Die missverstandene Lorenzkurve

(Sie zeigt nicht das Ausmaß von Streuung, absoluter Konzentration, Gerechtigkeit oder Spezialisierung an)

Peter von der Lippe

Vorbemerkung: Wir gehen davon aus, dass der Leser mit der Konstruktion der Lorenzkurve und der Berechnung des darauf aufbauenden Gini-Koeffizient D_G durchaus etwas vertraut ist. Im Folgenden beziehen wir uns vor allem auf das Lehrbuch v. d. Lippe 1993 und benutzen insbesondere die dort eingeführte Notation (Symbolsprache), die auch identisch ist mit der in dem Übungsbuch v. d. Lippe 1999. Beide Bücher sind auf meiner Website von-der-Lippe.org frei zum Download verfügbar

Einführung

Es hat sich gezeigt, dass die Messung der "Konzentration" (als Konzept der Deskriptiven Statistik) offenbar relativ, verglichen mit anderen Teilen der Deskriptiven Statistik, viele Verständnisprobleme aufwirft,[1] was auch angesichts der oft oberflächlichen Darstellung der Lorenzkurve in der Literatur gut zu verstehen ist. Die Verständnisprobleme betreffen vor allem die

- Abgrenzung zwischen Konzentration und ähnlich erscheinenden Konzepten, wie Streuung, Schiefe etc., die alle irgendwie mit "Ungleichheit" zu tun haben;
- die Unterscheidung zwischen absoluter und relativer Konzentration, und die
- inhaltliche Interpretation von "Konzentrationsmerkmal" und "Einheiten" auf die die Merkmalssumme verteilt wird, sowie
- die Interpretation der Grenzzustände minimaler und maximaler Konzentration.

Die zuletzt angesprochenen Fragen sind auch entscheidend für a) die *operationale* Relevanz einer empirischen Konzentrationsmessung (wofür ist es von Nutzen zu wissen, wie groß der Gini-Koeffizient ist?) und b) für die Sinnhaftigkeit eines Messkonzepts. Wir demonstrieren a) am Beispiel der Messung der Belastung von Befragten durch Erhebungen der amtlichen Statistik und b) am Beispiel der Messung des Grads der "Spezialisierung" von Krankenhäusern. Diese beiden Anwendungen waren u.a. zuletzt auch Anlass, mich (wieder) mit der Lorenzkurve zu beschäftigen und mit dem vorliegenden Text Hinweise auf mögliche Fehlanwendungen der Lorenzkurve zu geben, die man so in den üblichen Lehrbüchern der Statistik nicht findet.

1. Das Konzentrationsmerkmal muss extensiv (summierbar) sein

Ein Merkmal x ist extensiv, wenn eine "über x" gebildete Summe sinnvoll ist. Das Begriffspaar extensiv/intensiv betrifft die heutzutage (bei der üblichen Dominanz rein formaler Betrachtungen in der Statistik) oft vernachlässigten Probleme der "inhaltlichen" Interpretation einer Statistik, also von Problemen, bei denen es zwar oft schwer ist, Exaktheit zu erreichen, die aber gleichwohl nicht unwichtig und trivial sind.

Aber auch wenn es hier Schwierigkeiten mit einer exakten Definition gibt, kann man durchaus auf den "gesunden Menschenverstand" vertrauen. Den meisten Menschen leuchtet es zum Beispiel unmittelbar ein, dass man von einem *Gesamteinkommen* von $x_1 + x_2 = 230$ sprechen kann, wenn es um die Einkommen von zwei Personen $x_1 = 140$ und $x_2 = 90$ geht. Aber wenn x_1 und x_2 Intelligenzquotienten sind, dann macht es keinen Sinn zu sagen, die beiden Personen haben zusammen einen IQ von 230. Intelligenz ist ein intensives Merkmal: die Summe ist nicht sinnvoll zu interpretieren (*es gibt keine Gesamtintelligenz von $n \geq 2$ Personen*), wohl aber eine durchschnittliche Intelligenz von $n \geq 2$ Personen, d.h. man kann sinnvoll sagen: die durchschnittliche

[1] Anlass für die folgenden Überlegungen war, dass mir nicht selten per Email von Statistikanwendern und z.B. wohl auch von früheren Studenten Fragen zur Lorenzkurve gestellt wurden und dass ich auch öfter (in Aufsätzen und Vorträgen) weniger gelungene empirische Anwendungen der Lorenzkurve gesehen habe, so dass es mir nützlich erschien, einmal einige besonders häufig vorkommende Verständnisprobleme aufzulisten

Intelligenz ist hier (bei den beiden Personen) 115. In diesem Sinne ist auch die ungleiche Verteilung des Einkommens oder des Vermögens (als extensive Konzentrationsmerkmale) ein Thema für die Lorenzkurve, die ungleiche Verteilung der Intelligenz (als ein intensives Merkmal) aber nicht, und das, obgleich offensichtlich auch die Intelligenz "ungleich" verteilt ist.

2. Die Lorenzkurve ist keine Veranschaulichung der Streuung und der Gini-Koeffizient ist kein Streuungsmaß

Ich habe einen Vortrag eines Professors aus Lüneburg gehört, in dem es um die Unterschiedlichkeit der Arbeitszeit in bestimmten Berufen, bzw. Wirtschaftszweigen ging. Der Professor glaubte offenbar, bei Lorenzkurve und Gini-Koeffizient[2] handele es sich nur um eine spezielle, besonders anschauliche Art der Streuungsmessung, nach dem Motto "Ungleichheit = Streuung = Konzentration".[3] Er zeigte sich – was bei Professoren wohl eine Berufskrankheit ist – unerfreut und unwirsch bei allen Fragen zu seinen zahlreichen Abbildungen von Lorenzkurven und selbst die einfachsten Überlegungen hierzu prallten an ihm ab, wie etwa diese:

Bei der relativen Konzentration (= Disparität) gibt es klar zwei Grenzzustände des Ginikoeffizienten, nämlich $D_G = 0$ wenn alle gleich viel haben,[4] und $D_G = 1$ wenn einer alles hat und alle anderen nichts.[5] Die wöchentliche (7 Tage) Arbeitszeit kann aus leicht einzusehenden Gründen nie größer sein als $7*24 = 168$ Stunden (wenn man jeden Tag ohne Unterbrechung Tag und Nacht arbeitet). Wenn es um die ungleiche Arbeitszeit der Beschäftigten eine Branchen geht sprechen wir aber im Falle von $D_G = 1$ über eine Arbeitszeit in der Größenordnung von etlichen Millionen Stunden in der Woche: Wie soll das gehen?

Bei der Disparität (und auch der absoluten Konzentration) gibt es eine wohldefinierte Unter- *und* Obergrenze und quasi einen "Kuchen" (dem Gesamtmerkmalsbetrag) von gegebener Größe, von dem man sich unterschiedlich große (aber nicht beliebig große) Stücke abschneiden kann. Bei der Streuung (z.B. der Varianz s^2) gibt es nur eine Untergrenze ($s^2 = 0$, wenn für alle i $x_i = \bar{x}$ gilt, also eine Einpunktverteilung besteht) aber keine Obergrenze.[6] Denn es gibt bei der Streuung auch keinen Kuchen, keine "Gesamtarbeitszeit", die eine Einheit für sich allein beanspruchen kann. Bei jeder Anwendung von Konzentrationsmaßen (egal ob absolute oder relative Konzentration) sollte man sich deshalb auch fragen, was im konkreten Fall die Unter- und die Obergrenze inhaltlich eigentlich bedeutet.

3. Das i in H_i und Q_i muss sich auf die gleiche Art von Einheit beziehen

Es ist also sehr wichtig, stets zu fragen nach:

- dem ***Konzentrationsmerkmal*** x (dem Gesamtmerkmalsbetrag, quasi dem "Kuchen" Σx_i)
- und den ***Einheiten*** i = 1,2,…,n (auf die der Kuchen verteilt wird);

---

[2] Corrado Gini (1884 – 1965), seit 1910 Professor für Statistik, war zwischen 1926 und 1932 (er trat wegen Streitigkeiten mit Mussolini zurück) Präsident des nationalen Statistikamts von Italien.

[3] Der Gedanke scheint zu sein: In allen Fällen ist das, was i bekommt, nämlich x_i, anders als das, was j bekommt (nämlich x_j). Es geht also stets irgendwie um Ungleichheit, so dass Streuung sowie relative und absolute Konzentration mehr oder weniger das Gleiche zu sein scheint (sie alle werden dann bei Ungleichheit größer als Null). Die Fremdwörter für Streuung und relative Konzentration sind Dispersion und Disparität. Das klingt ja auch schon ähnlich. Wer interessiert sich schon für die Unterschiede? Die meisten Studenten (und leider auch viele Lehrbuchautoren) dringen in Statistik nur so tief ein, dass sie wissen, welche Zahlen einer Klausuraufgabe oder eines Zahlenbeispiels man an welcher Stelle der Formel einsetzen muss, nicht tiefer. Über das, was die Formel eigentlich soll gibt es leider oft bestenfalls nur eine sehr vage Vorstellung.

[4] Diese Verteilung wird oft fälschlich "Gleichverteilung" (uniform distribution) genannt. Eine solche Verteilung läge vor, wenn jede Ausprägung einer Variable X gleichhäufig oder gleichwahrscheinlich wäre (z.B. die Verteilung der Augenzahl beim Würfeln). Was bei minimaler Konzentration vorliegt ist aber *nur ein bestimmter Wert von x*, der zu 100% vorkommt, also eine "*Einpunktverteilung"*. Es wäre deshalb eigentlich auch besser bei der Lorenzkurve, von der "Geraden der egalitären Verteilung" statt – wie leider generell üblich und wohl auch nicht mehr zu ändern – von einer "Gleichverteilungsgeraden" zu sprechen.

[5] Das wäre dann eine Zweipunktverteilung.

[6] Das ist nicht der einzige Unterschied. Auf weitere Unterschiede gehen wir im Anhang ein.

denn es geht bei "Konzentration" immer um die (ungleiche) Verteilung eines Kuchens (Σx_i) auf n Einheiten (i = 1, 2, … , n). Es ist also *sehr wichtig*, was i bei H_i und Q_i jeweils beinhalten soll:

> Offenbar eine Ex-Studentin der Univ. Essen teilte mir ihre Schwierigkeiten mit einer (nicht von mir gestellten) Aufgabe eines Statistik-Übungsbuchs mit: In der Aufgabe ging es um "die 100 reichsten Menschen der Welt, aufgeteilt auf die verschiedenen Länder". Sie schrieb weiter: "Könnte man z.B. sagen, dass 50 % der Länder 11 % der reichsten Menschen auf sich vereinen? Die Antwort scheint mir persönlich aber irgendwie nicht richtig zu erscheinen, ich weiß allerdings gerade nicht wo mein Denkfehler ist".
>
> Das Problem ist hier wohl, dass i bei den Häufigkeiten H_i (dem kumulierten Anteil an der Gesamtzahl n der Einheiten) die Einheiten *Länder* sind (50 % der Länder), aber was ist i bei den Q_i (also Q_1, Q_2,…), den kumulierten Anteilen an der Merkmalssumme? Es müsste sich um eine Eigenschaft von *Ländern* handeln. Aber das ist nicht so ganz klar; denn genau genommen geht es hier um die Eigenschaft eines Landes, eine mehr oder weniger große Anzahl von solchen *Menschen* zu beherbergen, die zu den 100 reichsten Menschen *der Welt* (nicht des betreffenden Landes) gehören. Die Variable "Beherbergen von Menschen, die zu den 100 reichsten Menschen der Welt gehören" knüpft aber nicht gerade an ein im Alltagsleben geläufiges Charakteristikum von *Ländern* an. Daher auch die Bauchschmerzen mit der Interpretation "50 % der Länder vereinen 11 % der reichsten Menschen auf sich". Was heißt hier (bei *Ländern*) schon "reichsten", wo es doch um reiche *Menschen* geht und noch dazu *nicht um alle Reichen eines Landes*, sondern um "reich" im Sinne von "einer von den 100 reichsten Menschen" *der ganzen Welt*)?

Was lernt man daraus? Die Einheit i (die Zählvariable bei H_i und Q_i) muss entweder in allen Fällen ein Land oder eine Person sein.[7] Also entweder: die x % *reichsten Länder* haben y % des Welteinkommens (über alle n Länder addiert), oder die x % reichsten *Personen eines Landes* haben y % der Einkommen aller Personen *dieses Landes*.

Bei x% der *Länder* (wenn also mit i Länder als statistischen Einheiten bezeichnet werden) hat man aber immer ein Problem: <u>M</u>alta ist genauso wie <u>D</u>eutschland eines von n Ländern, so dass auch $h_M = h_D = 1/n$ ist, obgleich die Länder sehr unterschiedlich groß sind. Wenn es dann heißt: die x% (?) Länder, was soll dann für (?) stehen? Man ist instinktiv geneigt zu sagen: größten, reichsten usw. Aber bei q und Q geht es vielleicht gar nicht um Größe oder BIP des Landes.

4. Die h_i (H_i) und q_i (Q_i) sind nicht zwei unabhängige Größen

Man kann nicht für die q_i beliebige Größen, unabhängig von den h_i ins Spiel bringen (und deshalb sind auch die Q_i nicht unabhängig von den H_i), denn in beide Größen, h_i und q_i gehen die absoluten Häufigkeiten n_i ein. Wenn x das nichtnegative, extensive Konzentrationsmerkmal ist mit $x_1, x_2, \dots, x_m$, und den absoluten Häufigkeiten $n_1, n_2, n_m, \dots$ n dann sind die q_i bei gruppierten Daten x_i (i = 1, 2, …, m) definiert als $q_i = x_i n_i / \Sigma x_i n_i$ und die $h_i = n_i/\Sigma n_i$ (oder n_i/n).

i	x_i	n_i	h_i
1	x_1	n_1	h_1
2	x_2	n_2	h_2
…	…	…	…
m	x_m	n_m	h_m
Σ		n	1

Man kann Zähler und Nenner von q_i durch n teilen und erhält $q_i = x_i h_i / \Sigma x_i h_i = x_i h_i / \bar{x}$; denn $\bar{x} = \Sigma x_i h_i$. Der Quotient q_i/h_i ist die Steigung der Lorenzkurve, die von links nach rechts monoton zunehmen muss (von 0 {waagrecht} bis ∞ {senkrecht}. Hat man lauter einzelne Werte $x_1, x_2, \dots, x_n$ gilt $h_i = 1/n$ und $\bar{x} = \sum x_j / n$ und $q_i = x_j / \bar{x}$, so dass die Steigung zunächst kleiner ist als 1 (die Lorenzkurve verläuft flacher als die "Gleichverteilungsgerade" [45^0 Linie] so lange $x_j < \bar{x}$ ist), dann parallel, wenn $x_j = \bar{x}$ und schließlich (wenn $x_j > \bar{x}$) steiler. Weil nicht nur die Lorenzkurve von links (H = 0) nach rechts (bis H = 1) monoton steigend ist, sondern auch die Steigung selbst monoton steigend (zunehmend) ist, kann die Lorenzkurve auch die Gleichverteilungsgerade nicht schneiden, denn das würde ja verlangen, dass die Steigung zuerst zu- und dann wieder abnimmt.

[7] Anders gesagt: i kann nicht in h_i ein Land darstellen und sich in q_i bzw. Q_i auf einen Millionär (also eine Person) beziehen oder umgekehrt. Er muss bei h und q die gleiche Art statistische Einheilt sein.

Mit $H_i = \sum_{j=1}^{i} h_j$ und $Q_i = \sum_{j=1}^{i} q_j = \frac{1}{\bar{x}} \sum_{j=1}^{i} x_j h_j$ (j = 1, 2,…,i) werden *nicht irgendwelche Anteile kumuliert*, etwa $h_j = x_j/\Sigma x_j$ und $q_j = y_j/\Sigma y_j$, sondern Größen, die untereinander zusammenhängen. Wenn j bis m läuft erhält man $H_m = Q_m = 1$ und $\Sigma x_j h_j = \bar{x}$. Für $i < m$ ist $Q_i < H_i$ weil $x_1h_1 +\ldots+ x_ih_i < \bar{x} = x_1h_1 +\ldots+ x_mh_m$.

5. Absolute Konzentration (K) und relative Konzentration (Disparität D) sind zu unterscheiden, es macht keinen Sinn bei einem Datensatz K- *und* D-Maße zu bestimmen

Man unterscheidet absolute Konzentration (oder einfach Konzentration K) und relative Konzentration (Disparität D), aber worin der Unterschied besteht, ist vielen nicht bekannt. Schaut man in den einschlägigen Lehrbüchern nach (hier wäre es wohl besser, nach Büchern der "Deskriptiven Statistik", statt nur einfach "Statistik" zu suchen), so wird es meist nicht sehr konkret und exakt, sofern dort die Unterscheidung überhaupt eingeführt wird. Was kann man z.B. damit anfangen, wenn es heißt: "Von absoluter Konzentration … spricht man dann, wenn der größte Teil der Merkmalssumme auf eine geringe *Zahl* von Merkmalsträgern entfällt. Relative Konzentration … ist gegeben, wenn der größte Teil der Merkmalssumme auf einen kleinen *Anteil* [Prozentsatz] der Merkmalsträger aufgeteilt ist."[8] Das ist nutzlos[9], denn man wird sich dann doch gleich fragen: wann kommt es auf die geringe *Zahl* und wann auf den kleinen *Anteil* an? Viel sinnvoller ist es, sich den Unterschied zwischen D und K anhand typischer Aussagen (Anwendungen der K-, bzw. D-Messung) klarzumachen

- die 2% reichsten Haushalte haben 70% des Vermögens ist eine typische Feststellung im Sinne von D (bei 2% der Haushalte handelt es sich immerhin absolut um *sehr viele*, nämlich einige Tausend Haushalte), dagegen ist
- die 2 größten Unternehmen haben zusammen einen Marktanteil (am Gesamtumsatz) von 70% typisch für K, denn hier geht es um absolut wenige (zwei) Unternehmen auf einem Markt, auf dem dann meist auch *nur wenige* (z.B. nur zehn) Unternehmen präsent sind (jedenfalls nicht einige Tausend wie bei den Haushalten).

Wir werden später sehen, dass absolute Konzentration K als ein allgemeineres (umfassenderes) Konzept aufgefasst werden kann als die Disparität D; denn K spiegelt die Anzahldimension (es gibt nur wenige Merkmalsträger) *und* die Verteilungsdimension (der Gesamtmerkmalsbetrag wird ungleich auf die Merkmalsträger verteilt) wider, D nur die Verteilungsdimension.

Etwas bedenklich ist es deshalb, wenn anhand ein und desselben Zahlenbeispiels, bzw. Datensatzes die Berechnung eines K-Maßes *und* eines D-Maßes durchgeführt wird.[10] Wir bringen hierzu auch zwei Beispiele aus veröffentlichten wissenschaftlichen Arbeiten, in denen es,

- um das ungleiche Ausmaß geht, in dem Befragte mit Erhebungen der amtlichen Statistik belastet werden und um
- die Messung der Spezialisierung eines Unternehmens (z.B. eines Krankenhauses),

wo jeweils sowohl mit K- als auch mit D-Betrachtungen operiert wurde.

Es handelt sich – wie gleich gezeigt wird – bei D und K um deutlich unterschiedliche Aspekte von Daten, so wie Alter und Gewicht klar zu unterscheidende Merkmale einer Person sind.

Es ist deshalb auch nichts von der Empfehlung zu halten: "Es kann auch angezeigt sein, beide Maße zu berechnen, um Fehlurteile zu vermeiden"[11]. Denn man kann leicht zeigen, dass sich die typischen Kennzahlen (Maße) von K und D wie

---

[8] Schulze, S. 95.

[9] Es ist eine Erklärung nach der Art von: links ist, wo der Daumen rechts ist. Wer nicht weiß wo links ist wird auch nicht wissen, wo rechts ist und kann mit dieser "Erklärung" nichts anfangen.

[10] Ein Beispiel hierfür ist Zwerenz, Statistik, S. 144, 147

Konzentration	Maße (Statistiken)*	graphische Darstellung
absolut K	concentration ratios C_i, Herfindahl Index K_H	Konzentrationskurve
relativ D	Disparitätsmaß von Gini D_G	Lorenzkurve

* zu den Berechnungsformeln vgl. den nächsten Abschnitt, Nr. 6; an späterer Stelle bringen wir auch die "Entropie" als Maß der absoluten Konzentration

gegenläufig entwickeln können, diese Maße also klar etwas Verschiedenes messen. In einem Lehrbuch[12] wird das mit einem Beispiel demonstriert, wo in einem Markt mit vier gleich großen Unternehmen durch den Eintritt eines weiteren Unternehmens in den Markt (n = 5 statt bisher n = 4 und entsprechend veränderten Marktanteilen) K sinkt, aber gleichzeitig D steigt.

Ausgangssituation vier gleich große Merkmalsträger			
Marktanteile c_i	n	absolute Konzentration K	Disparität D
0,25 0,25 0,25 0,25	4	C_2 (Marktanteil der beiden größten Unternehmen) = 0,5 ; $K_H = \Sigma(c_i)^2 = 0{,}25$	$D_G = 0$ Lorenzkurve ist identisch mit der Gleichverteilungsgeraden*
Neue Situation durch Markteintritt eines kleinen fünften Unternehmens			
0,22 0,22 0,22 0,22 <u>0,12</u>	5	$C_2 = 0{,}44 < 0.5$; $K_H = \Sigma(c_i)^2 = 4(0{,}22)^2 + (0{,}12)^2 = 0{,}208 < 0{,}25$	$D_G = 1 - 0{,}92 = 0{,}08 > 0$; Lorenzkurve ist nicht mehr identisch mit der Gleichverteilungsgeraden

* bei n *gleich großen Unternehmen* ($q_i = 1/n$) ist die Lorenzkurve immer gleich der Gleichverteilungsgerade, also $D_G = 0$, egal wie groß n ist; aber K nimmt ab, wenn n größer wird ($K_H = \Sigma(1/n)^2 = 1/n$)

Wie man sieht, nimmt K ab (schon weil n zunimmt) aber D nimmt zu (weil die Unternehmen jetzt nicht mehr alle gleich groß sind, sondern untereinander unterschiedlich sind).

Es ist also Skepsis angebracht, wenn bei ein und dem gleichen Datensatz sowohl Maße für K als auch für D berechnet werden bzw. entsprechende Graphiken präsentiert werden. Auch in der Literatur findet man – wie gesagt – so etwas. In dem oben erwähnten wissenschaftlichen Aufsatz von Mitarbeitern des Statistischen Bundesamts[13] ging es darum, wie sich die Gesamtbelastung von Befragten in Höhe von 355.1 Mill. € (durch das Ausfüllen von Fragebogen bei amtlichen statistischen Erhebungen) auf 188 unterschiedlich stark die Befragten beanspruchende amtliche Statistiken verteilt. Es heißt dort ganz im Sinne der absoluten Konzentration

> "Thus the 10 (50) statistics with the highest burden account for about 80 (97%) of the total burden created by official statitics;"

Andererseits wurde aber auch der Gini Koeffizient D_G mit dem ungewöhnlich hohen Wert von 0,909 berechnet.

6. Berechnungsformeln in Abhängigkeit von der Art der vorliegenden Daten

K-Maße zu bestimmen setzt voraus, dass man Einzelwerte hat, also z.B. die (von groß zu klein aneinander gereihten) Marktanteile $c_1, c_2, \ldots$ ($c_1 \geq c_2 \geq \ldots$). Wenn man D-Maße berechnen will, kann man mit Einzelwerten, oder aber auch mit gruppierten oder klassierten Daten arbeiten (die Berechnung mit Einzelwerten ist einfach nur der Spezialfall $h_i = 1/n$ einer Berechnung aus gruppierten Werte). Im Folgenden werden zunächst nur einige wenige, besonders einfache Maße für K und D eingeführt, weil es uns hier primär darum geht, anhand der Axiome zu zeigen, dass sich K-Maße und D-Maße auf unterschiedliche Fragestellungen beziehen.

<u>absolute Konzentration K</u>

1. ***Concentration ratios C_i*** (Anteile der i größten Merkmalsträger) entstehen durch Kumulieren der c-Werte: $C_1 = c_1$, $C_2 = c_1 + c_2$, usw. allgemein $C_i = \Sigma c_j$ ($j = 1,2,\ldots,i$)[14]. Die lineare

---

[11] Schulze, S. 113. Es bleibt unklar, wie "Fehlurteile" vermieden werden sollen, wenn sich K- und D-Maße widersprechen (also gegenläufige Ergebnisse haben, wie dies oben gezeigt wird).

[12] Neubauer et al., S. 108

[13] Vorgrimler et al.

[14] In einer E-Mail wurde ich gefragt, warum es in den Formeln einmal h_i, dann aber auch h_j heißt. Die Antwort ist einfach: es ist zwischen einer Zählvariable und einem konkreten Wert dieser Variable zu unterscheiden. In i

Verbindung der Punkte (0,0), $(1,C_1)$, $(2,C_2)$,…, $(n, C_n = 1)$ heißt ***Konzentrationskurve***. Die Abszisse "läuft von 0 bis n" und die Ordinate (C-Werte als Prozentangaben) von 0 bis 100%. Die Kurve liegt also in einem *Rechteck und nicht wie die Lorenzkurve*, bei der Abszisse *und* Ordinate von 0% bis 100% laufen, *in einem Quadrat*.

2. ***Herfindahls Maß*** (oder Herfindahl-"Index" genannt)

(1) $K_H = \sum_j c_j^2$, bzw. weil $\sum_{j=1}^{m} c_j^2 = 1$ kann man K_H auch als gewogenes Mittel der c-Werte auffassen (gewogen mit $c_j/\Sigma c_j = c_j$) denn $K_H = \sum_j c_j \cdot \left(c_j / \sum_j c_j\right)$.

3. ***Rosenbluth*** Index: er hängt mit Ginis Disparitätsmaß D_G wie folgt zusammen

(2) $K_R = \dfrac{1}{n(1-D_G)}$ und stellt auch – wie D_G – ein Verhältnis von zwei Flächen dar.

relative Konzentration (Dispariät D)

Wir führen hier nur die Lorenzkurve und D_G (***Gini***-Koeffizient) ein[15]: die Anteile an der Merkmalssumme (an dem zu verteilenden "Kuchen") werden jetzt von klein zu groß geordnet $q_1, q_2, \ldots$ (so dass $q_1 \leq q_2 \leq \ldots$ statt von groß zu klein wie die c_j bei der K-Messung) und es wird wie folgt kumuliert $H_1 = h_1$, $H_2 = h_1 + h_2$, $H_3 = h_1+h_2+h_3$ usw. bis $H_m = h_1+h_2+\ldots+h_m = 1$ (100%) und entsprechend $Q_1 = q_1$, $Q_2 = q_1 + q_2$, usw. bis $Q_m = 1$. Die Lorenzkurve ist die lineare Verbindung der Punkte (0,0), (h_1,Q_1), (h_2,Q_2) ,…, (1,1), und D_G ist

(3) $D_G = \Sigma h_i(Q_i + Q_{i-1})$ oder

(3a) $D_G = \Sigma q_i(H_i + H_{i-1})$.

Man kann (vgl. Abschn.4) zeigen, dass (für alle i) $Q_i \leq H_i$ ist, die Lorenzkurve also stets unterhalb der "Gleichverteilungsgerade" verläuft oder mit ihr identisch ist. Summiert man über *alle* Anteile am Gesamtmerkmalsbetrag spielt die Anordnung (von groß zu klein, wie die c_i oder umgekehrt, wie die q_i) keine Rolle. Für K_H erhält man also auch $K_H = \sum_j q_j^2 = \sum_j c_j^2$.

Ein aufschlussreicher ***Spezialfall*** ist der Fall ***von zwei Gruppen***, bzw. Klassen (also m = 2):

H	Q
$H_1 = h_1 = h$	$Q_1 = q_1 = q$
$H_2 = 1$ mit $h_2 = 1-h$	$Q_2 = 1$ mit $q_2 = 1-q$

Die Lorenzkurve besteht jetzt aus 3 Punkten (0,0), (h,q), (1,1). Es gibt Arme (Anteil an Bevölkerung h und am "Kuchen" q < h) und Reiche (Anteil an der Bevölkerung 1- h und am "Kuchen" 1- q. Weil q < h ist 1- q > 1- h. Während bei den Armen der Anteil am Kuchen kleiner ist als an der Bevölkerung (q < h), ist es bei den Reichen genau umgekehrt: er ist größer als der Anteil an der Bevölkerung. D_G vereinfacht sich hier zu

(4) $D_G = h - q$,

was gleich dem Abstand des Punkts (h, q) der Lorenzkurve von dem entsprechenden Punkt (h, h) auf der Gleichverteilungsgeraden ist. Ein Flächenverhältnis wird zur Länge einer Strecke.

Der Spezialfall von nur zwei Gruppen erleichtert es auch, eine häufig vorgebrachte Kritik am Flächenverhältnis D_G nachzuvollziehen: "Sehr unterschiedliche Situationen können zum selben Ginimaß führen ... In der Situation A vereinigen 50% der Merkmalsträger auf sich 13,3% der

= 1, 2, ... n ist i eine Variable, d.h. sie kann verschiedene Werte, wie etwa 1, 2, 8 oder eben n annehmen. Wenn man aber mit i eine Grenze bezeichnen möchte, bis zu der man summieren will, dann darf man nicht i= 1, 2,... i schreiben, denn dann wäre i links eine Variable, aber rechts ein fester Wert, etwa wie i = 6. Also muss man eine neue Variable einführen, die u.a. den Wert i annehmen kann ("von 1 bis i läuft"). Daher also beispielsweise $H_i = \Sigma h_j$ mit j = 1, 2,... i.

[15] Auch das Quadrat des Variationskoeffizienten, also V^2 ist ein Disparitätsmaß. Davon später mehr.

Merkmalssumme. Dagegen besitzen in Situation B 13,3% der Merkmalsträger einen Anteil von 50% an der Merkmalssumme"[16]

	h	q	$D_G = h - q$	"Arme"		"Reiche"	
				$q = q_1$; $h_1 = h$	x_1	$1-q = q_2$; $h_2 = 1-h$	x_2
A	0,5	0,133	0,367	0,133 ; $h_1 = 0{,}5$	$0{,}266\,\bar{x}$	1-0,133; $h_2 = 0{,}5$	$1{,}734\,\bar{x} = 6{,}5x_1$
B	1-0,133	0,5	0,367	0,5; $h_1 = 0{,}867$	$0{,}577\,\bar{x}$	0,5; $h_2 = 0{,}133$	$3{,}759\,\bar{x} = 6{,}5x_1$

Mit $q_i = x_i h_i/\bar{x}$ kann man auch leicht die mittleren Einkommen x_1 und x_2 der beiden Gruppen berechnen. Das Ginimaß D_G ist in beiden Situationen gleich und es fällt auf, dass die Einkommen der Armen und Reichen[17] x_1 und x_2 in den beiden Situationen zwar nicht absolut gleich sind, wohl aber ist die Relation $x_2/x_1 = q_2h_1/h_2q_1 = h(1-q)/q(1-h) = 1+D_G/q(1-h) = 6{,}5$ gleich.

Es ist also nicht ganz so abwegig, wenn D_G trotz unterschiedlicher Gestalt der Lorenzkurve in A und B gleich groß ist.[18] Für D_G erhält man im Fall von nur zwei Gruppen mit $\bar{x} = h_1\bar{x}_1 + h_2\bar{x}_2$ und $h_1 = h$, $h_2 = 1-h$ auch

(4a) $$D_G = h\left(1-\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}}\right) = \frac{h(1-h)(\bar{x}_2-\bar{x}_1)}{\bar{x}}$$ weil $q = h_1\bar{x}_1/\bar{x}$ und $\bar{x} = h\bar{x}_1 + (1-h)\bar{x}_2$.

Das Konzentrationsmaß K_H hängt auch mit dem Variationskoeffizient $V = s/\bar{x}$ zusammen

(5) $$K_H = \frac{V^2+1}{n},$$ (5a) $V^2 = nK_H - 1$,

woraus auch folgt, dass K_H im Falle fehlender Disparität ($V = 0$) indirekt proportional ist zu n, also den reinen Anzahleffekt misst: steigt n dann sinkt K_H. Wie Gl. 2 zeigt, gilt genau das Gleiche auch für den Rosenbluth-Index K_R im Verhältnis zum Gini Koeffizient D_G; denn auch dort gilt bei $D_G = 0$ ist K_R einfach $K_R = 1/n$. Wir kommen darauf später (Abschn. 8) zurück

7. Differenzierung zwischen absoluter und relativer Konzentration mit "Axiomen"

Das unter Nr. 5 zitierte Lehrbuchbeispiel lief darauf hinaus, dass man nach Eintritt des fünften und kleinsten Unternehmens in einen Markt folgende Lorenzkurve hat

$h_1 = h = H$ $h_2 = 1-h$	$q_1 = q = Q$ $q_2 = 1-q$
$h = 0{,}2$	$q = 0{,}12$
$1-h = 4 \cdot 0{,}2 = 0{,}8$	$1-q = 4 \cdot 0{,}22 = 0{,}88$

In der *Ausgangssituation* ist $D_G = 0$, $K_H = K_R = 1/n = ¼$. *Nach Eintritt des fünften Unternehmens* (siehe nebenstehende Verteilung) gilt $D_G = 0{,}2 – 0{,}12 = 0{,}08$ und weil D_G über n mit K_R zusammenhängt $K_R = 1/5(1-0{,}08) = 1/4{,}6 = 0{,}2174 < 0{,}25$ (übrigens ist K_H auch gesunken von ¼ auf $K_H = 0{,}208$.

Also nimmt D zu und K ab. Noch krasser wäre die Situation, wenn ein fünftes Unternehmen kommt und zwar so dass jetzt alle fünf Unternehmen gleich groß sind ($q = 0{,}2$). Man hätte jetzt

H	Q
$h = 0{,}2$	$q = 0{,}2$
$1-h = 4 \cdot 0{,}2 = 0{,}8$	$1-h = 4 \cdot 0{,}2 = 0{,}8$

Es bleibt jetzt bei $D_G = 0$ (für D_G geht es ja um gleichgroß oder nicht-gleichgroß, die Anzahl n ist nicht wichtig) und $K_R = 1/n(1-D_G)$ vereinfacht sich bei $D_G = 0$ zu $K_R = 1/n$. Die Konzentration nimmt also ab von $K_R = 1/4$ zu $K_R = 1/5$.

Die Konzentration nimmt auch ab, wenn man sie mit dem Herfindahl-Index misst, denn $K_H = 5(0{,}2)^2 = 0{,}2$ ist kleiner als $K_H = 4(0{,}25)^2 = 0{,}25$. Wir haben hier (bei gleichbleibender Disparität von $D_G = 0$) mit K_H genau die gleiche Abnahme von $1/4 = 0{,}25$ zu $1/5 = 0{,}2$ wie mit K_R.

---

[16] Heiler u. Michels, S. 149.

[17] Man kann die Einkommen x_1 und x_2 der beiden Gruppen leicht berechnen aus $q_i = x_ih_i/\bar{x}$.

[18] Allerdings ist in diesem Beispiel von Heiler und Michels auch $q_A(1-h_A) = q_B(1-h_B) = 0{,}0665$. Es kann aber sehr wohl $h_A-q_A = h_B-q_B$ gelten und gleichwohl die Bedingung $q_A(1-h_A) = q_B(1-h_B)$ nicht erfüllt sein. Etwa $h_A = 0{,}7$, $q_A = 0{,}3$ $h_B = 0{,}6$ und $q_B = 0{,}2$. Dann ist zwar D_G in beiden Fällen 0,4, aber $q_A(1-h_A) = 0{,}09 \neq q_B(1-h_B) = 0{,}08$.

Dass sich mehr Gleichgroße (also eine reine Vergrößerung der Anzahl) auf K auswirkt, nicht aber auf D ist auch in der sog "Proportionalitätsprobe", einem der im Folgenden zu besprechenden Axiome, nämlich Axiom K_4 der Fall (besser: so postuliert).

In v. d. Lippe 1993 habe ich versucht, den Unterschied zwischen K und D Maßen mit den hier üblichen Axiomen zu erklären. Will man eine Unterscheidung von Klassen von Maßzahlen (beschreibenden Statistiken), wie hier K und D exakt deutlich machen, muss man auf Axiome zurückgreifen. Was sind "Axiome"? Es sind Gedankenexperimente der Art: wenn … dann sollte ein K-Maß (ein D Maß) … zu-/abnehmen/gleich bleiben. Axiome sind leider sehr abstrakt und werden deshalb meist ungern im Detail studiert und auch nur selten richtig verstanden. Es gibt, was K- und D-Maße betrifft drei Axiome K_1 bis K_3, bei denen gefordert wird, dass sie sich gleich verhalten sollen[19] und drei Axiome (K_4, K_5 und K_6), bei denen sie sich entgegengesetzt verhalten sollen. Wir betrachten vorrangig die drei Axiome K_4 bis K_6:

Axiom	Aussage	Bemerkung
K_4 **Proportionalität**	Ersetzt man jeden einzelnen Merkmalsträger i mit dem Anteil q_i am Merkmalsbetrag durch k > 1 gleich große Merkmalsträger mit den Anteilen q_i/k so soll **D gleich bleiben** (D* = D) und **K abnehmen** zu K* = K/k bei k >1 (Dekonzentration) und zunehmen bei Fusion von k Einheiten	Die Operation **verändert** nicht die Ungleichheit unter den Einheiten, sondern **nur die Anzahl**. Das ist völlig klar, wenn der Ausgangspunkt $D_G = 0$ ist (es bleibt eine Gleichverteilungsgerade als Lorenzkurve).
K5 **Nullergänzung**	Fügt man der Verteilung m Einheiten mit Merkmalsbeträgen von jeweils 0 (m sog. "Nullträger") hinzu, so soll **K gleich bleiben** (K* = K) und **D zunehmen** D* > 0	Das Axiom **operationalisiert** die **Vergrößerung der Ungleichverteilung** durch Hinzukommen von mehr und mehr "Nullträgern"
K6 Wertebereiche	$0 \leq D \leq 1- 1/n$ und $1/n \leq K \leq 1$ Es gibt bei D eine von n abhängige Obergrenze (aber keine von n abhängige Untergrenze) und bei K eine von n abhängige Untergrenze (aber keine von n abhängige Obergrenze)	Wenn alle gleich sind (D = 0) spielt es für D keine Rolle, wie viele Einheiten es sind, die alle gleich sind und wenn einer den Markt beherrscht (K = 1), spielt es keine Rolle, wie viele sonst noch am Markt sind.

Es ist nicht schwer, die Geltung der Axiome bei den gängigen Maßen für K und D zu verifizieren. Das Beispiel von Neubauer et al. geht aus von der Situation n = 4 und $D_G = 0$ wobei jede Einheit einen Anteil von 0,25 hat. Die Proportionalitätsprobe mit k = 2 führt zu n = 8 Einheiten mit $q_1 = \ldots = q_8 = 0{,}125$. Es ist klar, dass $D_G = 0$ bleibt und der Marktanteil der zwei größten Einheiten C_2 von 0,5 auf 0,25 zurückgeht. Auch Axiom K_4 ist offensichtlich erfüllt. Fügt man im Sinne von K_4 als fünfte Einheit einen "Nullträger" ($q_5= 0$) hinzu, bleibt K_H gleich und D_G wird 0,8.

Dass sich im Sinne des Axioms K5 eine zunehmende Ungleichverteilung durch Hinzukommen von Nullträgern erzeugen lässt besagt auch, dass man bei empirischen Untersuchungen Nullträger (q = 0) oder Merkmalsträger mit nur geringem Anteil q an der Merkmalssumme nicht einfach unter den Tisch fallen lassen darf, denn man unterschätzt damit "automatisch" die Disparität:[20]

> "Zum Zeitpunkt t = 1 gebe es 98 'kleine' und 2 sehr 'große' Unternehmen … Zum Zeitpunkt t = 2 sind alle 98 'Kleinen' von den 2 'Großen' aufgekauft. Diese sind hinterher gleichgroß, welches zu einer Konzentration von Null führt. Um solche Fehlschlüsse zu vermeiden, sollten ausgeschiedene Merkmalsträger mit Merkmalsausprägungen Null weitergeführt werden."

[19] Darunter fällt auch ein Axiom, das deutlich auf Verteilung und Umverteilung anspielt, nämlich K_2 (Transfer): Bei einem regressiven (egalisierenden) Transfer eines Betrags d von reich zu arm soll sowohl K als auch D abnehmen und bei einem Transfer von d von arm zu reich sollte nicht etwa nur die Disparität, sondern auch die absolute) Konzentration zunehmen. Es wäre also *nicht richtig* zu sagen: D hat mit Verteilung und Umverteilung zu tun, K nicht; denn bei D *und* K geht es (auch) um die Verteilung des "Kuchens".

[20] Im folgenden Zitat von Heiler u. Michels, S. 149 ist zwar von Konzentration die Rede, es ist aber relative Konzentration, also Disparität gemeint. Absolute Konzentration kommt in dem Buch nicht vor.

Führt man die 98 Nullträger weiter, neben den zwei jetzt gleich großen 'Großen' ist $D_G = h - q = 0{,}98 - 0 = 0{,}98$; rechnet man dagegen nur mit den beiden verbliebenen gleich großen 'Großen' ist $D_G = 0$. Mit einem weiteren Beispiel wollen wir zeigen, dass sich auch unter allgemeineren Bedingungen K und D gegenläufig entwickeln können. Die Ausgangssituation sei n = 6 Einheiten mit x-Werten von 5, 5, 15,20, 25 und 30, so dass $\Sigma x = 100$ ist und die Anteile q_i leicht zu bilden sind (0,05, 0,05, 0,15, 0,2, 0,25 und 0,3):

	Beschreibung (was fällt weg)	n	Σx	absolute Konz. (K)			Dispar.(D)
				C_2	$K_H = \Sigma q^2$	K_R	D_G
1	Ausgangssituation	6	100	0,5500	0,2200	0,2439	0,3166
2	die kleinste Einheit fällt weg	5	95	0,5789	0,2410	0,2676	0,2526
3	die beiden kleinsten Einheiten	4	90	0,6111	0,2654	0,2903	0,1389
4	die größte Einheit	5	70	0,6429	0,2653	0,2917	0,3143
5	die beiden größten Einheiten	4	45	0,7778	0,3333	0,3601	0,3057

Farbcode	leichte Zunahme	starke Zunahme	leichte Abnahme	starke Abnahme

Wegen der Einschrankung $0 \leq D_G \leq 1 - 1/n$ gibt es auch den Vorschlag mit $\tilde{D}_G = \frac{n}{n-1} D_G$ einen auf den Wertbereich von 0 bis 1 normierten Gini-Koeffizienten zu berechnen.[21]

8. Disparität misst eine Dimension, absolute Konzentration zwei Dimensionen und das Konzept "gleichmäßig normierter Maße"

Führt man das normierte Quadrat des Variationskoeffizienten [22]

(6) $\tilde{V}^2 = \frac{V^2}{V^2 + 1}$ (da $0 \leq V^2 \leq n-1$ gilt $0 \leq \tilde{V}^2 \leq 1 - 1/n$, so dass $\tilde{V}^2$ auf den Wertebereich von D_G normiert ist) und nennt 1 – D ein Gleichheitsmaß G, im Falle D_G also $G_G = 1 - D_G$, von $\tilde{V}^2$

(6a) $G_V = 1 - \tilde{V}^2 = \frac{1}{V^2 + 1}$,

dann erhält man wegen $V^2 = nK_H - 1$ für K_H und G_V mit

(5b) $\boxed{K_H = \frac{V^2 + 1}{n} = \frac{1}{nG_V}}$ einen Zusammenhang ganz analog zu

(2a) $\boxed{K_R = \frac{1}{n(1 - D_G)} = \frac{1}{nG_G}}$, woraus für je zwei Zustände folgt $\frac{K_{R2}}{K_{R1}} = \frac{n_1 G_{G1}}{n_2 G_{G2}}$.

Der Herfindahl-Index K_H und das normierte Quadrat des Variationskoeffizienten $\tilde{V}^2$ sind ein Paar "gleichmäßig normierter Maße", so wie es auch der Rosenbluth-Index K_R und Ginis Koeffizient D_G sind. In solchen Fällen gilt $K = (nG)^{-1}$ und man kann zwei Konzentrationszustände K_1 und K_2 in bezug auf Anzahleffekt (n_1/n_2) und Disparitätseffekt (G_1/G_2) gut vergleichen; denn[23]

(7) $\log(K_2/K_1) = \log(n_1/n_2) + \log(G_1/G_2)$.

Wir betrachten noch einmal das vorangegangene Beispiel mit verschiedenen Situationen s

[21] Vgl. Heiler u. Michels, a.a.O., S. 148.
[22] Mehr zur folgenden Betrachtung vgl. v. d. Lippe, Deskriptive Statistik, S. 170 und 183.
[23] $\log(K_1/K_2) = -\log(K_2/K_1)$. Gl. 7 zeigt auch dass K zunimmt ($K_2 > K_1$) wenn die Anzahl n abnimmt $n_2 < n_1$, also $n_1/n_2 > 1$ und/oder die Gleichheit abnimmt $G_2 < G_1$ ($G_1/G_2 > 1$) bzw. Disparität zunimmt (denn $D_2 = 1 - G_2$ ist größer als $D_1 = 1 - G_2$ wenn $G_2 < G_1$ ist). Die partiellen Ableitungen von K sind $\partial K/\partial n = -G^2/n$ und $\partial K/\partial G = -n^2/G$ zweigen also jeweils eine abnehmende negative Steigung.

s	K_{Ri}	K_{Ri}/K_{R1}	$\log(K_{Ri}/K_{R1})$	n_i	n_1/n_i	$\log(n_1/n_i)$	$G_{Gi} = 1 - D_{Gi}$	G_1/G_i	$\log(G_1/G_i)$
2	0,2676	1,0972	0,0402743	5	1,2	0,0792	0,7474	0,9144	- 0,0389
3	0,2903	1,1902	0,0756352	4	1,5	0,1761	0,8611	0,7936	- 0,1004
4	0,2917	1,1958	0,077658	5	1,2	0,0792	0,6851	0,9966	- 0,0015
5	0,3601	1,4764	0,1692113	4	1,5	0,1761	0,6943	0,9843	- 0,0068

*) $G_{G1} = 1 - D_{G1} = 0{,}6834$

Wie es bereits aus der vorangegangenen Tabelle ersichtlich war, haben wir es bei den Situationen s = 2 bis s = 5 mit einer Zunahme der Konzentration zu tun, die ganz überwiegend einer Abnahme von n (Zunahme von n_1/n_i), also dem Anzahleffekt zu verdanken ist, dann aber und von einer Zunahme der Gleichheit G_i gegenüber G_1 (= Abnahme von D_i gegenüber D_1) konterkariert wurde[24] (was nicht überrascht, weil ja jeweils Einheiten am unteren bzw. oberen Ende der Verteilung wegfielen). Man kann das Konzept gleichmäßig normierter Maße auch noch einmal an dem einfachen Beispiel von Abschn. 7 demonstrieren:

	Rosenbluth und Gini			Herfindahl u. Variat.koeff.		
	D_G	G_G	K_R	$\tilde{V}^2$	G_V	K_H
vier gleich große Einh. $_{qi} = 0{,}25$	0	1	1/4	0	1	1/4
$q_1 = \ldots = q_4 = 0{,}22$, $q_5 = 0{,}12$	0,08	0.92	1/4,6$^{a)}$	1/26	25/26	0,208$^{d)}$
$q_1 = q_2 = q_3 = 0{,}2$ $q_4 = 0{,}1$ $q_5 = 0{,}3$	0,16	0,84	1/4,2$^{b)}$	0,091	0.909$^{e)}$	0,22
fünf gleich große Einh. $q_i = 0{,}2$	0	1	1/5 $^{c)}$	0	1	1/5

$^{a)}$ $K_R = 0{,}2174$: 4,6 = 5·0,92 (< ¼ = 0,25 weil n größer [um 25%] und Gleichheit geringer [um 8%] geworden ist)
$^{b)}$ $K_R = 0{,}2381$ (> 0,2174 weil Gleichheit geringer geworden ist) 4,2 = 5·0,84
$^{c)}$ $K_R = 0{,}2$ das ist 84% von 0,2381 (weil bei gleichem n = 5 die Gleichheit von 0,84 auf 1 zugenommen hat)
$^{d)}$ = 26/125 $^{e)}$ $1/G_V = 1{,}1$ und 1/n= 0,2 dann ist $K_H = 0{,}22$ auch 1,1·0,2

Aus diesen Überlegungen folgt:

K wird als Maß der absoluten Konzentration von zwei Einflüssen bestimmt, *von der* absoluten *Anzahl n* ***und*** *der Disparität* D (bzw. *Gleichheit G= 1 - D*). Je kleiner n und G desto größer K. Bei gegebener Anzahl n = n_0 von Einheiten ist die Macht der größten der n_0 Einheiten dann am größten, wenn die Gleichheit am geringsten (Disparität am größten) ist; und sie ist dann gering, wenn der Unterschied zu den übrigen n_0 -1 Einheiten gering ist (die Gleichheit also groß ist).

Der sehr plausible Gedanke ist also, dass K in dem Maße größer wird, in dem n (z.B. durch Ausscheiden von Einheiten) und G geringer (z.B. durch einen größeren Anteil der großen Einheiten) werden. Beide Einflüsse können sich gegenseitig verstärken, aber auch entgegengesetze Richtung wirken.[25]

Dass K auch von Aspekten der Disparität beeinflusst wird, ist auch daran zu sehen, dass – wie gesagt – ein D- und auch ein K-Maß auf einen mit Axiom K_2 (Transfer) beschriebenen typischen Umverteilungsvorgang gleich reagieren soll. Es wäre also *nicht richtig* zu sagen: D hat mit Verteilung und Umverteilung zu tun, aber K nicht; denn sowohl bei D als auch bei K geht es (auch) um die *Verteilung* eines "Kuchens" (Gesamtmerkmalsbetrag) auf Einheiten.

Im Folgenden werden einige Probleme der inhaltlichen Interpretation angesprochen und wir nehmen deshalb auch Bezug auf K- und D Betrachtungen in empirischen Studien.

9. Aus K und D abzuleitende Handlungsanweisungen (operativer Nutzen der Maße)

Um auf die Untersuchung über die Belastung durch statistische Befragungen zurückzukommen (vgl. Abschn. 5), d.h. auf die Arbeit von Vorgrimler et al., so haben wir dort nicht nur typische K- Betrachtungen, sondern auch mit der Berechnung von Gini Koeffizienten D_G und der gra-

---

[24] Das war vor allem in Situation 3 der Fall¸ denn eigentlich hättet ja der Anzahleffekt (wegen der Abnahme von n = 6 auf n = 4) ähnlich stark zu Buche schlagen müssen wie in Situation 5.

[25] Es heißt deshalb ganz richtig bei Degen u. Lorscheid S. 47: "Zwischen beiden Arten der Konzentration [durch Ausscheiden und durch Zunahme der Disparität] besteht kein direkter Zusammenhang. Sie können unabhängig voneinander auftreten."

phischen Darstellung von Lorenzkurven typische D- Betrachtungen. Interessant sind bei dieser Untersuchung aber auch inhaltliche Fragen.

In der Arbeit kommt als "Kuchen" (Gesamtmerkmalsbetrag) die Belastung durch Befragungen der amtlichen Statistik mit einem Gesamtaufwand von 355.1 Mill. € vor, verteilt auf 188 Statistiken als Einheiten. Wie wichtig die Frage nach dem Gesamtmerkmalsbetrag und den Einheiten ist, wird deutlich, wenn man sich fragt, welche Folgerungen man in puncto "Statistikbereinigung" aus den empirischen Ergebnissen ziehen kann und will:

> Soll man bei den 188 – 50 = 138 "kleinen" Statistiken, die nur 3% zur "total burden" beitragen, beginnen, was D, aber nicht K senken würde, oder soll man bei den "großen" Statistiken beginnen, was sowohl D als auch K senken würde, *wenn* denn dadurch überhaupt der Kuchen insgesamt gleich groß bliebe (was aber nicht der Fall sein dürfte, denn er wird durch Wegfallen v.a. der großen Statistiken kleiner, was es dann aber auch wieder unsicher macht, ob wirklich K und D abnehmen werden)?

Was das Konzentrationsmerkmal betrifft, so ist es hier die in Geld ausgedrückte Belastung der Befragten. Aber ist das das richtige Kriterium? Wäre das Kriterium nicht viel mehr eine –wie immer gemessene – Wichtigkeit der Statistik?

Dass von einem "Kuchen" unterschiedlich große Stücke abgeschnitten werden können, ist im Allgemeinen klar. Wichtig – und oft gar nicht so klar – ist aber, *wessen* Stücke das sind, was also im konkreten Fall die "richtigen" Einheiten sein sollten.

> Die Frage ist doch, was mehr von Interesse ist, dass unterschiedlich große Stücke vom Kuchen auf die 188 sehr verschiedenen *Statistiken* (Erhebungen) fallen, oder dass die *Befragten* mit unterschiedlich großen Stücken belastet werden, ob also x% *der Befragten* (Personen, Betriebe) y% von den 355.1 Mill. € zu schultern haben; denn viele Personen, bzw. Betriebe sind von keiner, andere aber gleich von mehreren Erhebungen betroffen.

Daraus folgt, dass man bei jeder Messung von K und von D überlegen muss, ob man Konzentrationsmerkmal x (das verteilt wird) und Einheiten (auf die x verteilt wird) richtig gewählt hat. Ein anderes inhaltliches Problem betrifft die Referenzverteilung bei K bzw. D = 0.

10. Minimale Disparität, Gleichheit und Gerechtigkeit

Vor allem zwei Einwände wurden im Falle der Einkommens- und Vermögensverteilung, dem "klassischen" Anwendungsgebiet für Disparitätsmessung gegen D-Maße gemacht:

1. Mit Axiom K_1 wird gefordert, dass die Messung von D (und auch von K) invariant ist gegenüber proportionalen Transformationen[26] des Konzentrationsmerkmals $y_i = bx_i$ ($b \neq 1$) was erfüllt ist, *weil es nur auf Anteile, nicht auf die absolute Größe von x bzw. y ankommt*;
2. Minimale Disparität (Gini-Koeffizient $D_G = 0$) bedeutet zwar Gleichheit aller x_i,[27] (also $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$) aber ist das auch gleichzusetzen mit "Gerechtigkeit"? Ist also die Einpunktverteilung die richtige Referenzverteilung für D = 0 oder gar für "Gerechtigkeit"?

Zu 1 (absolutes Niveau des Konzentrationsmerkmals): Gegen Axiom K_1 wonach eine *proportionale Transformation* $y_i = bx_i$ bei $b \neq 1$ sowohl K als auch D nichtverändern darf (so dass $K_y = K_x$ und $D_y = D_x$) wurde eingewendet,[28] dass b > 1 die Ungleichheit erhöht, weil sich damit ja auch die *absoluten* Einkommensunterschiede erhöhen zu $\Delta y = y_2 - y_1 = b(x_2 - x_1) = b\Delta x$ so dass $\Delta y > \Delta x$, ist. Kolm 1976 nannte ein D-Maß, für das Axiom K_1 gilt, "rightist" und eines,

---

[26] Es wird nicht gefordert, dass sie invariant sind gegenüber *linearen* Transformationen $y_i = a + bx_i$, denn K *und* D sollen nach K_3 auf eine Verschiebung der Verteilung nach links (a < 0) oder rechts (a > 0) reagieren.

[27] Ich kenne kein Disparitätsmaß D, bei dem D = 0 in einer anderen Situation als Einpunktverteilung auftritt.

[28] S. Ch. Kolm (1976). Die meisten D-Maße, sind nach Kolm "rightist", weil sie K_1 erfüllen, während in "leftist"-Maßen auch die absolute Höhe der Konzentrationsvariable x eingeht. Ähnlich weist Shorrocks 1983 darauf hin, dass die Disparität in Schweden größer ist als in Indien, Indonesien, Kenia oder Tansania und das, obgleich das Durchschnittseinkommen in Schweden gut zehnmal so hoch ist wie in den genannten Ländern.

dass auch den Größenunterschied zwischen Δy und Δx widerspiegelt (also Axiom K_1 nicht erfüllt) "leftist". Ganz generell kann man sich natürlich auch fragen, ob man mit einem Disparitätsmaß, bei dem das absolute Niveau, also die Höhe des Durchschnittseinkommens praktisch keine Rolle spielt (mit K_1 soll ja gerade die Unabhängigkeit vom Niveau sichergestellt werden) wirklich die "Ungleichheit" oder gar die "Ungerechtigkeit" misst.

Shorrocks 1983 wies darauf hin, dass die Disparität in Schweden größer ist als in Indien, Indonesien, Kenia oder Tansania, und das obgleich das Durchschnittseinkommen in Schweden gut zehnmal so hoch ist wie in den genannten Ländern und die Einkommen im ersten Dezil in Schweden im Schnitt höher sind als die der 5% oder gar 1% Reichsten in den verglichenen Ländern. Es fragt sich also, ob in einem Disparitätsmaß, nicht doch irgendwie das absolute Niveau, also die Höhe des Durchschnittseinkommens $\bar{y}$ eine Rolle spielen sollte.

zu 2 (gleiche Einkommen oder gerechtfertigte Unterschiede): Auch Morton Paglin 1975 hat eine Diskussion über die Gleichverteilung der Einkommen als Referenzlinie für die minimale Disparität von D = 0 ausgelöst. Nicht weil in D das Niveau von x (die Größenordnung in der sich die x-Werte bewegen) keine Rolle spielt, sondern weil es für ihn nicht Ausdruck einer vermeidbaren, möglichst zu beseitigenden (politikrelevanten) Ungleichheit ist, wenn z.B. ein 15-jähriger Schüler weniger Einkommen hat als ein 40-jähriger Erwerbstätiger. Es ist – so Paglin – nicht als "gerecht" anzustreben, dass beide gleich viel verdienen.

Die Referenzlinie für die Lorenzkurve kann also nicht die "Gleichverteilungsgerade" sein, sondern quasi die "altersgerechtfertigte" und entsprechend modifizierte Lorenzkurve, also die Kurve (H_1,G_1), (H_2, G_2),…(1,1) worin die Subskripte Altersklassen und die G_i die kumulierten jeweils angesichts des Alters *zu erwartenden* Anteile am Gesamteinkommen sind (im Unterschied zu den *tatsächlichen* Anteilen Q_i). Der Bezugspunkt ist also nicht gleiches Einkommen für alle, sondern gleiches Einkommen wie es die Altersklasse im Durchschnitt hat, zu der man gehört.

Paglins Lösung besteht darin, dass sich quasi zwischen "Gleichverteilungsgerade" (G) und (der traditionellen) Lorenzkurve (L) noch eine Alters-Lorenzkurve (A) schiebt und nicht die Fläche zwischen L und G als Maß der Disparität gilt, sondern die kleinere Fläche zwischen L und A. Diese Lösung kann aber aus zwei Gründen nicht befriedigen:

1. weil der Unterschied zwischen den beiden Kurven dann verschwindet, wenn z.B. die Daten nicht in Größenklassen nach dem Alter eingeteilt sind, sondern als individuelle Daten (Einzelbeobachtungen) vorliegen, d.h. auch Unterschiede zwischen Einheiten der gleichen Altersgruppe zum Tragen kommen, und weil
2. man argumentieren kann, dass es neben dem Alter viele andere Ungleichheit rechtfertigende Gründe gibt, wie Bildung, Erwerbsbeteiligung und Dauer der Berufsausübung, ja sogar Wohnort und Geschlecht. Aber wenn man die "Gleichverteilung" hinsichtlich aller (!) solcher Ungleichheit rechtfertigender Faktoren korrigiert, was bleibt dann noch als "echte" Disparität übrig?

Es wäre im Grunde nötig, zu unterscheiden (und schön, wenn man es könnte)

- Unterschiede, die in *Voraussetzungen* begründet sind, wie Alter, Ausbildung usw. und die *nicht ungerecht* und auch nicht zu beseitigen sind und
- *politikrelevante* (also einen Ausgleich erfordernde) Unterschiede ("residual inequalities") zwischen Personen, die die gleichen Voraussetzungen mit sich bringen.

Ein gutes Disparitätsmaß sollte nur Unterschiede der zweiten Art messen und alle Unterschiede der ersten (d.h. der "erklärten" oder "gerechtfertigten") Art eliminieren.

Aber das ist natürlich leichter gesagt als getan. Man denke an Unterschiede im Einkommensniveau zwischen Voll- und Teilzeitbeschäftigten. Ist Teilzeitbeschäftigung immer eine freie Wahl und die Geringerbezahlung deshalb nicht ungerecht, oder ist sie nicht auch oft ungewollt, also Ausdruck ungerechter Benachteiligung? Hinzu kommt, dass es schwer ist, zu entscheiden, wann man genug "Voraussetzungen" berücksichtigt hat. Wenn man es nur weit genug treibt, dann wäre am Ende jede Disparität von D > 0 nur Ergebnis einer unzureichenden Eliminierung von Ungleichheit "erklärenden" (oder rechtfertigenden) Faktoren in den Daten.

Statt die Disparität wegzudiskutieren, indem man mehr und mehr Faktoren eliminiert, die systematisch Ungleichheit erzeugen (oder von denen man annimmt, dass sie dies tun)[29], dürfte es vielleicht klüger sein, ein Disparitätsmaß zu verwenden, das additiv zerlegbar ist in Komponenten, die z.B. auf die Unterschiedlichkeit des Alters oder andere Faktoren zurückzuführen sind. Man könnte dann nach Art der Varianzanalyse zwischen "erklärter" und "residualer" Disparität unterscheiden. Alle auf dem im nächsten Abschnitt behandelten Konzept der Entropie beruhenden Maße haben in dieser Hinsicht große Vorteile. In der empirischen Anwendung gibt es jedoch Probleme, nicht nur weil solche Maße nicht sehr anschaulich sind, sondern auch weil das Ausmaß ihrer Veränderung selbst wieder in Komponenten zu zerlegen ist. Man erhält dann sehr schnell sehr viele Zahlen, deren Aussage schwer zu interpretieren ist

11. Additiv zerlegbare Maße der Konzentration

Es gibt gute Gründe ein Konzentrationsmaß zu verwenden, das additiv in Komponenten zerlegbar ist, die z.B. auf die Unterschiedlichkeit des Alters oder anderer Faktoren zurückzuführen sind und es erlaubt, ganz nach Art der Varianzanalyse zwischen "erklärter" (between) und "residualer" (within) Konzentration zu unterscheiden. Ein zu einer solchen Dekomposition geeignetes Maß für die *absolute* Konzentration K ist die Entropie

(8) $$K_E = = \sum q_i \operatorname{ld}(1/q_i) = -\sum q_i \operatorname{ld}(q_i),$$

mit dem logarithmus dualis ld(x) = log(x)/log(2). Bei maximaler Konzentration ($c_1 = q_n = 1$) ist $K_{E(max)} = 0$ wegen log(1) = 0 und bei egalitärer Verteilung $q_i = 1/n\ \forall i$ ist $K_{E(min)} = \Sigma(1/n)\operatorname{ld}(1/n) = n(1/n)\operatorname{ld}(1/n) = \operatorname{ld}(n)$, weshalb K_E eher als Maß der Dekonzentration angesprochen werden kann und H. Theil eine Lineartransformation von K_E als "relative Redundanz" vorschlug

(8a) $$K_T^* = \frac{\operatorname{ld}(n) - K_E}{\operatorname{ld}(n)} = 1 - \frac{K_E}{\operatorname{ld}(n)} \text{ mit } 0 \le K_T^* \le 1$$ (0 bei $K_{E(min)} = \operatorname{ld}(n)$ und 1 bei $K_{E(max)} = 0$).

Angenommen, es gäbe zwei Gruppen mit $n_1 = 2$ und $n_2 = 3$ Einheiten und (mittleren) Gruppenanteilen g_1 und g_2 (an der Stelle der q_i) dann wäre

$$K_E = [q_{11}\operatorname{ld}(1/q_{11}) - q_{11}\ln(1/g_1) + q_{12}\operatorname{ld}(1/q_{12}) - q_{12}\ln(1/g_1)] +$$
$$+ [q_{21}\operatorname{ld}(1/q_{21}) - q_{21}\ln(1/g_2) + q_{22}\operatorname{ld}(1/q_{22}) - q_{22}\ln(1/g_2) + q_{23}\operatorname{ld}(1/q_{23}) - q_{23}\ln(1/g_2)]$$
$$+ (q_{11} + q_{12})\ln(1/g_1) + (q_{21} + q_{22} + q_{23})\ln(1/g_2),$$

und dann bezeichnen die ersten beiden Zeilen Entropien *innerhalb* (within) der beiden Gruppen $K_{E(w1)} + K_{E(w2)}$ und die dritte Zeile die Entropie *zwischen* (between) den Gruppen $K_{E(b)}$. Die Zerlegungsformel wäre also bei i = 1, … , m Gruppen mit je j = 1, … , n_i Einheiten

(8b) $$K_E = \sum_i \sum_j \left[q_{ij}\operatorname{ld}(1/q_{ij}) - q_{ij}\operatorname{ld}(1/g_i)\right] + \sum_i \left(\sum_j q_{ij}\right)\operatorname{ld}\left(1/g_i\right) = K_{E(W)} + K_{E(B)}$$

12. Messung des s Spezialisierungsgrads eines Krankenhauses

Nach Lindlbauer und Schreyögg (2014)[30] ist die Messung des Grads der Spezialisierung eines Krankenhauses und der Zusammenhang zwischen diesem Spezialisierungsgrad (S) und der Pro-

---

[29] Ein solches Vorgehen ist nicht wirklich tragfähig. Wir haben den Versuch, am Bedarf orientierte, "gerechtfertigte" Unterschiede zu berücksichtigen, z.B. auch bei der Konstruktion von Äquivalenzskalen oder allgemein von "Normeinkommen" (wie hoch sollte das Einkommen sein bei Berücksichtigung der Haushaltsgröße usw.?). Das mag sicher besser sein als explizit oder implizit zu fordern, dass jeder Haushalt ein gleich großes Einkommen haben sollte. Aber auch hier gibt es Probleme der praktischen Durchführung und kein Ende, wenn man sich fragt, was ein Normeinkommen alles berücksichtigen sollte und wie es das jeweils tun könnte.

[30] Im Folgenden kurz L+S.

duktivität (technischen Effizienz) von Krankenhäusern ein aktuell viel diskutiertes Problem. Die Autoren setzen sich mit drei schon früher in der Literatur diskutieren S-Maßen auseinander, die sie medical specialization (MS) measures nennen und entwickeln zwei neue S-Maße (die sie case-mix specialization (CM) measures nennen).

Interessant ist, dass auch hier in der wissenschaftlichen Literatur zu diesem Thema, die L+S Revue passieren lassen, für ein und die gleiche Fragestellung, d.h. der Messung der Spezialisierung sowohl Maße der Konzentration (K), wie der Herfindahl Index K_H, als auch der Disparität (D), wie der Gini-Koeffizient D_G vorgeschlagen wurden.[31] Das zeigt erneut, dass es doch offenbar sehr schwer ist, K- und D-Maße voneinander abzugrenzen.

Ein Kranker wird sich i.d.R. das Krankenhaus aussuchen, von dem er weiß, dass es viel Erfahrung mit der Behandlung gerade seiner speziellen Krankheit k_i hat, weil er davon ausgeht, dass er dann dort gerade bei seiner Krankheit auch mit mehr Kompetenz und Erfahrung rechnen kann, die er ja vor allem dann erwartet, wenn das Krankenhaus

- nur wenige Leistungen (im Extremfall nur eine) einer möglichen Produktpalette k_1, k_2, …, k_n anbietet und wenn es
- diese spezielle Leistung schon sehr oft (bei vielen Patienten) erbracht hat.

Das spricht dafür, bei der Messung des Grads der Spezialisierung an ein Maß der *absoluten* Konzentration zu denken. Aber in der Literatur wurden – wie gesagt – auch andere Maße wie D oder solche, die weder als D oder K Maße zu verstehen sind, untersucht.[32]

Fragen nach dem Konzentrationsmerkmal und den Einheiten sowie nach der Sinnhaftigkeit der Extremsituationen von 0 und 1 bei K bzw. D = 0 stellen sich auch hier bei der Messung der Spezialisierung eines Krankenhauses. Üblich ist es, als Einheiten "Diagnosis Categories"[33] DCs (oben k_1, k_2, …, k_m) und als Konzentrationsmerkmal die Patientenzahl zu wählen. Es mag angemessen sein, dann von einer "*maximalen* Spezialisierung" zu sprechen, wenn sich ein Krankenhaus auf nur ein Produkt (also eine DC) spezialisiert. aber

- wie müsste die "*minimale* Spezialisierung" (oder maximale Diversifikation) aussehen
- und gibt es überhaupt eine solche "gegebene" Produktpalette mit einer endlichen Zahl von m Produkten k_1, k_2, …, k_n?

Allen Maßen der Konzentration (K und D) ist gemeinsam, dass ihnen die gleichen klar definierten extremen Verteilungen des Konzentrationsmerkmals bei K_{min} und D_{min}, bzw. bei K_{max} und D_{max} zugrundeliegen. Bei der "Spezialisierung" besagt dies bei den ❶ Einheiten (n DCs), und beim ❷ Konzentrationsmerkmal (der Patientenzahl Σx_i):

Speziali-sierung	Beschreibung der Situation	K	D
maxi-mal	❶ von einer gegebenen Zahl m von Aktivitäten (DCs) widmet sich das Krankenhaus nur einer einzigen; ❷ alle Patienten sind Patienten dieser DC	$K_H = 1$	$D_G = 1\text{-}1/n$
mini-mal	es dürfte schwer sein, einen Begriff für *minimale* Spezialisierung zu finden ("Allround-Krankenhaus"?). Minimal heißt ❶ das "Gewicht" jeder Aktivität ist 1/m und ❷ gleich viele Patienten bei jeder der m DCs *	$K_H = 1/n$	$D_G = 0$

* Der Aspekt gleich vieler Patienten bei jeder DC im Fall minimaler Spezialisierung dürfte einen Kranken weniger interessieren als der Aspekt einer geringen Zahl von DC's. Auch das spricht für die Verwendung von K-Maßen bei Messung der "Spezialisierung".

[31] Es macht die Sache nicht leichter, dass es – wie gesagt – auch Axiome gibt, nach denen K und D gleich "reagieren" sollen. So müssen z.B. beide gleichermaßen nach Axiom K_1 unabhängig sein von der absoluten Patientenzahl (als Maß der Größe des Krankenhauses) sein.

[32] Letzteres dürfte wohl für die von L+S ins Spiel gebrachten CM Maße gelten.

[33] L+S gehen von 22 zufällig ausgewählten Positionen aus der International Statistical Classification of Diseases and Related Health Problems (ICD) als DCs aus

Will man ein Konzept messen, bei dem es nicht plausibel wäre, eine der extremen Verteilungen (oder beide) zu postulieren, wenn man vom Minimum oder Maximum beim zu messenden Konzept spricht,[34] dann kann man auch die traditionellen Maße der Konzentration nicht benutzen. Eine Möglichkeit könnte dann ein Maß sein, in dem nicht auf eine der extremen Verteilungen Bezug genommen wird und das in "Komponenten" zerlegt werden kann. Auch so etwas ist in einer der von L+S referierten früheren Studien geschehen in Gestalt des Maßes.

$$ITI_i = \sum_j p_{ij} \ln\left(\frac{p_{ij}}{\theta_j}\right) = \sum_j p_{ij} \ln\left(\frac{1}{\theta_j} : \frac{1}{p_{ij}}\right)$$

mit einer Referenzstruktur θ (bezüglich der Patientenanteile p), wobei das Maß ITI jedoch deutlich anders konstruiert ist als die Entropie in (8b) mit den Anteilen q und g.

Es ist hier nicht der Ort, sich weiter mit Einzelheiten vorgeschlagener Spezialisierungsmaße zu beschäftigen. Wir gehen insbesondere nicht auf die von L+S ins Spiel gebrachten CM Maße ein, in denen es in Zähler und Nenner um Anzahlen $m \leq n$ von DCs geht, die also weder K noch D Maße im "klassischen" Sinn darstellen.[35]

Nach unserer Überzeugung passen K Maße besser zum Konzept "Spezialisierung" als D Maße; denn bei "Spezialisierung" dürfte es primär darauf ankommen, sich auf einen kleinen Teil (bzw. eine kleine *Anzahl*) von Produkten einer möglichen Produktpalette zu beschränken und weniger (jedenfalls nicht ausschließlich, wie bei D-Maßen) darauf, ob die Merkmalssumme (hier Patientenzahl) sich gleich oder sehr ungleich *verteilt* auf die Aktivitäten (DCs). Ein K-Maß wird – wie gesagt – von zwei Einflüssen bestimmt, dem *Anzahleffekt* der n DCs und dem *Verteilungseffekt*, während für ein D-Maß nur der Verteilungsaspekt relevant ist d.h. die Ungleichheit der Anteile der Einheiten untereinander am Merkmalsbetrag (an der Patientenzahl).[36] Ein Krankenhaus ist hochgradig spezialisiert, wenn es nur Patienten von einer DC oder nur von einigen wenigen DCs hat. Umgekehrt ist ein Krankenhaus dann wenig spezialisiert, wenn es Patienten vieler verschiedener Diagnosearten (DCs) hat, wobei es weniger wichtig sein dürfte, ob es bei jeder der vielen DCs auch gleich viele oder ungleich viele Patienten sind (was besonders D betrifft).[37]

Literatur

Degen H. u. P. Lorscheid (1994), Statistik- Aufgabensammlung, München (Oldenbourg)

Heiler S. u. P. Michels (1994), Deskriptive und Explorative Datenanalyse, München (Oldenbourg)

Kolm, S. Ch., (1976), Unequal Inequalities I, Journal of Economic Theory, 12, S. 416 ff

Lindlbauer, I u. J. Schreyögg (2014), The relationship between hospital specialization and hospital efficiency: do different measures of specialization lead to different results? in: Health Care Management Science, Vol. 17/4, , pp. 365 - 378

---

[34] Eine "maximale Spezialisierung" scheint mir eher Sinn zu machen als eine "minimale Spezialisierung".

[35] Es stimmt jedoch nachdenklich, dass sich in allen simulierten Szenarien bezüglich mehr oder weniger Spezialisierung bei den Monte Carlo Studien die von L+S vorgeschlagenen case-mix specialization (CM) Maße anders verhalten als die vier untersuchten bisherigen medical specialization (MS) Maße. Es fragt sich dann, ob mit den CM Maßen auch das gleiche Konstrukt gemessen wird, wie mit den MS Maßen und inwieweit dies für den empirischen Befund der Autoren verantwortlich ist, wonach Spezialisierung in einer diametral entgegengesetzten Relation zur Effizienz steht, als dies bisher üblicherweise angenommen wurde.

[36] Aber die Anzahl dürfte bei K_{min} (minimale Spezialisierung") schon rein begrifflich ein Problem sein, zumal sie von n abhängt, was ja eine zufällige Auswahl aus de ICD ist (vgl. Fußnote 33).

[37] Das sollte nicht dahingehend missverstanden werden, dass auch in beiden Fällen (maximale und minimale Spezialisierung) die Beschreibungen ❷, in denen auf die Anteile am Merkmalsbetrag (also der Patientenzahl) Bezug genommen wird, weniger sachgerecht seien als die Beschreibungen ❶, bei denen es mehr (oder ausschließlich) auf die Anzahl von Diagnosearten (DCs) ankommt.

Neubauer W., E. Bellgardt u. A. Behr (2002), Statistische Methoden, 2. Aufl., München (Vahlen)

Paglin, Morton (1975), The Measurement and Trend of Inequality, A Basic Revision, American Economic Review, Vol. 65, Nr. 4, S. 598-609.

Schulze, P, Beschreibende Statistik (2007), 6. Aufl. München (Oldenbourg)

Shorrocks, A. F. (1983), Ranking Income Distributions, Economica, Vol. 50, S. 3-17.

von der Lippe, P (1993), Deskriptive Statistik, UTB-Taschenbuch 1632 (G. Fischer), Stuttgart

von der Lippe, P (1999), Deskriptive Statistik, Formeln, Aufgaben, Klausurtraining, München (Oldenbourg)

Vorgrimler, D, G. Bartsch, F. Spengler u. D. Kuehnheinrich (2015), Measuring the response burden of official surveys for business, in Wirtschafts- und Sozialstatistisches Archiv, Bd. 9, H. 1, S. 59-71

Zwerenz, K (2015), Statistik, Einführung in die computergestützte Datenanalyse, (Oldenbourg), 6. Aufl.

Anhang

Konzentration/Disparität und verwandte Konzepte

In v. d. Lippe 1993, S. 171 f. habe ich versucht, den Unterschied zwischen Disparität (D) einerseits und Streuung s^2 und Schiefe γ, die auf das zweite (s^2) und dritte (γ)zentrale Moment einer Verteilung aufbauen andererseits deutlich zu machen. Die wichtigsten Unterschiede sind:

- diese Maße sind, anders als D verschiebungsinvariant (bei $y_i = a + x_i$, $a \neq 0$) ist $s_y^2 = s_x^2$ und $\gamma_y = \gamma_x$ aber $D_y \neq D_x$ und $K_y \neq K_x$,
- sie sind nicht auf einen bestimmten Wertebereich normiert, wie etwa $0 \leq D_G \leq (n-1)/n$,
- sie verringern sich nicht notwendig bei einem egalisierenden Transfer (die reiche Einheit j gibt ab an die arme Einheit k), d.h. sie erfüllen das Axiom K_2 bei K- und D-Maßen nicht, und
- sie sind unabhängig von der Anzahl n der Merkmalsträger.

Ein der quasi im Alltagsleben üblichen Interpretation von Ungleichheit sehr nahe kommendes Konzept ist die ***Schiefe*** (Asymmetrie) γ einer Verteilung. Eine linkssteile (= rechtsschiefe) Verteilung (mit $\gamma > 0$) der Einkommen, bei der viele ein kleines und wenige ein großes Einkommen x haben, gilt meist als Inbegriff der "Ungleichheit".

Man kann aber leicht zeigen, dass durch Hinzufügen von " Nullträgern" (Einheiten mit x = 0) oder Einheiten mit einem kleinen x aus einer linkssteilen Verteilung eine symmetrische Verteilung ($\gamma = 0$, also "keine Ungleichheit mehr"?) entsteht. Die Schiefe γ nimmt ab, aber D_G nimmt zu,[38] so dass γ kein geeignetes Maß der "Ungleichheit" sein kann.

Die Verteilung, der $D_G = 1$ zugrundeliegt, d.h. eine Einheit bekommt alles und alle Übrigen bekommen nichts ist eine ***Verteilung maximaler Ungleichheit***. Es ist ***nicht eine Verteilung der maximalen Varianz s^2*** (so etwas gibt es nicht).

Man kann leicht zeigen, dass eine Verteilung eine größere Varianz haben kann als die Verteilung der maximalen Ungleichheit. Wir zeigen das an einem Beispiel mit zwei Verteilungen, A und B:

[38] Das wird mit einem einfachen Zahlenbeispiel in v. d. Lippe, 1993, S. 172 demonstriert.

Verteilung A			Verteilung B		
x_i	n_i	$D_G = 1$ (genauer 1- 1/n 0,9), $\bar{x} = 5/10 = 0{,}5$ und $s^2 = 2{,}25$	x_i	n_i	$D_G = 0{,}8714286$ (kleiner als bei A), $\bar{x} = 35/10 = 3{,}5$ aber $s^2 = 80.25$ (erheblich größer als bei A)
$x_i = 0$	$n_1 = 9$		$x_i = 0$	$n_i = 8$	
$x_i = 5$	$n_2 = 1$		$x_i = 5$	$n_i = 1$	
			$x_i = 30$	$n_i = 1$	

Schon das zeigt, wie unsinnig es ist, sich mit der Lorenzkurve (Disparität) zu beschäftigen, wo eigentlich eine Aussage über die Streuung angebracht ist (wie in Abschn. 2).