C                  | 102192.4    | 12799.83              | 7.983891    | 0.0000   |
| N                  | -9074.674   | 2052.674              | -4.420904   | 0.0001   |
| P                  | 0.354668    | 0.072681              | 4.879810    | 0.0000   |
| I                  | 1.287923    | 0.543294              | 2.370584    | 0.0246   |
| R-squared          | 0.618154    | Mean dependent var    |             | 125634.6 |
| Adjusted R-squared | 0.578653    | S.D. dependent var    |             | 22404.09 |
| S.E. of regression | 14542.78    | Akaike info criterion |             | 22.12079 |
| Sum squared resid  | 6.13E+09    | Schwarz criterion     |             | 22.30218 |
| Log likelihood     | -360.9930   | F-statistic           |             |          |
| Durbin-Watson stat | 1.758193    | Prob(F-statistic)     |             | 0.000003 |

Dabei seien die Variablen definiert als:

Y = Verkaufsvolumen eines Woody- Restaurants'

N = Anzahl direkter Konkurrenten in einem 2- Meilen Radius eines Woody- Restaurants'

P = Anzahl der Einwohner in einem 3- Meilen Radius eines Woody-Restaurants'

I = Durchschnittliches Haushaltseinkommen der Einwohner (Variable P)

- Schreiben Sie das Modell auf und fügen Sie jeder exogenen Variablen das erwartete Vorzeichen hinzu! Begründen Sie kurz Ihre Mutmaßungen über die „richtigen“ Vorzeichen!
- Berechnen Sie den fehlenden Wert für die F-Statistik und interpretieren Sie diese kurz. *Hinweis:* Die F-Statistik berechnet sich aus  $\frac{ESS/K}{RSS/(T-K-1)}$ .
- Geben Sie ein 90% Konfidenzintervall für  $\beta_P$  an.

ESS = explained sum of squares =  $S_{\hat{y}\hat{y}}$  und RSS = residual sum of squares =  $S_{\hat{u}\hat{u}}$

### Aufgabe 6

In einem Aufsatz über ein multiregionales Modell der chinesischen Volkswirtschaft<sup>2</sup> findet man folgende Angaben zu einer Regressionsgleichung

$$y = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \gamma_1 z_1 + \gamma_2 z_2 + \dots$$

(die Variablen  $z_1, z_2, \dots$  sind Dummies [0-1-Variablen]),  $y$  ist die (logarithmierte) staatliche Investition,  $x_1$  und  $x_2$  sind die (logarithmierten) Variablen GDP (Bruttoinlandsprodukt) und Beschäftigung. Die Ergebnisse der Berechnungen lauten

|       | coefficient | t-Statistic |
|-------|-------------|-------------|
| $x_1$ | 0.1561      | 1.9839      |
| $x_2$ | 0.1344      | 2.8358      |

$$R_{\text{adj}}^2 = \bar{R}^2 = 0.9951, \text{ number of observations } T = 378.$$

- Sind die Koeffizienten signifikant von Null verschieden (Signifikanzniveau 1 %)?
- Man bestimme ein zweiseitiges Konfidenzintervall für  $\beta_1$  und  $\beta_2$  und vergleiche das Ergebnis mit der Testentscheidung (der Irrtumswahrscheinlichkeit von 1 % bei einem zweiseitigen symmetrischen Konfidenzintervall entspricht ein t-Wert von 2,59).
- Der entsprechende Wert für ein Signifikanzniveau von 5 % ist 1,96. Zu welchem Ergebnis käme man, wenn man mit 5% statt 1% Signifikanzniveau rechnen würde? (Verbale Antwort genügt, die Rechnung muss nicht durchgeführt werden).
- Das korrigierte Bestimmtheitsmaß  $R_{\text{adj}}^2$  unterscheidet sich vom unkorrigierten  $R^2$  durch:

### Aufgabe 7

- Welche Schätzeigenschaften der Schätzer (für die Regressionskoeffizienten)  $\hat{\alpha}, \hat{\beta}_1, \dots$  nach der Methode der kleinsten Quadrate (KQ) sind mit folgenden Aussagen gemeint (der entsprechende Fachausdruck soll in das mittlere Feld eingetragen werden). In das rechte Feld

<sup>2</sup> Qingyang Gu and Kang Chen, Economic Modelling Vol. 22 (Dec. 2005) pp. 1020 – 1063.

soll eingetragen werden, welche stochastische Voraussetzung  $b_1, \dots, b_4$  bzw. Voraussetzungen  $a_1, \dots, c_1, \dots$  angenommen werden muss, damit diese Schätzeigenschaft erfüllt ist.

|  | Name der Schätzeigenschaft | Hierfür notwendige Voraussetzung |
|--|----------------------------|----------------------------------|
| $\hat{\beta} = f(y_1, y_2, \dots, y_r)$  |                            |                                  |
| $E(\hat{\beta}) = \beta$   |                            |                                  |
| $V(\hat{\beta}_{KQ}) < V(\hat{\beta}_{AS})$<br>AS heißt alternatives Schätzverfahren |                            |                                  |
| $\lim_{n \rightarrow \infty} V(\hat{\beta}) = 0$                                     |                            |                                  |

- b) Unter welchen Voraussetzungen ist die Stichprobenverteilung von  $\hat{\beta}$  die t-Verteilung mit  $T - k$  Freiheitsgraden? Was bedeutet  $k$  hierbei? Warum ist es wichtig, die genaue Gestalt der Stichprobenverteilung (ist sie z.B. eine Normalverteilung oder eine t-Verteilung usw.?) zu kennen?
- c) Was bedeutet das "Gauss Markoff Theorem"? Für welches Schätzverfahren gilt es? Kennen Sie auch andere Schätzverfahren? Wenn ja, welche?
- d) Welche Schätzeigenschaften werden berührt, wenn (bitte in den Kasten eintragen)

|  |  |
|--|--|
| Zu wenige Regressoren in die Gleichung einbezogen werden (Fehlen relevanter Regressoren)?        |  |
| Zu viele (auch irrelevante) Regressoren in die Gleichung einbezogen werden? (überladenes Modell) |  |

### Aufgabe 8

- a) Das Grundmuster für den F-Test lautet: die Prüfgröße hat die Gestalt

$$F = \frac{\dots\dots\dots\text{Varianz}}{\dots\dots\dots\text{Varianz}} \text{ ist } F_{v_1, v_2} \text{ verteilt}$$

Geben Sie die genauere Bezeichnung der Varianzen (erklärte -, nicht erklärte -, Residual - oder Gesamt-varianz) in Zähler und Nenner von  $F$  an, und geben Sie die Anzahl der Freiheitsgrade  $v_1$  und  $v_2$ , wenn gilt bei jeweils  $T = 50$  Beobachtungen und

$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_4 = 0$  für das restringierte Modell mit nur 3 Regressoren  $X_3, X_5$  und  $X_6$  im Vergleich zu

$$\hat{y} = \alpha + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_6 x_6 \text{ (das volle [unrestringierte] Modell mit 6 Regressoren),}$$

d.h. es geht bei  $H_0$  um die Hypothese, dass die Variablen  $X_1, X_2$  und  $X_4$  keinen Einfluss haben.

Beschreiben Sie den F-Test für die Hypothese:

- der Irrelevanz *aller* Regressoren  $X_1, \dots, X_6$  also von  $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = 0$
- der Signifikanz (zusätzlicher Erklärungsbeitrag) der zu  $X_3, X_5$  und  $X_6$  *hinzukommenden* Regressoren  $X_1, X_2$  und  $X_4$  (was mit obiger Hypothese  $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_4 = 0$  getestet wird)

b) Welche Verteilung taucht in welchem Fall auf: (bitte Name der Verteilung in die freie Stelle in dem Kasten eintragen)

|   | eine Linearkombination * | mehrere Linearkombinationen** |
|---|--------------------------|-------------------------------|
| Wahre Varianz $\sigma^2$ der Störgröße bekannt                |                          |                               |
| Wahre Varianz nicht bekannt. Zu schätzen mit $\hat{\sigma}^2$ |                          |                               |

\* Beispiel:  $\beta_k = 0$  oder  $\beta_1 + \beta_2 = q$

\*\* Beispiel:  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  oder  $\beta_1 + \beta_2 = q$  und  $\beta_3 = 0$

### Aufgabe 9

Ist die Störgröße  $u_t$  in  $y_t = \alpha + \beta x_t + u_t$  *autokorreliert* in der Weise, dass  $u_t = \rho u_{t-1} + e_t$  mit  $e_t$  als einer Zufallsvariable, die den stochastischen Standardannahmen genügt, dann gilt

1)  $E(u_t) =$

2) das Korrelogramm hat bei  $\rho < 0$  die folgende Gestalt

3) für die Schätzung von  $\sigma_u^2$  durch  $\hat{\sigma}^2 = \text{S}\hat{u}\hat{u} / (T - 2)$  gilt: sie ist

4) für die Schätzung von  $\hat{\beta}$  (bzw. für das Testen von Hypothesen über  $\beta$ ) gilt

5) was kann man tun um Probleme unter 4 zu "beheben"

**Aufgabe 10**

|  |    |    |  |
|--|----|----|--|
| 40   | 23 | 01 |  |
| <p>Gegeben sei das interdependente Modell mit (1) einer linearen Angebots- und (2) einer linearen Nachfragefunktion (<math>y</math> = Menge, <math>x</math> = Preis)</p> <p>(1) <math>y_{St} = \alpha + \beta x_t + u_t</math> (Angebotsfunktion)</p> <p>(2) <math>y_{Dt} = \gamma + \delta x_t + v_t</math> (Nachfragefunktion)</p> <p>(3) Gleichgewichtsbedingung <math>y_{St} = y_{Dt}</math> (für all <math>t = 1, \dots, T</math>)</p> <p>a) Zeigen Sie dass das Modell unteridentifiziert ist und dass man mit weiteren Regressoren, etwa <math>x_{1t}</math> (Kosten in Gl. 1) und <math>x_{2t}</math> (Einkommen in Gl. 2) das Modell identifizierbar machen kann!</p> <p>b) wie lautet beim ursprünglichen und bei dem entsprechend erweiterten Modell die reduzierte Form und was bedeutet ILS (indirect least squares)?</p> |    |    |  |

**Beispiele für Multiple Choice Fragen (nur ein Kreuz!)**

|   |    |    |  |
|---|----|----|--|
| 40  | 13 | 01 |  |
| <p>Ein nicht-konstruktiver Test</p> <p>a) gibt bei Ablehnung von <math>H_0</math> keinen Hinweis darüber welche Alternativhypothese <math>H_1</math> gelten könnte</p> <p>b) erlaubt es bei Ablehnung von <math>H_0</math> nicht zu sagen, dass <math>H_0</math> tatsächlich falsch ist</p> <p>c) es gilt a, Antwort b gilt bei jedem Test, auch bei einem "konstruktiven"</p> <p>d) es gilt b, bei einem nichtkonstruktiven Test ist die <math>H_1</math> nicht "konstruiert".</p> |    |    |  |

|   |  |  |  |
|---|--|--|--|
| <p>Die Anwendbarkeit des Durbin-Watson-Tests setzt voraus, dass in der Regressionsgleichung</p> <p>a) ein Absolutglied und keine verzögerte endogene Variable erscheint</p> <p>b) wie a aber außerdem auch die Störgröße einem AR (1) Prozess folgt und nicht einem autoregressiven Prozess höherer Ordnung</p> <p>c) wie b aber außerdem <math>u</math> auch homoskedastisch ist</p> <p>d) wie c aber außerdem auch das Korrelogramm keine negativen Werte enthält</p> |  |  |  |
|---|--|--|--|

|   |  |  |  |
|---|--|--|--|
| <p>Mit dem Jarque Bera (JB) Test prüft man</p> <p>a) die Annahme B3 auf Nichtvorhandensein von Autokorrelation</p> <p>b) mit einer <math>\chi^2</math> – verteilten Prüfgröße ob man durch eine geeignete Transformation der Variablen Symmetrie erhält</p> <p>c) ob Momente (Schiefe und Wölbung) der Häufigkeitsverteilung der geschätzten Störgröße im Einklang sind mit der Annahme, dass die Störgröße normalverteilt ist</p> <p>d) alle Antworten a bis c sind falsch</p> |  |  |  |
|---|--|--|--|

Dass in einer Gleichung die Störgröße mit dem Regressor (der erklärenden Variable) korreliert ist, kann

- a) entstehen wenn der Regressor zufällig schwankt (also Annahme C1 verletzt ist) oder selbst auch eine endogene Variable ist wie die mit der Gleichung zu erklärende Variable  $y$  auf der linken Seite
- b) zur Folge haben, dass die Schätzung der Parameter der Gleichung nicht konsistent ist
- c) beide Antworten a und b sind richtig
- d) beide Antworten a und b sind falsch.

Ein asymptotisch erwartungstreuer Schätzer

- a) hat eine kleinere Varianz als ein verzerrter Schätzer
- b) ist immer mit dem zu schätzenden Parameter der Grundgesamtheit identisch
- c) hat einen Erwartungswert, der nur bei großem Stichprobenumfang mit dem zu schätzenden Parameter der Grundgesamtheit identisch ist
- d) keine der Antworten a) bis c) ist richtig.

Ein erwartungstreuer Schätzer

- a) hat eine kleinere Varianz als ein verzerrter Schätzer
- b) hat einen Erwartungswert, der mit dem zu schätzenden Parameter der Grundgesamtheit identisch ist
- c) ist nur bei großem Stichprobenumfang mit dem zu schätzenden Parameter der Grundgesamtheit identisch
- d) keine der Antworten a) bis c) ist richtig

Ein konsistenter Schätzer

- a) hat eine kleinere Varianz als ein verzerrter Schätzer
- b) hat eine Varianz, die mit zunehmendem Stichprobenumfang abnimmt
- c) ist nur bei großem Stichprobenumfang mit dem zu schätzenden Parameter der Grundgesamtheit identisch
- d) keine der Antworten a) bis c) ist richtig

Bei einem überladenen (overfitted) Modell gilt für den Erwartungswert der Störgröße  $E(\hat{u}_t^*)$  und die Varianz des geschätzten Regressionskoeffizienten  $\text{var}(\hat{\beta}_t^*)$  im Verhältnis zu den entsprechenden Größen im richtigen Modell (ohne \*) folgendes

|  | $\text{var}(\hat{\beta}_t^*) > \text{var}(\hat{\beta}_t)$ | $\text{var}(\hat{\beta}_t^*) = \text{var}(\hat{\beta}_t)$ |
|--|---|---|
| $E(\hat{u}_t^*) \neq E(\hat{u}_t) = 0$ | a   | c   |
| $E(\hat{u}_t^*) = E(\hat{u}_t) = 0$    | b   | d   |

Der richtige Buchstabe a, ..., d ist anzukreuzen