Kapitel 10: Indexzahlen

1. Gegenstand und Bedeutung von Indexzahlen

a) Definition von Indexzahlen

Indexzahlen spielen vor allem in ökonomischen Anwendungen der Statistik eine große Rolle. Auch Nichtfachleuten ist z.B. der **Preis**index für die Lebenshaltung (nicht Lebenshaltungs**kosten**index!) als Maß der allgemeinen Teuerung (der Kaufkraft des Geldes) bekannt. In diesem Kapitel geht es um die methodischen Probleme von Indexzahlen. Es wird zunächst eine möglichst allgemein gehaltene Definition versucht, die anschließend kommentiert wird.

Indexzahlen sind Maßzahlen für den Vergleich einer Gesamtheit von Erscheinungen. Der summarische Charakter unterscheidet Indexzahlen von Verhältniszahlen (insbesondere Messzahlen). Indizes sind Maße der aggregierten Veränderung.

<u>1. Gegenstand des Vergleichs, Indizes und Messzahlen</u>

Indizes werden also vorwiegend zur Darstellung einer zeitlichen Entwicklung verwendet, seltener zum räumlichen Vergleich. Indizes und Messzahlen

- haben gemeinsam den (zeitlichen) Vergleich und die dem Vergleich verschiedener Erscheinungen dienende Bezugnahme auf einen Basiswert (Wert zur Basisperiode), der gleich 100 gesetzt wird;

- unterscheiden sich dadurch, dass Messzahlen die Entwicklung einer Einzelerscheinung (z.B. der Preis einer Ware), Indizes dagegen die einer Gesamtheit von Erscheinungen (z.B. die Preisentwicklung für einen aus n Waren bestehenden "Warenkorb") darstellen.

Demzufolge sind auch die meisten gebräuchlichen Indexformeln (gewogene) Mittelwerte von Messzahlen und. Früher sprach man von Indizes und Generalindizes, so wie man heute zwischen Messzahlen und Indexzahlen unterscheidet.

2. Die "Gesamtheit" (das Aggregat)

der Erscheinungen ist kategorial (qualitativ) abgegrenzt. Es ist kennzeichnend für einen Index, dass das Kriterium, nach dem Einzelerscheinungen (z.B. Preismesszahlen von verschiedenen Gütern und Dienstleistungen) zusammengefaßt werden, qualitativer Art ist (z.B. Einzelhandelspreise, Preise für die Lebenshaltung, Grundstoffpreise usw.).

3. Die Art der Einzelerscheinungen

(bzw. im Falle des zeitlichen Vergleichs: der Meßziffern) entscheidet über die Art des Index. Ein Preisindex mißt als Mittelwert von Preismesszahlen die durchschnittliche Preisentwicklung eines Aggregats. Entsprechend mißt ein Mengenindex eine durchschnittliche Mengenentwicklung.

4. Index als Funktion

Ein ungewogener Preisindex P_{0t} zur Basis 0 und für die Berichtsperiode t (mit einem "Warenkorb" von n Waren) ist eine Abbildung von zwei n-dimensionalen reellen Datenvektoren $[p_{1t} \dots p_{nt}]$ und $[p_{10} \dots p_{n0}]$ in die reelle Zahl P_{0t} (= Preisindex), wobei p_{it} der Preis der i-ten Ware zur Berichtszeit und p_{i0} zur Basiszeit ist (mit i = 1,2,...,n). Ein (Preis-) Index ist also eine Funktion von (Preis-) Vektoren, die bestimmten, in der Indextheorie (Abschn. 3) definierten formalen und ökonomischen Kriterien genügt. Das Hauptproblem jeder Indexkonstruktion ist es also, die für zwei Perioden [Zeitpunkte oder -intervalle] 0 und t, bzw. beim regionalen Vergleich die für zwei Regionen gegebenen Vektoren sinnvoll durch eine Zahl zu vergleichen.

5. Der Begriff "Index"

wird auch verwandt für absolute Größen, nicht nur für Verhältniszahlen. Häufig wird darunter auch ein Mittelwert von nach irgendeinem Schema für verschiedene Einzelerscheinungen (Variablen) vergebenen Punktzahlen verstanden, so z.B. bei einem Level of Living Index (als Maß der Wohlfahrt), Status-Index (Messung der sozialen Schichtung) oder Konjunkturindex. Oft wird der Begriff "Index" auch im allgemeinen Sinne eines "Indikators" oder einer Maßzahl benutzt.

b) Heuristische Einführung der Preisindex-Formeln

Im folgenden soll gezeigt werden, wie eine einfache Überlegung in fünf Gedankenschritten zur Preisindexformel von Laspeyres führt. Dabei werden auch einige andere (ältere) Preisindexformeln sowie axiomatische Forderungen an eine "sinnvolle" Indexformel vorgestellt, die das Verständnis der folgenden Abschnitte erleichtern dürften.

1. Preisniveau als relative Größe

Bei der Messung eines Preisniveaus könnte man zunächst daran denken, einen Durchschnittspreis zu berechnen, etwa ein ungewogenes arithmetisches Mittel der einzelnen Preise

$$\boxed{(10.1) \quad \bar{p}_t = \frac{\Sigma p_{it}}{n} \qquad (i = 1,2,...,n).}$$

Als absolute Größe hat diese Zahl wenig Aussagefähigkeit, zumal die Festlegung des "Warenkorbes" der n Waren entscheidend ist dafür, wie groß der "Durchschnittspreis" ist. Ein Preisniveau kann entgegen dem Eindruck, den das Wort "Niveau" erweckt, keine absolute, sondern nur eine relative Größe sein.
Wie problematisch eine Bezugnahme auf absolute Größen ist, mag auch das folgende Zitat aus einem Rundfunkkommentar verdeutlichen (Hessischer Rundfunk 9.12.1970):

"Die 2-Personen-Haushalte von Rentnern und Sozialhilfeempfängern, ... müssen ... zusätzlich mindestens 20 DM im Monat aufwenden. Die Ausgaben für den privaten Verbrauch eines 4-Personen-Arbeitnehmer-Haushalts mit mittlerem Einkommen, ... haben sich bereits mit 60 DM verteuert. Bei den 4-Personen-Haushalten von Beamten und Angestellten mit höherem Einkommen...macht die Verteuerung sogar über 100 DM im Monat aus."
Das legt den Schluß nahe, Haushalte mit höherem Einkommen hätten unter der Inflation mehr zu leiden als solche mit niedrigem Einkommen. Es wird dabei aber völlig vergessen, dass die Warenkörbe der verschiedenen Haushaltstypen auch zur Basiszeit unterschiedlich teuer waren. Das Bemühen, zu einer evtl. einfacher verständlichen Aussage zu gelangen als die für Laien vielleicht komplizierte Aussage eines Indexes ist zwar anzuerkennen, aber der dadurch vermittelte Eindruck ist einfach falsch. Es stimmt nicht, dass Haushalte mit höherem Einkommen unter der Inflation mehr zu leiden haben als solche mit niedrigem Einkommen. Wie die entsprechenden Preisindizes zeigen, ist vielmehr das Gegenteil der Fall.

Auch dieses Beispiel zeigt, dass ein Preisniveau nur eine relative Größe sein kann. Es muss unter Berücksichtigung des Prinzips des reinen Preisvergleichs, d.h. eines Vergleichs unter sonst gleichen Umständen (gleiche Mengen, Qualitäten usw.) die aggregierte Preisveränderung gemessen werden. Das ist die Aufgabe eines Preisindexes.

2. Preisindex als Messzahl von Durchschnittspreisen

Ein zeitlicher Vergleich des Durchschnittspreises bezogen jeweils auf den gleichen Warenkorb durch einen Preisindex zur Basis 0 und für die Berichtsperiode t könnte erfolgen durch:

$$(10.2)\quad P_{0t} = \frac{\overline{p}_t}{\overline{p}_0} = \frac{\Sigma p_{it}}{\Sigma p_{i0}} = P^D \qquad \text{(Dutot-Preisindex)}$$

Hierbei ist $\overline{p}_0$ analog zu $\overline{p}_t$ gem. Gl.10.1 definiert.
Setzt man die Basisperiode 100 statt 1 (es sei 0 etwa das Basisjahr 1990, was dann mit der bekannten, aber an sich unsinnigen Schreibweise "1990 = 100" bezeichnet wird), dann ist diese, wie auch alle nachfolgenden Indexformeln mit 100 zu multiplizieren.

Aber auch Gl. 10.2, eine 1738 von Dutot vorgeschlagene Indexformel kann kein sinnvolles Maß für ein Preisniveau sein, weil dieser Index gegen die axiomatische Forderung der Kommensurabilität (Axiom P5 vgl. Abschn. 3b) verstößt. Der Dutot-Index kann unterschiedliche Preissteigerungen ausweisen, je nachdem, ob der Preisnotierung (bei m < n Waren) beispielsweise Pfund- oder Kilopreise zugrunde liegen. Angenommen der Warenkorb besteht aus nur zwei Waren (also n = 2) und die Ware 1 werde

1. in Kilopreisen oder aber
2. in Pfundpreisen

notiert. Es ist offensichtlich, dass in der Regel

$$P^{D1} = \frac{p_{1t} + p_{2t}}{p_{10} + p_{20}} \quad \text{nicht identisch mit} \quad P^{D2} = \frac{\frac{1}{2}p_{1t} + p_{2t}}{\frac{1}{2}p_{10} + p_{20}}$$

sein wird. Allgemein gilt:
Preissummen und Preisdurchschnitte sind nicht unabhängig von der Maßeinheit der Mengen, auf die sich die Preisnotierungen zu beiden Zeiten 0 und t beziehen. Ein Index, der der Forderung der Kommensurabilität genügen soll kann also nicht eine Messzahl von Durchschnitten sein (wohl aber - was allerdings etwas ganz anderes ist - ein Durchschnitt von Messzahlen, vgl. Nr. 4).

3. Preisindex als Messzahl von Durchschnittswerten

Ein Durchschnittswert von n Waren ist definiert als

$$(10.3)\quad \bar{w}_t = \frac{\Sigma p_{it} q_{it}}{\Sigma q_{it}} \qquad i = 1,2,...,.n$$

wobei q_{it} die Menge der i-ten Ware zur Berichtszeit darstellt. Der Durchschnittswert $\bar{w}_0$ für die Basisperiode ist entsprechend definiert.
Gegen einen mit Durchschnittswerten gebildeten Preisindex

$$(10.4)\quad P^W = \frac{\bar{w}_t}{\bar{w}_0}$$

also gegen eine Messzahl von Durchschnittswerten sind folgende Einwände zu erheben:

- Die Summe Σq_{it}, bzw. Σq_{i0} der Mengen ist häufig nicht definiert. Sie setzt eine gemeinsame Mengeneinheit (z.B. Kilogramm, Stück, Liter, m^2 usw.) voraus, was nur möglich ist bei einer Gruppe von untereinander ähnlichen Waren (wenn z.B. wie in der Außenhandelsstatistik verschiedene Waren unter einer Warennummer zusammengefaßt werden). Für einen Preisindex für die Lebenshaltung wäre diese Formel somit schon deswegen nicht geeignet, weil bei ca. 750 Verbraucherpreisen praktisch alle Mengenarten vorkommen, die überhaupt nicht zu einer Summe Σq_i addiert werden können.
- Der Index P^W der Gl. 10.4 ist nicht darstellbar als Mittelwert von Preismesszahlen p_{it}/p_{i0}, wie dies beim Dutot-Preisindex der Fall ist. Aus Gl. 10.4 erhält man

$$P^W = \frac{\Sigma p_{it} q_{it}}{\Sigma q_{it}} \cdot \frac{\Sigma q_{i0}}{\Sigma p_{i0} q_{i0}} = \sum \frac{p_{it}}{p_{i0}} \frac{p_{i0} q_{it}}{\Sigma p_{i0} q_{i0}} \frac{\Sigma q_{i0}}{\Sigma q_{it}}$$

  Wie man leicht sieht, addieren sich die Gewichte $\frac{p_{i0} q_{it}}{\Sigma p_{i0} q_{i0}} \frac{\Sigma q_{i0}}{\Sigma q_{it}}$ nicht notwendig zu 1, so dass der Preisindex P^W größer als die größte oder kleiner als die kleinste Preismesszahl sein kann. Auch deshalb kann P^W nicht als sinnvolle Preisindexformel akzeptiert werden.

Man beachte aber, dass

- der erste Faktor dieser Gewichte, nämlich $p_{i0}q_{i0}/\Sigma p_{i0}q_{i0}$ die Ausgabenanteile zur Basiszeit darstellt und diese Größen sich sehr wohl zu 1 addieren (i = 1,2,...,n) und dass
- sich auch der Dutot-Index als ein (mit Anteilen an der Preissumme zur Basiszeit) gewogenes arithmetisches Mittel der Preismesszahlen darstellen läßt, so dass gegen P^D nicht der Einwand erhoben werden

kann, dass P^D größer als die größte oder kleiner als die kleinste Preismesszahl werden kann.

4. Preisindex als Durchschnitt von Preismesszahlen

Um der Kommensurabilität zu genügen und auch sicherzustellen, dass ein Preisindex nicht größer als die größte oder kleiner als die kleinste der n Preismesszahlen werden kann, ist ein Preisindex als Mittelwert von Preismesszahlen zu konstruieren, etwa gemäß der Formel von Graf Carli

$$(10.5) \quad P^C = \frac{1}{n} \sum \frac{p_{it}}{p_{i0}} \qquad \text{(Preisindex von Carli, 1764).}$$

Dieser Preisindex ist ein ungewogenes arithmetisches Mittel der Preismesszahlen. Es ist, wie gesagt, ein großer Unterschied, ob ein Index als Messzahl von Durchschnitten (wie P^D und P^W) oder als Durchschnitt von Messzahlen konstruiert ist. Anstelle des arithmetischen Mittels können auch andere Mittelwerte zur Definition eines Indexes herangezogen werden, etwa das geometrische Mittel, wie dies Jevons vorschlug:

$$(10.6) \quad P^J = [(p_{1t}/p_{10})...(p_{nt}/p_{n0})]^{1/n} .$$

5. Preisindex als gewogener Durchschnitt von Messzahlen

Gegen die Formeln von Carli oder Jevons, P^C oder P^J ist nur einzuwenden, dass keine Gewichtung vorliegt. Jede Preismesszahl wird als gleich "wichtig" betrachtet. Bei einem nach der Formel P^C oder P^J berechneten Preisindex für die Lebenshaltung erhielte also z.B. eine Mieterhöhung das gleiche Gewicht, wie die Preissteigerung bei Ölsardinen-Konserven, obgleich der Haushalt von einer Mieterhöhung ungleich mehr betroffen sein wird als von einer gleich großen Zunahme des Preises von Ölsardinen. Dass die Preissteigerung bei der Wohnungsmiete bedeutsamer ist als bei Ölsardinen liegt daran, dass der Haushalt in der Regel für die Miete wesentlich mehr ausgibt als für Ölsardinen. Es ist deshalb sehr sinnvoll, eine Gewichtung mit Ausgabenanteilen vorzunehmen. Die heutzutage für die Praxis wichtigsten Preisindizes sind jeweils mit Ausgabenanteilen gewogene Mittelwerte von Preismesszahlen:

1. Der Preisindex von Laspeyres P^L ist ein mit den Ausgabenanteilen der Basiszeit gewogenes arithmetisches Mittel der Preismesszahlen.
2. Der Preisindex von Paasche P^P ist ein mit den Ausgabenanteilen der Berichtszeit gewogenes harmonisches Mittel der Preismesszahlen.

zu 1:

Der Ausgabenanteil der i-ten Ware (i=1,2,...,n) beträgt zur Basiszeit $g_{i0} = p_{i0}q_{i0}/\Sigma p_{i0}q_{i0}$ (mit $g_{i0} \geq 0$ und $\Sigma g_{i0} = 1$).
Der Preisindex nach Laspeyres (P^L) ist definiert als arithmetisches Mittel der hiermit gewogenen Preismessziffern, also als

$$P^L = \Sigma(p_{it}/p_{i0})g_{i0} \quad \text{oder}$$

(10.7) $P^L = \sum \frac{p_{it}}{p_{i0}} \frac{p_{i0}q_{i0}}{\Sigma p_{i0}q_{i0}}$	Laspeyres-Preisindex Messzahlenmittelwertformel.

Es ist leicht zu sehen, dass dies umgeformt werden kann zu einem Verhältnis von Preis-Mengen-Produkten (Aggregaten), die z.B. im Falle eines Verbraucherpreisindexes (wie der Preisindex für die Lebenshaltung oder der Einzelhandelspreisindex) Ausgaben darstellen (bei einem Erzeugerpreisindex entsprechend Einnahmen), wobei der "Laufindex" (das Subskript) i der Übersichtlichkeit halber meist weggelassen wird. Eine andere Darstellung von P^L ist also:

(10.8) $P^L = \frac{\Sigma p_{it}q_{i0}}{\Sigma p_{i0}q_{i0}} = \frac{\Sigma p_t q_0}{\Sigma p_0 q_0}$	Laspeyres-Preisindex Aggregatformel.

Offensichtlich sind Gl. 10.7 und 10.8 formal identisch. Gl. 10.7 beschreibt jedoch deutlicher die praktische Vorgehensweise der laufenden (meist monatlichen) Berechnung von Laspeyres-Preisindizes in der amtlichen Statistik und zugleich die Vorzüge der Laspeyres-Formel für die Praxis:

- Jeweils monatlich neu zu bestimmen sind nur die n Preismesszahlen p_{it}/p_{i0} durch laufende monatliche Preisnotierungen;
- Solange das Basisjahr beibehalten wird, bleiben dagegen die Gewichte ($p_{i0}q_{i0}/\Sigma p_{i0}q_{i0}$), d.h. der "Warenkorb" konstant.

zu 2:

Der meist nur in seiner Aggregatformel (Gl. 10.9) bekannte Preisindex nach Paasche

(10.9) $P^P = \frac{\Sigma p_{it}q_{it}}{\Sigma p_{i0}q_{it}} = \frac{\Sigma p_t q_t}{\Sigma p_0 q_t}$	Paasche-Preisindex Aggregatformel

ist, wie oben behauptet, als mit den Ausgabenanteilen zur Berichtszeit ($g_{it} = p_{it}q_{it}/\Sigma p_{it}q_{it}$) gewogenes harmonisches Mittel von Preismesszahlen darstellbar. Bekanntlich ist der reziproke Wert des harmonischen Mittels das arithmetische Mittel der reziproken Werte (hier der reziproken

Preismesszahlen, also der Größen p_{i0}/p_{it}). Mit den Gewichten g_{it} erhält man nämlich

$$\frac{1}{P^P} = \sum \frac{p_{i0}}{p_{it}} \frac{p_{it}q_{it}}{\Sigma p_{it}q_{it}} = \frac{\Sigma p_{io}q_{it}}{\Sigma p_{it}q_{it}} \quad .$$

Im Unterschied zur Laspeyres-Formel ist bei P^P der Warenkorb nicht konstant. Die Berechnung von P^P ist also aufwendiger als die von P^L. Ein Preisindex für die Lebenshaltung wird i.d.R. nach der Formel P^L berechnet. Die Bedeutung von P^P liegt dagegen auf einem anderen Gebiet (nämlich dem der Preisbereinigung).

Wie man sieht, führen einfache Überlegungen zu den in der Praxis der amtlichen Statistik besonders beliebten Indexformeln von Laspeyres und Paasche. Die Indexaussage von P^L und auch von P^P sollte ja auch intuitiv verständlich sein. Die Überlegungen zum Preisniveau sind entsprechend übertragbar auf andere Indizes (etwa auf Produktions-, Auftragseingangsindizes usw.).

Beispiel 10.1:

Der Warenkorb der Verbraucher eines Landes bestehe nur aus den vier Waren A,B,C und D. Gegeben seien die folgenden Preise und Mengen dieser Waren zur Basis- (0) und zur Berichtszeit (t):

	Preise (p)		Mengen (q)	
Ware	0	t	0	t
A	2	3	25	50
B	4	8	20	30
C	7	9	30	25
D	3	4	10	90

a) Es sollen zunächst nur die Preise beachtet werden: Berechnen Sie den Preisindex nach Dutot
   - mit den obigen Preisen
   - für den Fall, dass die Ware B in Pfund- statt bisher in Kilopreisen notiert wird.

b) Berücksichtigen Sie nun auch die Mengen: Berechnen Sie die Preis- und Mengenmesszahlen aller vier Waren, sowie die Durchschnittswerte zur Basis- und Berichtszeit und den Index P^W.

c) Berechnen Sie die Preisindizes P^L und P^P nach der Aggregatformel.

Lösung 10.1:

a) Bei den angegebenen Preisen gilt Σp_{i0} = 16, so dass der Durchschnittspreis 4 beträgt und Σp_{it} = 24 (Durchschnitt: 6). Der Preisindex nach Dutot ist dann P^D = 6/4 = 24/16 = 1,5. Wird Ware B in Pfund statt in Kilo notiert, so sind die Preise p_{B0} = 2 und p_{Bt} = 4. Die Preissummen sind dann Σp_{i0} = 14 und Σp_{i0} = 20 und der Dutot-Preisindex ist dann bei gleicher Preissteigerung wie bisher P^D = 1,4286 statt 1,5.

b) Man erhält die folgenden Zahlenergebnisse:

Ware	Messzahlen		Werte		Ausgabenanteile	
(i)	Preise	Mengen	0	t	0	t
A	1,5	2	50	150	0,135	0,154
B	2	1,5	80	240	0,216	0,246
C	1,286	2,5	210	225	0,568	0,231
D	1,333	2,25	30	360	0,081	0,369

Es gilt Σq_{i0} = 85 und Σq_{it} = 195, ferner für die Werte $\Sigma p_{i0}q_{i0}$ = 370 und $\Sigma p_{it}q_{it}$ = 975, so dass für die Durchschnittswerte gilt $\overline{w}_0$ = 370/85 = 4,35 und $\overline{w}_t$ = 975/195 = 5, so dass man erhält $P^W = \overline{w}_t/\overline{w}_0$ = 1,1486. Der Index P^W ist damit kleiner als die kleinste Preismesszahl (diejenige der Ware C mit 1,286).

c) Für P^L erhält man $P^L = \Sigma p_{it}q_{i0}/\Sigma p_{i0}q_{i0}$ = 545/370 = 1,473 (bzw. wenn das Basisjahr 100 gesetzt wird 147,3). Wie man leicht sieht ist P^L auch als Mittelwert der Preismesszahlen zu errechnen mit $P^L = 1{,}5 \cdot 0{,}135 + \ldots + 1{,}333 \cdot 0{,}081$ und P^L = 1,473 liegt "in der Mitte" der Preismesszahlen, die zwischen 1,286 und 2 schwanken. Entsprechend ist der Paasche Preisindex $P^P = \Sigma p_{it}q_{it}/\Sigma p_{i0}q_{it}$ = 975/665 = 1,466. Man beachte, dass der Zähler von P^P und der Nenner von P^L bereits im Teil b) berechnet wurden. Hierbei handelt es sich nämlich um tatsächliche Ausgaben (oder allgemeiner: Werte), während die Größen $\Sigma p_{it}q_{i0}$ und $\Sigma p_{i0}q_{it}$ fiktive Ausgaben sind.

Beispiel 10.2:

Um seinen notleidenden staatlichen Dienstleistungsbetrieben finanziell auf die Sprünge zu helfen, plant ein Minister eine Gebührenerhöhung bei zwei von 20 Gebührenarten (A und B) und zwar um 50% (bei A) und um 80%

(bei B). Die Ausgabenanteile für die Dienstleistungen A und B waren bei den Konsumenten bisher (Basiszeit) 15% (bei A) bzw. 20% (bei B).

a) Wie groß ist der Preisindex nach Laspeyres?

b) Es ist nicht bekannt, wie die Verbraucher reagieren werden. Kann man deshalb keine Aussage über P^P machen, kann also P^P ganz beliebige Werte annehmen, oder kann der Preisindex nach Paasche einen bestimmten Höchstwert nicht über- und einen Mindestwert nicht unterschreiten?

Lösung 10.2:

a) Der Laspeyres-Preisindex ist hier nur mit der Messzahlen-Mittelwertformel (Gl.10.7) zu errechnen. Für die Preismesszahlen und für die Ausgabenanteile gilt nach obigen Angaben

Dienstleistung	Preismesszahl	Ausgabenanteil
A	1,5	0,15
B	1,8	0,20
alle übrigen	1,0	0,65

Somit ist $P^L = 1{,}5 \cdot 0{,}15 + 1{,}8 \cdot 0{,}2 + 0{,}65 = 1{,}235$.

b) Man kann sehr wohl einen Bereich für P^P angeben, denn auch der Paasche-Preisindex ist ein Mittelwert der Preismesszahlen. Wie immer die Ausgabenstruktur zur Berichtszeit aussehen mag, P^P kann nicht größer als 1,8 und nicht kleiner als 1 sein.

c) Kompromissformeln durch Mittelwertbildung

Bevor wir auf die Eigenschaften der Preisindexformeln von Laspeyres und Paasche näher eingehen und auch weitere Beispiele für die Anwendung dieser Formeln durchrechnen, soll hier gezeigt werden, wie das Thema "Indexzahlen" im besonderen Maße geeignet ist, eine statistische Methode mit mathematisch-formalen Überlegungen zu untersuchen (was in Abschn. 3 vertieft wird). Zwar wurden die meisten älteren Indexformeln aus anderen Überlegungen heraus entwickelt, es entstand jedoch schon früh eine formale Theorie der Indexzahlen (wobei meist Preisindizes im Vordergrund standen).

Gegenstand einer formalen Indexbetrachtung ist

1. die Suche nach "idealen" Mittelwerten und/oder Wägungsschemen,
2. der Versuch, "ideale" Indexformeln dadurch zu finden, dass man Mittelwerte von Indizes oder von Gewichten bildet und
3. die Entwicklung einer Axiomatik für Indexzahlen und die Suche nach Indexformeln, die solchen Axiomen genügen.

Auf den Punkt Nr. 3 soll in Abschnitt 3 eingegangen werden. Zu den ersten beiden Punkten dürften knappere Hinweise schon an dieser Stelle genügen:

zu 1:

Da Indizes stets Mittelwerte von Messzahlen sind und zwar in der Regel auch gewogene Mittelwerte, liegt der Gedanke nahe, verschiedene Arten von Mittelwerten und verschiedene Wägungsarten "auszuprobieren". Dabei bestehen auch Zusammenhänge zwischen den Mittelwerten und Wägungsarten, z.B. zwischen dem arithmetischen und dem harmonischen Mittel (vgl. Übers. 10.1 und 10.5).

Übersicht 10.1

Gewichte (Ausgabenanteile)	arithmet. Mittel	harmon. Mittel
Basisperiode $p_0q_0/\Sigma p_0q_0$	P^L (Laspeyres)	
Berichtsper. $p_tq_t/\Sigma p_tq_t$		P^P (Paasche)
"hybrid" 1 $p_0q_t/\Sigma p_0q_t$	P^P	
"hybrid" 2 $p_tq_0/\Sigma p_tq_0$		P^L

Die in diesem Schema nicht ausgefüllten Kombinationsmöglichkeiten müssen nicht notwendig völlig unsinnig sein und können in dem indirekten Sinne eines reziproken Mengenindexes als "Preisindizes" aufgefaßt werden.
So wurde z.B. als Preisindex von Palgrave ein arithmetisches Mittel der Ausgabenanteile der Berichtsperiode vorgeschlagen. Die sich daraus ergebende Indexfunktion

$$P^{PA} = \frac{\Sigma p_{it} q_{i0} v_i}{\Sigma p_{it} q_{it}} \quad \text{mit} \quad v_i = \frac{p_{it} q_{it}}{p_{i0} q_{i0}}$$

unterscheidet sich vom reziproken Paasche-Mengenindex $(Q^P)^{-1} = \Sigma p_{it}q_{i0}/\Sigma p_{it}q_{it}$ durch die im Zähler an den Mengen q_{i0} mit dem Faktor (Ausgabenverhältnis) v_i angebrachten Korrekturen. Man kann $q_{i0}v_i$ oder gleichbedeutend $p_{it}q_{it}/q_{i0}$ als eine die Preissteigerung berücksichtigende "korrigierte" Menge q^*_{io} auffassen. P^{PA} ist aber auch das harmonische Mittel der <u>reziproken</u> Preismesszahlen mit den Ausgabenanteilen der Berichtszeit, so dass die Interpretation als Preisindex auch wieder problematisch erscheint.

zu 2:

Einige besonders bekannte durch Mittelung gebildete "Kompromissformeln" sind in Übers. 10.2 zusammengestellt.

Übersicht 10.2

Mittelwert von	Art des Mittelwerts: arithmetisch	Art des Mittelwerts: geometrisch
Indexformeln	$P^{DRO} = ½(P^L+P^P)$ [Drobisch 1871]	$P^F = \sqrt{P^L P^P}$ [Fisher 1922]
Gewichten	$\frac{\Sigma p_{it}(q_{i0} + q_{it})}{\Sigma p_{i0}(q_{i0} + q_{it})}$ [Bowley et al.1887]	$\frac{\Sigma p_{it}\sqrt{q_{i0}\, q_{it}}}{\Sigma p_{i0}\sqrt{q_{i0}\, q_{it}}}$ [Walsh 1901]

Besonders Irving Fisher ist bekannt für seine systematische Suche nach einer Indexformel, die nach bestimmten Kriterien "ideal" ist, wie etwa der von ihm gefundene "Idealindex"

(10.10) $P^F = \sqrt{P^L P^P}$ ("Idealindex" von I. Fisher).

Als geometrisches Mittel von Laspeyres- und Paasche-Preisindex hat der Idealindex interessante Eigenschaften, auf die an späterer Stelle noch eingegangen wird.
Aus der Mittelung folgt, dass die Preisindizes von Drobisch (P^{DRO}) und Fisher zwischen denen von Laspeyres und Paasche liegen müssen, es gilt also z.B. immer entweder $P^P \leq P^F \leq P^L$ oder $P^L \leq P^F \leq P^P$.
Man könnte natürlich auch ein harmonisches Mittel aus P^L und P^P berechnen (P^{HM}). Das geometrische Mittel aus P^{DRO} und P^{HM} ist P^F.

2. Indizes nach Laspeyres und Paasche

a) Preis- und Mengenindizes, Preisbereinigung

Die Preisindexformel von Laspeyres (und auch die von Paasche) wurde bereits schrittweise hergeleitet als Mittelwert von Preismesszahlen (Gl. 10.7). Man kann die Formeln für P^L und P^P in der Form der sog. "Aggregatformel" (Gl. 10.8 und 10.9) auch einführen, ausgehend von dem Gedanken, dass ein "Wertindex" nicht als Preisindex verwendet werden kann (vgl. Übers. 10.3).

Def. 10.1: Wertindex

Ein Wertindex ist eine Messzahl der tatsächlichen (nominalen) Ausgaben bzw. Einnahmen:

(10.11) $W_{0t} = \frac{\Sigma p_{it} q_{it}}{\Sigma p_{i0} q_{i0}}$	oder einfach	$W_{0t} = \frac{\Sigma p_t q_t}{\Sigma p_0 q_0}$

Bemerkungen zu Def. 10.1:

1. Im Beispiel der Verbraucherpreise ist ein Wertindex ein reines Ausgabenverhältnis, ein **Lebenshaltungskostenindex**. W_{0t} kann aber **kein Preisindex für die Lebenshaltung** sein (der nach der Formel P^L konstruiert ist). Denn W_{0t} wird nicht allein von der Preisentwicklung bestimmt, sondern auch durch die Mengenentwicklung. Zähler und Nenner des Wertindexes unterscheiden sich nicht nur durch die Preise, sondern auch durch die Mengen.

2. Die Lebenshaltungskosten können z.B. steigen obgleich alle Preise für die Lebenshaltung gleich bleiben, allein deshalb weil die Mengen steigen. Umgekehrt können trotz steigender Preise für die Lebenshaltung die Lebenshaltungskosten sogar sinken, weil die Haushalte "den Gürtel enger schnallen".

3. Es liegt also nahe, zu einem reinen Preisvergleich dadurch zu gelangen, dass man im Zähler und Nenner des Ausgabenverhältnisses mit den gleichen Mengen rechnet und dabei auch fiktive Ausgaben betrachtet. Es sind nun zwei Ansätze üblich (und natürlich noch viele weitere denkbar): man kann die Mengen der Basiszeit q_{i0} (Laspeyresansatz) oder die Mengen der Berichtszeit q_{it} (Paascheansatz) dem Ausgabenvergleich zugrunde legen (vgl. auch Übers. 10.3).

Def. 10.2: Preisindizes nach Laspeyres und Paasche

In ihrer Aggregatformel sind die Preisindizes von Laspeyres (P^L) und Paasche (P^P) gegeben durch

(10.8) $P^L = \frac{\Sigma p_t q_0}{\Sigma p_0 q_0}$	(Laspeyres)	und	(10.9) $P^P = \frac{\Sigma p_t q_t}{\Sigma p_0 q_t}$	(Paasche)

Bemerkungen zu Def. 10.2:

1. Zähler und Nenner der Preisindizes stellen jeweils Aggregate dar (im Falle von Verbraucherpreisindizes: Ausgabenaggregate). Der Nenner von P^L und der Zähler von P^P sind empirisch beobachtbare Aggregate (tatsächliche Ausgaben, bzw. allgemeiner Werte). Entsprechend sind der Nenner von P^P und der Zähler von P^L fiktive Aggregate.

2. Der Laspeyres-Preisindex beantwortet die Frage: Was würde heute (d.h. mit den Preisen zur Zeit t) der frühere (historische) Warenkorb der Basisperiode (mit den Mengen q_{i0}) kosten?

3. Der Paasche-Preisindex beantwortet die Frage: Was würde der heutige Warenkorb (d.h. mit den aktuellen Mengen q_{it}) heute mit den Preisen p_{it} mehr, bzw. weniger als damals (mit den Preisen p_{i0} zur Zeit 0) kosten?

Def. 10.3: Mengenindizes nach Laspeyres und Paasche

Durch Vertauschung von Preisen und Mengen in den Gleichungen 10.8 und 10.9 erhält man die entsprechenden Mengenindizes. Oder: in der gleichen Art, wie P^L und P^P gewogene Mittelwerte von Preismesszahlen sind, sind Q^L und Q^P gewogene Mittel von Mengenmesszahlen (vgl. Übers. 10.3). Die Mengenindizes lauten jeweils in der Aggregatformel:

$$\boxed{(10.12)\quad Q^L = \frac{\Sigma q_t p_0}{\Sigma q_0 p_0} \quad \text{und} \quad (10.13)\quad Q^P = \frac{\Sigma q_t p_t}{\Sigma q_0 p_t}}$$

Folgerung aus Def. 10.2 und 10.3

Zwischen den Preis- und Mengenindizes sowie dem Wertindex bestehen die folgenden leicht zu verifizierenden Gleichungen, die zugleich die Grundlage der Preisbereinigung (vgl. Def. 10.4) darstellen:

$$\boxed{(10.14)\quad W_{0t} = P^L \cdot Q^P = P^P \cdot Q^L\ .}$$

Man sieht leicht, dass sich z.B. im Produkt $P^P \cdot Q^L$ Zähler und Nenner entsprechend kürzen lassen, so dass gilt:

$$P^P_{0t} \cdot Q^L,_{0t} = \frac{\Sigma p_t q_t}{\Sigma p_0 q_t} \frac{\Sigma p_0 q_t}{\Sigma p_0 q_0} = \frac{\Sigma p_t q_t}{\Sigma p_0 q_0} = W_{0t}\ .$$

Def. 10.4: Wert, Volumen, Preisbereinigung

a) Ein Wert W_t, oder (anders genannt) ein "nominales" Aggregat, eine Größe "zu laufenden Preisen" ist eine Summe von Preismengenprodukten mit laufenden (aktuellen) Mengen und laufenden Preisen:

$$\boxed{(10.15) W_t = \Sigma p_{it} q_{it} \quad \text{entsprechend} \quad W_0 = \Sigma p_{i0} q_{i0}}$$

b) Ein Volumen V_t oder ein "reales" Aggregat, ist eine Preismengenproduktsumme mit laufenden (aktuellen) Mengen (q_{it}) "zu konstanten Preisen" der Basisperiode (zu den Preisen p_{i0}):

$$(10.16) \quad V_t = \Sigma p_{i0} q_{it} \quad \text{und} \quad V_0 = W_0$$

c) Deflationierung oder Realwert- oder Volumenrechnung ist die Aufgabe aus einem Wert ein Volumen (aus W_t die Größe V_t), bzw. aus einem Wertindex W_{0t} ein Mengenindex nach Laspeyres ($Q^L{}_{,0t}$) zu berechnen.

Bemerkungen zu Def. 10.4

1. Ein Wertindex (Def. 10.1) ist eine Messzahl von Werten im Sinne der Def. 10.4. Er stellt die wertmäßige Zunahme (nominale Steigerung) eines Aggregats (im Vergleich zur Basiszeit) dar.

2. Der Laspeyres-Mengenindex Q^L stellt die reale (volumenmäßige) Zunahme eines Aggregats dar (er ist praktisch ein "Volumenindex" [der Begriff wird jedoch auch anders gebraucht]) und soll die reine mengenmäßige Entwicklung darstellen, da Mengen in der Regel nicht in physischen Einheiten aggregierbar sind.

3. Ein Wert wird deflationiert indem man ihn durch einen entsprechend definierten (die gleichen Güter umfassenden) Preisindex nach Paasche dividiert:

$$(10.14a) \quad V_t = \frac{W_t}{P^P} \quad \text{und} \quad (10.14b) \quad Q^L = \frac{W_{0t}}{P^P}.$$

Übersicht 10.3: Wertindex, Preis- und Mengenindizes

Wertindex W_{0t} (z.B. Lebenshaltungskostenindex)

$$\boxed{W_{0t} = \frac{\Sigma p_t q_t}{\Sigma p_0 q_0}}$$

Laspeyres Preisindex

$$\boxed{P^L_{0t} = \frac{\Sigma p_t q_0}{\Sigma p_0 q_0}}$$

Verwendung für:
spezielle Preisniveaus
(z.B. Preisindizes für die
Lebenshaltung)

Paasche Preisindex

$$\boxed{P^P_{0t} = \frac{\Sigma p_t q_t}{\Sigma p_0 q_t}}$$

Verwendung für:
Preisbereinigung*)
(Deflationierung, z.B.
des Sozialprodukts)

Vertauschung von Preisen und Mengen in den Formeln führt zu den entsprechenden Mengenindizes Q^L und Q^P also:

Laspeyres Mengenindex

$$\boxed{Q^L_{0t} = \frac{\Sigma q_t p_0}{\Sigma q_0 p_0}}$$

Paasche Mengenindex

$$\boxed{Q^P_{0t} = \frac{\Sigma q_t p_t}{\Sigma q_0 p_t}}$$

<u>Eine andere Art der Herleitung von Mengenindizes:</u>

Während P^L ein mit Ausgabenanteilen zur Basiszeit ($q_0 p_0 / \Sigma q_0 p_0$) gewogenes arithmetisches Mittel von Preismesszahlen ist, ist Q^L ein analog gebildetes Mittel von Mengenmesszahlen. Entsprechendes gilt für den Zusammenhang von P^P und Q^P: der Preisindex P^P ist ein mit den Ausgabenanteilen der Berichtszeit gewogenes harmonisches Mittel der Preismesszahlen und Q^P ist ein entsprechendes Mittel der Mengenmesszahlen. Man kann auch den Wertindex W_{0t} als Mittelwert der Wertmesszahlen $p_{it} q_{it} / p_{i0} q_{i0}$ auffassen. Dabei führen beide Arten der Mittelung, diejenige nach Laspeyres (arithmetisches Mittel, Ausgabenanteile der Basiszeit) und diejenige nach Paasche (harmonisches Mittel, Ausgabenanteile der Berichtszeit) zum gleichen Ergebnis.

<u>Wertindex als Indexprodukt:</u>

Es gilt nun die folgende grundlegende Formel für die Preisbereinigung:

$$\boxed{(10.14) W = P^L Q^P = P^P Q^L}$$

*) Zur Preisbereinigung (Deflationierung) oder Realwert- oder Volumenrechnung vgl. Def. 10.4 Teil c): $W_t \to V_t$ und $W_{0t} \to Q^L_{0t}$ gem. Gl. 10.14a und 10.14b

Beispiel 10.3:

Diplom-Kaufmann K aus E und Gattin gehen leidenschaftlich gern ins Kino. Von Zeit zu Zeit schätzen sie etwas Bildendes im "Filmkunst", und sie lassen sich auch schon mal politisieren im "Alternativkino". Die Ausgaben des Ehepaares für Kinobesuche sind von 1988 bis 1990 nominal um 40vH und real dagegen nur um 25vH gestiegen. Für die Eintrittspreise der Kinos gelte:

Nr.	Kino	Preis	
		1988	1990
1	Filmkunst	15	12
2	Alternativkino	10	14
3	Kolossal-Kino	12	18
4	Bahnhofskino	20	24

a) Man berechne den Preisindex nach Laspeyres, wenn sich die Ausgabenanteile für Kinobesuche bei dem Ehepaar 1988 wie folgt verhalten: 2:3:2:1 (=Aufteilung der Ausgaben auf die vier Kinos).

b) Berechnen Sie den Preis- und Mengenindex nach Paasche!

Lösung 10.3:

a) Die Preismesszahlen m_i lauten $m_1 = 0{,}8$, $m_2 = 1{,}4$, $m_3 = 1{,}5$ und $m_4 = 1{,}2$. Die Ausgabenanteile ergeben sich aus der Angabe 2:3:2:1. Folglich sind die Preismesszahlen zu gewichten mit 2/8, 3/8, 2/8 und 1/8. Man erhält dann $P^L = 10/8 = 1{,}25$.

b) Aus den Angaben ist zu entnehmen, dass $W_{0t} = 1{,}4$ und $Q^L = 1{,}25$ ist. Daraus errechnet sich $P^P = 1{,}4/1{,}25 = 1{,}12$ und $Q^P = 1{,}4/1{,}25 = 1{,}12$.

Beispiel 10.4:

a) Angenommen, das Sozialprodukt sei (über mehrere Jahre) nominal (zu jeweiligen Preisen) um 50vH gestiegen, real (zu konstanten Preisen eines Basisjahres) aber nur um 25vH. Welchen Wert nimmt dann der Preisindex des Sozialprodukts (ein Preisindex nach Paasche) an?

b) Das wertmäßige Bruttosozialprodukt habe sich verdoppelt, das volumenmäßige (in Preisen von 1970) Sozialprodukt sei dagegen nur um 1/3 gestiegen. Der "Preisindex des Sozialprodukts" 1970 = 100 beträgt somit (Richtiges ankreuzen):

☐ 166,67 ☐ 150 ☐ 133,33 ☐ 66,67.

Lösung 10.4:

a) 1,5/1,25 = 1,2 also 20% Preissteigerung, nicht 50% - 25%= 25%.
b) 150.

d) Vergleich von Laspeyres- und Paasche-Formel

In Abschnitt 1b (dort Ziff.5) und in den Bemerkungen zu Def.10.2 sind bereits einige Gegenüberstellungen zwischen P^L und P^P vorgenommen worden, die nachfolgend etwas vertieft und an Beispielen weiter erläutert werden sollen.

1. Praktische wirtschaftsstatistische Aspekte

Der Laspeyres-Preisindex hat, wie bereits gesagt, den Vorteil, dass er durch sein gleichbleibendes Wägungsschema leicht monatlich zu berechnen ist. Bei einem konstanten Warenkorb sind nach der Messzahlenmittelwertformel monatlich nur die Preismesszahlen auszutauschen; die Gewichte bleiben bis zu einer Neuberechnung (vgl. Abschn. 4) unverändert. Die Kehrseite ist jedoch, dass der Warenkorb von Zeit zu Zeit im Zuge einer Neuberechnung des Indexes aktualisiert werden muss. Der Paasche-Preisindex wird vor allem zur Preisbereinigung verwendet, aber auch dort, wo laufend die jeweiligen Warenkörbe quasi als Nebenprodukt anfallen, wie z.B. in der Außenhandelsstatistik.

2. Zeitreiheninterpretation

Aufeinanderfolgende Werte des Paasche-Preisindexes P^P unterscheiden sich (anders als bei P^L) nicht nur durch die Preise, sondern auch durch die Mengen. Die Folge P_{01}, P_{02}, P_{03} hat nämlich die folgende Gestalt:

Paasche: $P^P_{01}, P^P_{02}, P^P_{03}$	Laspeyres: $P^L_{01}, P^L_{02}, P^L_{03}$
$\frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}, \frac{\Sigma p_2 q_2}{\Sigma p_0 q_2}, \frac{\Sigma p_3 q_3}{\Sigma p_0 q_3}$	$\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0}, \frac{\Sigma p_2 q_0}{\Sigma p_0 q_0}, \frac{\Sigma p_3 q_0}{\Sigma p_0 q_0}$

Aufeinanderfolgende Werte des Paasche-Preisindexes P^P sind somit streng genommen keine Zeitreihe, denn sie sind (anders als bei P^L) nicht untereinander, sondern jeweils nur mit dem Basiswert vergleichbar.

3. Größenbeziehung zwischen P^L und P^P[Kovarianz zwischen Preis- und Mengenmesszahlen]

Der folgende zuerst von Ladislaus von Bortkiewicz gefundene Zusammenhang zeigt unter welchen Voraussetzungen der Laspeyres-Preisindex (was die Regel ist) größer als der Paasche Preisindex ist. Er ist leicht zu zeigen:

Mit den Ausgabenanteilen g_i zur Basiszeit (wie oben definiert als $g_i = p_{i0}q_{i0}/\Sigma p_{i0}q_{i0}$) sowie den Preismesszahlen $b_i = p_{it}/p_{i0}$ und Mengenmesszahlen $c_i = q_{it}/q_{i0}$ erhält man für die Laspeyres-Indizes

$P_{0t}^L = \Sigma g_i b_i$ und $Q_{0t}^L = \Sigma g_i c_i$.

Ferner gilt $W_{0t} = \Sigma b_i c_i g_i = P^L Q^P = P^P Q^L$, so dass man für die Kovarianz C von Preis- und Mengenmesszahlen erhält

(10.17) $C = \Sigma(b_i - P^L)(c_i - Q^L)g_i = Q^L(P^P - P^L)$.

Eine Umformung von Gl. 10.17 liefert

(10.17a) $P^L/P^P = 1 - C/W$ und aus Gl. 10.14 folgt ferner

(10.17b) $P^L/P^P = Q^L/Q^P$.

Ist also $P^L > P^P$ so ist auch $Q^L > Q^P$.

Da die Kovarianz stets das Produkt des Korrelationskoeffizienten und der Standardabweichungen ist, also $C = r_{bc}s_b s_c$ gilt $P^L = P^P$ wenn:

- die Kovarianz $C = 0$ und damit auch $r_{bc} = 0$
- die Preis- und/oder Mengenmesszahlen keine Streuung haben, also alle gleich sind ($s_b = 0$, bzw. $s_c = 0$), d.h. alle (Preise) Mengen im gleichen Verhältnis zu- oder abnehmen.

Die Standardabweichungen s_b und s_c werden i.d.R. umso größer sein, je weiter das Basisjahr zurückliegt, weshalb dann meist auch die Unterschiedlichkeit von P^L und P^P zunimmt.

Aus Gl. 10.17 folgt ferner:

(10.18) $W = P^L Q^L + C$.

Bei negativer Korrelation zwischen Preis- und Mengenmesszahlen (was die Regel ist) gilt also $P^L Q^L > W$ und $P^P Q^P < W$, was zugleich bedeutet, dass weder der Laspeyres-, noch der Paasche-Index die Faktorumkehrprobe (vgl. Abschn. 3c) erfüllt.

Negative Korrelation bedeutet $P^L > P^P$, was bei rationaler Substitution an einer gegebenen Nachfragekurve der Fall ist. Weichen die Haushalte einer Preissteigerung in der Weise aus, dass sie die nachgefragte Menge eines im Preis (stärker) gestiegenen Gutes reduzieren im Vergleich zu einem im Preis gesunkenen (oder weniger stark gestiegenen) Gut, so ist $P^L > P^P$. Wenn aber (kurzfristig) keine Substitution möglich ist (Mieten, Kfz usw.) oder sich die Nachfragekurven wegen Einkommenssteigerung "nach außen verschieben", so kann auch $P^L < P^P$ sein, wie dies für entsprechende Teilindizes des Preisindexes für die Lebenshaltung auch durch Parallelrechnungen von P^L und P^P in der amtlichen Statistik empirisch festgestellt wurde. Man kann diesen auch "Laspeyres-Effekt" genannten Sachverhalt, dass nämlich i.d.R. gilt $P^L > P^P$ auch mit der Theorie des Nutzenindexes begründen (vgl. Abschn. 3d und Beispiel 10.5).
In den Abschnitten 3d und 4 werden noch weitere Unterschiede und Gemeinsamkeiten der beiden Indizes gezeigt.

Beispiel 10.5

Die folgende Aufgabe demonstriert die Größenbeziehung $P^L > P^P$ und deren Begründung mit der "rationalen Substitution":
Gegeben seien die folgenden Preise und Mengen für zwei Waren A und B zu zwei Zeitpunkten sowie alternative Mengen zur Zeit t, nämlich entweder die Mengen q_{1t} oder q_{2t}:

Ware	Preise		Menge	Mengen zur	
	0	t	0	q_{1t}	q_{2t}
A	20	40	60	40	80
B	45	30	40	60	30

Man beachte, dass die Ware A teurer und die Ware B billiger geworden ist und berechne P^L sowie zweimal P^P, einmal mit den Mengen q_{1t} und einmal mit den Mengen q_{2t}.

Lösung 10.5:

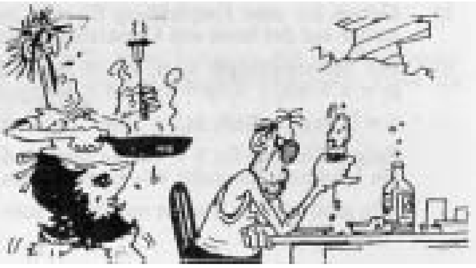
a) Mit den Mengen q_{1t}: $P^L = 3600/3000 = 1{,}2$ (also 120%) und $P^P = 3400/3500 = 0{,}9714$ (wenn das Basisjahr 100 gesetzt wird, ist also $P^P = 97{,}1$); mithin ist $P^L > P^P$, denn den Preismesszahlen 2 und 2/3 (für A und B) stehen die Mengenmesszahlen 2/3 und 1,5 gegenüber: die teurer gewordene Ware A wird weniger und die billiger gewordene Ware B wird mehr konsumiert (rationale Substitution). Die Lebenshaltungskosten sind um 13,3% gestiegen ($W_{0t} = 3400/3000 = 1{,}133$), die Preise - gemessen an P^L - dagegen um 20%.

b) Mit den Mengen q_{2t}: P^L bleibt hiervon unberührt und für P^P erhält man jetzt $P^P = 4100/2950 = 1{,}390$ und es gilt anders als oben : $P^L < P^P$. Die teurer (billiger) gewordene Ware A (B) wird mehr (weniger) konsumiert. Die Lebenshaltungskosten sind um 36,7% gestiegen (W_{0t} = 4100/3000 = 1,3667).

Beispiel 10.6:

Der Haushalt des arbeitslosen Diplom-Kaufmanns K aus E (vgl. Bild) konsumiere nur zwei Waren A und B. Über Preise und Mengen sei folgendes bekannt

Ware	Preise 0	Preise t	Mengen 0	Mengen t
A	10	12	30	20
B	20	16	15	q_{Bt}



Wie groß muss q_{Bt} sein, wenn $P^P < P^L$ und wenn $P^P > P^L$ sein soll? Interpretieren Sie das Ergebnis!

Lösung 10.6:

Die Zahlen sind so gewählt, dass $P^L = 1$ (also 100%) ist. Man sieht leicht, dass gilt:

- $P^P < 1$ verlangt $q_{Bt} > 10$ (Beispiel: q_{Bt}= 30 führt zu $P^P = 0,9$)
- und entsprechend $P^P > 1$ bedeutet $q_{Bt} < 10$ (Beispiel: q_{Bt}= 10/3 = 3,33 führt zu $P^P = 1,1$)

Weitere Bemerkungen zum Beispiel 10.6:

Die Ausgabenanteile zur Basiszeit für die Waren A und B betragen jeweils ½. Somit ist $P^L = ½·1,2 + ½·0,8$. Der Paasche-Preisindex kann auch als arithmetisches Mittel der Preismesszahlen, gewogen mit den "hybriden" (vgl. Übers. 10.1), bzw. "realen" Ausgabenanteilen $p_0q_t / \Sigma p_0q_t$ aufgefaßt werden. Mit q_{Bt} = 10 erhält man für die so definierten Ausgabenanteil ebenfalls ½. Ist dagegen q_{Bt} > 10, so ist der reale Ausgabenateil für die billiger gewordene Ware B größer als ½, für q_{Bt} < 10 ist er dagegen kleiner als ½. Der erste Fall beinhaltet die oben so bezeichnete "rationale Substitution". Man beachte, dass $P^P < P^L$ nicht verlangt, dass von der billiger gewordenen Ware B zur Zeit t absolut mehr (und von der teuerer gewordenen Ware A absolut weniger) konsumiert werden muss. Es reicht, dass die Mengenmesszahl von B größer ist als diejenige für A.

3. Theorie und Axiomatik der Indexzahlen

a) Formale und ökonomische Theorie der Indexzahlen

Bei jeder praktischen Indexberechnung in der Wirtschaftsstatistik sind die folgenden vier Probleme zu lösen:

1. Auswahl der Reihen, d.h. es muss festgelegt werden, welche Güter hinsichtlich Art und Qualität in den Index einzubeziehen sind. Die "Zusammenfassung" der Einzelreihen zu einem Index muss sachlich "sinnvoll" sein (Problem der Repräsentativität des Warenkorbs).
2. Wahl des Wägungsschemas (der Art der Gewichte). Ein Beispiel: Sollen Aktienkurse im Aktienindex mit dem Stammkapital oder mit den Börsenumsätzen oder mit dem Eigenkapital der Gesellschaften gewogen werden?
3. Wahl des Basisjahres: Es ist unmittelbar einleuchtend, dass man vermeiden sollte, ein extrem "gutes" oder "schlechtes" Jahr als Basisjahr auszuwählen. Die Regel ist, ein Normaljahr zu wählen (schon wegen saisonaler Schwankungen wird - auch bei einem monatlich zu berechnenden Index - i.d.R. nicht ein Basismonat sondern ein Basisjahr gewählt).
4. Wahl der Indexformel.

Aufgabe der **formalen Indextheorie** ist es, vor allem das Problem Nr. 4 zu lösen durch Entwicklung von Bewertungskriterien für Indexformeln. Dieser Teil der Indextheorie hat jedoch auch Grenzen. Die formale Theorie berücksichtigt nicht die inhaltliche (ökonomische) Interpretierbarkeit und Aspekte der praktischen Durchführbarkeit der Indexberechnung oder z.B. das Kriterium der Verständlichkeit der Indexaussage. Sie bedarf deshalb der Ergänzung durch eine **ökonomische Theorie der Indexzahlen**.

Die formale Theorie war zunächst eine systematische, aber kaum theoriegeleitete Suche nach einem "idealen Index". Schon 1922 stellte Irving Fisher 134 mögliche Indexformeln zusammen. Fisher begann bereits, axiomatisch vorzugehen und aus formalen Eigenschaften von Indexzahlen Gütekriterien (Postulate) zu entwickeln (sog. Proben). Man erkannte jedoch früh, dass Kriterien dieser Art häufig nur aus Plausibilitätserwägungen hergeleitet wurden, dass sie nicht widerspruchsfrei sind und dass sie ökonomische Abhängigkeiten zwischen Preisen, Mengen und Einkommen ignorieren. Letztere sind vor allem Gegenstand der ökonomischen Theorie der Indexzahlen. Konkrete Probleme, denen sie ihre Entstehung verdankt, traten in Inflationszeiten auf: Wie stark müssen die Einkommen steigen, um ein Absinken des Lebensstandards (verstanden als Realeinkommen) zu verhindern? Die Bezugsgröße "Lebensstandard" oder besser "Nutzen" (als Konstrukt der

Wirtschaftstheorie) ist kennzeichnend für die ökonomische Theorie der Indexzahlen, während sich die formale Indextheorie auf mathematische Eigenschaften der Indexfunktion beschränkt.

b) Axiomatik der Preisindexzahlen

In der folgenden Übers. 10.4 werden zunächst die fünf Axiome, denen ein Preisindex genügen sollte vorgestellt und sie werden dann anschließend ausführlich kommentiert.

Übersicht 10.4: Axiomensystem von Eichhorn und Voeller

Notation: Preis- und Mengenvektoren (jeweils n Komponenten [Waren]) $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{q}_0$, $\mathbf{p}_t$, $\mathbf{q}_t$. Subskript für die Warenart: i = 1,2,...,n. Die Indexfunktion P: $\mathbb{R}^{4n} \rightarrow \mathbb{R}$ sollte danach die folgenden Axiome erfüllen:

P1: Monotonie a)	$P(\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_t^{*)}) > P(\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_t)$ wenn $\mathbf{p}_t^* > \mathbf{p}_t$ und für mindestens eine Ware i gilt: $p_{it}^* > p_{it}$
b)	$P(\mathbf{p}_0^*,\mathbf{p}_t) < P(\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_t)$ analog: $\mathbf{p}_0^* > \mathbf{p}_0$ und $p_{i0}^* > p_{i0}$ für mindestens ein i (eine Ware)
P2: Lineare Homogenität[a)]	$P(\mathbf{p}_0,\lambda\mathbf{p}_t) = \lambda P(\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_t)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}_+$
P3: Identität[b)]	$P(\mathbf{p}_t,\mathbf{p}_0) = 1$ wenn $p_{it} = p_{i0}$ für alle i
P4: Dimensionalität	$P(\lambda\mathbf{p}_0,\lambda\mathbf{p}_t) = P(\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_t)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}_+$
P5: Kommensurabilität	$P(\mathbf{A}\mathbf{p}_0, \mathbf{A}\mathbf{p}_t, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{q}_0, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{q}_t) = P(\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_t,\mathbf{q}_0,\mathbf{q}_t)$ mit $\mathbf{A} = \mathrm{diag}(\alpha_1,\alpha_2,..., \alpha_n)$ und $\alpha_i > 0$,

a) Unter Homogenität vom Grade -1 versteht man die Forderung $P(\lambda\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_t) = P(\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_t)/\lambda = \lambda^{-1}P(\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_t)$. Sie ist erfüllt, wenn P2 und P4 gelten.

b) Axiome P2 und P3 stellen zusammen sicher, dass die sog. Proportionalitätsprobe (vgl. unten Bemerkung Nr. 4) erfüllt ist.

<u>Bemerkungen zu den Axiomen:</u>

1. Ein Axiomensystem grenzt eine mehr oder weniger weite Klasse von Indexfunktionen ab. Es ist z.T. eine "Geschmacksache" wie weit die Grenzen gezogen werden. Von den gleichen Autoren gibt es auch ein System mit vier Axiomen. Eine Axiomatik sollte <u>widerspruchsfrei</u> und <u>unabhängig</u> sein. Widerspruchsfreiheit ist gegeben, wenn es Formeln gibt, die in der Tat alle Axiome erfüllen. Lassen sich Formeln finden,

die je 4 der 5 Axiome erfüllen, das verbleibende fünfte aber nicht, dann ist die Unabhängigkeit bewiesen.

2. Die Axiome P1 bis P4 gelten auch für Preisindizes, die nur von den beiden Preisvektoren abhängen, also z.B. ungewogene Mittelwerte von Preismesszahlen, bei denen keine Mengenvektoren auftreten (mit denen gewichtet wird). Man beachte, dass generell keine Aussagen über die Gewichtvektoren $\mathbf{q}_0$ und $\mathbf{q}_t$ gemacht werden, wenn man von Axiom P5 absieht.

3. Nach Axiom P1 gilt: zunehmende Preise der Berichtsperiode (Basisperiode) müssen auch zu einer Zunahme (Abnahme) des Indexes führen, was offensichtlich eine sehr plausibel erscheinende Forderung ist. Eine spezielle Forderung ist die **Additivität**.

   Sie bedeutet in der Notation der Übersicht 10.4:

   Fall a) unterschiedliche Preise in der Berichtsperiode:
   $P(\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_t^{*)}) = P(\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_t) + P(\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_t^{+})$ wenn für die Vektoren $\mathbf{p}_t^{*},\mathbf{p}_t$ und $\mathbf{p}_t^{+}$ gilt: $\mathbf{p}_t^{*} = \mathbf{p}_t + \mathbf{p}_t^{+}$ und entsprechend

   Fall b) unterschiedliche Preise in der Basisperiode:

   $[P(\mathbf{p}_0^{*},\mathbf{p}_t)]^{-1} = [P(\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_t)]^{-1} + [P(\mathbf{p}_0^{+},\mathbf{p}_t)]^{-1}$ wenn für die Vektoren $\mathbf{p}_0^{*},\mathbf{p}_0$ und $\mathbf{p}_0,^{+}$ gilt: $\mathbf{p}_0^{*} = \mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_0^{+}$.

   Man erkennt leicht, dass die Formulierung der Monotonieeigenschaft in Übers. 10.4 allgemeiner gehalten ist, dass also die Additivität ein Spezialfall hiervon ist. Im Beispiel 10.7 wird gezeigt, dass die Laspeyres- und die Paasche-Formel die Additivität erfüllen. Man sieht auch, dass Additivität lineare Homogenität (Axiom P2) impliziert (aber nicht umgekehrt). Der auf einer geometrischen Mittelung von P^L und P^P beruhende "Idealindex" von Fisher P^F erfüllt P2 (und auch P3 und damit auch die Proportionalitätsprobe), er ist aber nicht additiv (anders dagegen der arithmetisch gemittelte Index von Drobisch, der alle diese Axiome erfüllt).

4. P2 besagt, wenn z.B. gilt $\lambda = 1/N$ (bei N Personen), dass es irrelevant ist, ob sich eine Ausgabe auf alle N Personen bezieht, oder ob sie "pro Kopf" gerechnet ist. Aus der linearen Homogenität folgt in Verbindung mit der Forderung der Identität (Axiom P3) die sog. **Proportionalitätsprobe** (nach I. Fisher):

   Wenn sich alle Preise ver-λ-fachen, also für alle i = 1,2,...,n Waren gilt $p_{it} = \lambda p_{i0}$, dann soll der Preisindex den Wert λ annehmen. Es ist offensichtlich, dass z.B. der für die Praxis besonders bedeutsame Index nach Laspeyres diese Probe erfüllt. Steigen beispielsweise (verglichen mit der Basisperiode) alle n Preise um jeweils 20%, so ist $P^L = 1{,}2$ (also 120%).

5. Die trivial erscheinende Identitätsforderung P3 bedeutet, dass sich der Preisindex **nicht** ändert (100% beträgt), wenn sich **kein** Preis ändert. Ein Wertindex W_{0t} muss P3 nicht erfüllen. Man kann aber auch "umgekehrt" fordern, dass ein Index nicht 1 sein (bleiben) sollte, wenn **alle** Preise steigen. Das ist jedoch in der Monotonieforderung (P1) impliziert und wird von allen Indizes, die Mittelwerte von Preismesszahlen sind, erfüllt.

6. Gelten die Axiome P1 bis P3, so ist sichergestellt, dass der so konstruierte Preisindex die Eigenschaften eines Mittelwerts von Preismesszahlen hat, d.h. insbesondere dass er einen Wert annimmt, der zwischen der kleinsten und der größten Preismesszahl liegt.

7. P4 stellt die Unabhängigkeit von der Währungseinheit der Preisnotierung sicher (es ist irrelevant, ob z.B. die Preise in DM oder in Pfennigen oder in US$ notiert sind).

8. Entsprechendes leistet P5 hinsichtlich der Mengeneinheit, auf die sich die Preisnotierung zu den Zeiten 0 und t bezieht. Kommensurabilität bedeutet, dass ein Preisindex unabhängig davon ist, in welcher Mengeneinheit die Preise notiert sind. Wie bereits dargestellt, erfüllt der Index von Dutot (oder jeder andere auf Summen und Durchschnitte von Preisen beruhende Index) das Axiom P5 nicht.

   Die Diagonalmatrix **A**, mit den Elementen α_i (wie oben definiert), bedeutet, dass sich z.B. der Preis der i-ten Ware verdoppelt (α_i=2) , weil sich die zugrundeliegende Menge halbiert (z.B. Übergang von Pfund- zu Kilo-Preisnotierung). Es wird davon ausgegangen, dass sich die einzelnen α_i unterscheiden. Sind sie alle gleich ($\alpha_i = \alpha$ für alle i), so wäre dies eine sehr viel schwächere Forderung, nämlich die quantity dimensionality im Unterschied zur price dimensionality (P4), der auch Indizes genügen, die das Axiom P4, nicht aber P5 erfüllen, also z.B. der Dutot-Index.

9. Sind PI_1,..., PI_k Preisindizes, die alle Axiome dieses Axiomensystems erfüllen, dann ist in gewissen Fällen auch eine Funktion dieser Indizes, z.B. ein Potenzmittel der Preisindizes PI_1,..., PI_k ein Preisindex, der alle Axiome erfüllt.

10. Das Axiomensystem schließt sachlich (ökonomisch) gesehen ziemlich unsinnige Indexformeln nicht aus (es ist ja auch nur eine Grundlage für die **formale** Theorie der Preisindexzahlen) und Kriterien, wie ökonomische Interpretierbarkeit und Verständlichkeit der Indexaussage sind nicht maßgeblich. Aber was heißt "sachlich unsinnig"? Man kann hier verschiedene Maßstäbe ansetzen. Begnügt man sich mit der Mittelwerteigenschaft (vgl. Bem. 6), so wäre jeder Index "sinnvoll" der diese Axiome erfüllt, was m.E. zu weitgehend ist.

Beispiel 10.7:

Man zeige, dass der Laspeyres-Preisindex die Additivität erfüllt.

Lösung 10.7:

Wir beschränken uns auf einen Preisindex mit zwei Waren. Dann gilt mit den Preisdifferenzen d_1 und d_2 für die Laspeyres-Preisindizes:

$$P(\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_t^*) = \frac{(p_{1t} + d_1)q_{1t} + (p_{2t} + d_2)q_{2t}}{p_{10}q_{10} + p_{20}q_{20}}$$

$$P(\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_t) = \frac{p_{1t}q_{1t} + p_{2t}q_{2t}}{p_{10}q_{10} + p_{20}q_{20}} \qquad P(\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_t^+) = \frac{d_1q_{1t} + d_2q_{2t}}{p_{10}q_{10} + p_{20}q_{20}}$$

Man erkennt sofort, dass gilt $P(\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_t^*) = P(\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_t) + P(\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_t^+)$.
In entsprechender Weise kann man auch zeigen, dass Additivität bei Erhöhung der Basispreise um d_1 bzw. d_2 erfüllt ist und dass der Paasche-Preisindex ebenfalls der Monotonieforderung im engeren Sinne der Additivität nachkommt.

c) Andere wünschenswerte Eigenschaften von Indexzahlen

Die folgenden drei Eigenschaften von Messzahlen werden von Indexzahlen nicht unbedingt erfüllt:

1. Zeitumkehrbarkeit
2. Zirkularität
3. Faktorumkehrbarkeit

Während Messzahlen diese Forderungen stets erfüllen sind sie bei Indizes, also aggregierten Messzahlen in der Regel nicht erfüllt.

zu 1: Zeitumkehrbarkeit

Hierunter versteht man dass die Vertauschung von Basis- und Berichtsperiode zum reziproken Preisindex führt

(10.19) $P_{0t}P_{t0} = 1$ (Zeitumkehrbarkeit).

Für den Laspeyres-Preisindex gilt im allgemeinen $P^L_{0t}\,P^L_{t0} > 1$ und für den Paasche-Preisindex $P^P_{0t}\,P^P_{t0} < 1$. Beide Indexformeln erfüllen also die Zeitumkehrbarkeit (time reversal) nicht.
Wie man leicht sieht, gilt jedoch

(10.20) $P^L_{0t}\,P^P_{t0} = P^P_{0t}\,P^L_{t0} = 1$.

In diesem Sinne ist die Laspeyres-Formel die "time antithesis" (Irving Fisher) der Paasche-Formel. Gl. 10.20 gilt entsprechend für Mengenindizes von Laspeyres und Paasche.
Die obige Feststellung, dass im allgemeinen - nämlich bei nicht zu großen Unterschieden zwischen den Warenkörben der Basis- und Berichtszeit - gilt $P^L_{0t}\,P^L_{t0} > 1$ und $P^P_{0t}\,P^P_{t0} < 1$, hängt mit der Art der Mittelwertbildung zusammen, wie im folgenden gezeigt wird. Bei ungewogenen Mittelwerten von n Messwerten $x_1, x_2, ..., x_n$, etwa dem arithmetischen Mittel
$A(x_i)$, dem harmonischen Mittel $H(x_i)$ und dem geometrischen Mittel $G(x_i)$ gelten die folgenden, in Übersicht 10.5 zusammengestellten Beziehungen zu den entsprechenden Mittelwerten der reziproken Werte x_i^{-1}.

Übersicht 10.5

Zusammenhänge zwischen Mittelwerten der Messwerte und den Mittelwerten der reziproken Messwerte

$A(x_i^{-1}) > [A(x_i)]^{-1}$	$G(x_i^{-1}) = [G(x_i)]^{-1}$	$H(x_i^{-1}) < [H(x_i)]^{-1}$
arithmetisches Mittel	geometrisches Mittel	harmonisches Mittel

Ein Preisindex als **un**gewogenes geometrisches Mittel der Preismesszahlen würde also stets die Zeitumkehrprobe erfüllen.

Der Begriff Zeitumkehrprobe ist zu eng, weil Indizes z.B. auch für den räumlichen Vergleich benutzt werden. Im allgemeinen Sinne ist mit der Zeitumkehrprobe die Umkehrung der Vergleichsrichtung gemeint. Gerade im internationalen Vergleich ist der "reversal-test" auch im besonderen Maße motiviert: es gibt meist keinen Grund, ein bestimmtes Land als Basisland zu bevorzugen (Kriterium der "Basislandinvarianz"), während es im zeitlichen Vergleich die eindeutige zeitliche Abfolge ist, die es sinnvoll erscheinen läßt, 0 als Basis- und t als Berichtsperiode zu wählen und nicht umgekehrt.
Die Zeitumkehrprobe ist ein zweifelhaftes Kriterium, denn es ist unmittelbar einsichtig, dass eine Umkehrung der Vergleichsrichtung i.d.R. auch mit einer "Umkehrung" des Warenkorbs verbunden ist und warum sollte $P^L{}_{,t0} = (P^L{}_{,0t})^{-1}$ sein, wenn $P^L{}_{,0t}$ und $P^L{}_{,t0}$ Indizes
mit verschiedenen Warenkörben sind. Es ist deshalb auch nicht überraschend, dass Indizes, deren Wägungsschema durch Mittelwertbildung entstehen (vgl. Übers. 10.2), der Zeitumkehrprobe genügen.

zu 2: Zirkularität (Verkettbarkeit)

Mit dieser Forderung (auch Transitivität genannt, oder "Rundprobe" ["circular test" nach I. Fisher]) ist gemeint, dass für beliebige, aber verschiedene Perioden, etwa für 0 < s < t (die Reihenfolge ist nicht zwingend, es könnte also auch 0 > s > t sein) gelten soll:

(10.21) $P_{0t} = P_{0s}P_{st}$ (Verkettbarkeit).

Gl. 10.21 ist auch die Basis der Verkettung und Umbasierung von Indexzahlen (vgl. Abschn. 4). Ein Index, der nicht verkettbar ist, ist genau genommen auch nicht umbasierbar. Verkettbarkeit ist die strengere Forderung als Zeitumkehrbarkeit: Ist ein Index verkettbar, dann gilt auch die Zeitumkehrbarkeit, nicht aber umgekehrt. So erfüllt z.B. Fishers Idealindex P^F die Zeitumkehrbarkeit, nicht aber die Transitivität.

Aus Identität und Transitivität folgt Zeitumkehrbarkeit: Setzt man in Gl. 10.21 einfach t=0, so erhält man $P_{00} = P_{0s}P_{s0} = 1$.
Eine Produktbildung gem. Gl. 10.21 soll ganz allgemein gelten:

$$\boxed{\text{für} \quad 0 < m < n \ldots < r < s < t \quad \text{soll gelten} \quad P_{0t} = P_{0m}P_{mn} \ldots P_{rs}P_{st}.}$$

Weder P^L noch P^P erfüllen die Verkettbarkeit (vgl. Bsp. 10.7).
Der Grund weshalb Zirkularität eines Indexes gewünscht wird ist, dass dann

1) Veränderungsraten (Wachstumsfaktoren) unabhängig von der gewählten Basis sind. Gilt Gl. 10.21 so ist nämlich

$$\frac{P_{03}}{P_{02}} = \frac{P_{01}P_{12}P_{23}}{P_{01}P_{12}} = \frac{P_{13}}{P_{12}} = P_{23} \text{ da auch } P_{13}=P_{12}P_{23};$$

2) unmittelbar die Wachstumsrate (gegenüber der Vorperiode) abzulesen ist;

3) geltend gemacht wird, dass die in der gesamten Zeitreihe enthaltenen Information besser ausgenutzt werde als durch einen Zwei-Perioden-Vergleich;

4) der verkettbare Index (Kettenindex) laufend Veränderungen der Verbrauchsgewohnheiten berücksichtigen könne.

Die Forderung nach einem Kettenindex (chain based index im Unterschied zu fixed based index) ist gleichwohl nicht überzeugend, weil das Prinzip des reinen Preisvergleichs nicht erfüllt wird[1]. Beim internationalen Vergleich bedeutet die Transitivität der Paritäten: ein direkter Vergleich zweier Länder soll zum gleichen Ergebnis führen wie ein indirekter (über ein drittes Land), da sonst keine Eindimensionalität der Paritäten gegeben ist (Transitivität ist ja die Eigenschaft der Ordnungsrelation, also Bedingung dafür, dass Paritäten entlang einer Dimension angeordnet werden können).

Beispiel 10.8:

Es sei der in folgender Tabelle beispielhaft dargestellte Warenkorb, bestehend aus Wasser, Bier und Milch mit den Preisen (pro l) und die Pro-Kopf Verbräuchen (in l) in den Jahren von 1988 bis 1991 gegeben.

---

[1] vgl. von der Lippe, P.: Wirtschaftsstatistik, a.a.O.

	1988		1989		1990		1991	
	q	p	q	p	q	p	q	p
Wasser	300	0,80	310	0,85	315	0,90	320	0,95
Bier	220	1,80	220	1,90	225	2,00	230	2,10
Milch	110	1,20	120	1,30	130	1,40	135	1,45

Man zeige anhand dieses Beispiels, dass der Laspeyres- und der Paasche-Preisindex nicht verkettbar sind.

Lösung 10.8:

Man erhält folgende Laspeyres-Indizes:

$P^L_{01} = 1{,}0625$; $P^L_{12} = 1{,}0591$; $P^L_{23} = 1{,}0489$; $P^L_{03} = 1{,}180339$.

Setzt man nun diese Werte in Gleichung (10.21) ein, ergibt sich als Produkt der Verkettung $P^*_{03} = 1{,}0625 \cdot 1{,}0591 \cdot 1.0489 = 1{,}180320$. Da P^*_{03} verschieden von P^L_{03} (=1,180339) ist, erfüllt P^L und, wie leicht zu zeigen ist, auch P^P die Zirkularität nicht.

zu 3: Faktorumkehrbarkeit (Faktorumkehrprobe)

Die Faktorumkehrprobe ist vor allem damit motiviert, dass für einen einzelnen Wert und die entsprechenden Messzahlen jederzeit gilt, dass ein Wert (bzw. einer Wertmesszahl) das Produkt aus Menge und Preis ist. Aber, was für eine einzelne, die i-te Ware gilt, nämlich

$$\frac{p_{it}q_{it}}{p_{i0}q_{i0}} = \frac{p_{it}}{p_{i0}} \cdot \frac{q_{it}}{q_{i0}}$$

muss nicht notwendig auch für ein Aggregat von allen n Waren, also auf der Ebene der Indizes gelten. Die Zerlegbarkeit der Wertsteigerung eines Aggregats in eine Komponente des reinen Preis- und eine des reinen Mengeneinflusses, so dass für Indizes

$$\boxed{(10.22) \quad W_{0t} = P_{0t}Q_{0t} \quad \text{(Faktorumkehrprobe)}}$$

gilt, ist ein Hauptproblem der Indextheorie.

Diese Zerlegbarkeit der Wertsteigerung in eine Preis- und Mengenkomponente ist das Ziel der Faktorumkehrprobe. Weder der Laspeyres- noch der Paasche-Preisindex erfüllen die Faktorumkehrprobe. Für Laspeyres-Indizes gilt

$$\boxed{(10.18) \quad W = P^L Q^L + C,}$$

wobei - wie oben gezeigt - die Größe C die Kovarianz zwischen Preis- und Mengenmesszahlen darstellt. Es gilt jedoch Gl. 10.14 also $W = P^L Q^P = P^P Q^L$. In diesem Sinne ist die Laspeyres-Formel die "factor antithesis" (I. Fisher) der Paasche Formel. Fishers Ideal-Index P^F und der analog definierte Mengenindex Q^F erfüllen jedoch den "factor reversal" test (Faktorumkehrprobe).

d) Nutzenindex

Aus der mikroökonomischen Theorie ist das Problem bekannt, wie ein Haushalt bei gegebener Nutzenfunktion $U(q_1,...,q_n)$ und gegebenen Preisen $p_1,...,p_n$ einen bestimmten Nutzen U_0 mit minimalen Ausgaben erreichen kann. Die so im Haushaltsgleichgewicht eindeutig bestimmten Ausgaben R sind eine Funktion des Nutzens U_0 und des Preisvektors. Verschiedene Preisvektoren $\mathbf{p}_0$ und $\mathbf{p}_t$ führen zu unterschiedlichen Güterkombinationen (Mengenvektoren $\mathbf{q}_0$ und $\mathbf{q}_t$), die jedoch bei gleichem Nutzen auf einer Indifferenzkurve (bei n=2 Gütern), bzw. allgemein, einer Indifferenzfläche (n-1 dimensionale Hyperebene) liegen. Mit diesen Vorbemerkungen kann man den Nutzenindex definieren, der im Zentrum der ökonomischen Theorie der Preisindizes steht.

Def. 10.5: Nutzenindex

Der Nutzenindex (constant utility index, true cost of living index) ist das Verhältnis der bei verschiedenen Preisen für den gleichen Nutzen erforderlichen minimalen Ausgaben:

$$\boxed{(10.23) \quad P^N_{0t}(U_0) = \frac{R(U_0,\mathbf{p}_t)}{R(U_0,\mathbf{p}_0)}}$$

Bemerkungen zu Definition 10.5

1. Man beachte: Gl. 10.23 ist die Definition eines theoretischen Konstrukts, nicht aber eine operationale Rechenvorschrift, um den Nutzenindex empirisch zu bestimmen. Der Nutzenindex mißt die Veränderung der Kosten, die zur Aufrechterhaltung eines gegebenen Nutzenniveaus erforderlich sind (daher auch "true cost of living index"), was in der Regel bedeutet, dass Preis- und Mengenvektor veränderlich sind, während letzterer ja beim Laspeyres- und Paasche-Preisindex für die Vergleichsperioden gleich ist. Reiner Preisvergleich bedeutet bei P^L und P^P gleiche **Mengen**, bei P^N gleicher **Nutzen**. Die zum gleichen Nutzen führenden Mengen sind in verschiedenen Preissituationen nicht gleich: Preisänderungen lösen einen Substitutionseffekt aus. P^N mißt die Einkommensentschädigung für eine durch den Substitutionseffekt entstandene Ausgabenveränderung.

2. Da die Nutzenfunktion $U(\mathbf{q})$ des Gütervektors $\mathbf{q}$ und die hieraus abgeleitete Ausgabenfunktion $R(U,\mathbf{p})$ nicht empirisch bestimmbar sind, ist der Nutzenindex nur ein

theoretisches Konstrukt; P^N ist nicht tatsächlich nach Gl. 10.21 berechenbar. Insbesondere führt auch der Ausgabenvergleich auf der Basis des Nutzens U_t

$$(10.24) \quad P_{0t}^N(U_t) = \frac{R(U_t,\mathbf{p}_t)}{R(U_t,\mathbf{p}_0)}$$

i. d. R. nicht zum gleichen Ergebnis wie Gl. 10.23.

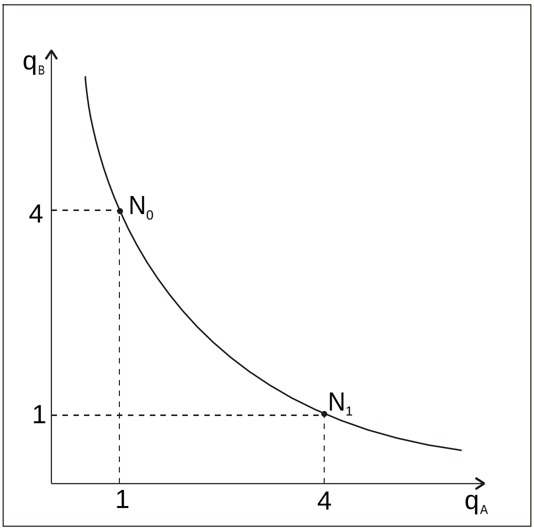
Beispiel 10.9:

Ein Haushalt habe eine Indifferenzkurve (vgl. Abb. 10.1) in der Art, dass er sich bezüglich der Kombinationen $q_A = 1$ und $q_B = 4$ zur Zeit t = 0 (Punkt N_0 auf der Indifferenzkurve) und $q_A = 4$ und $q_B = 1$ (zur Zeit t = 1, Punkt N_1) indifferent verhält. Für die Preise der beiden Güter möge zu den beiden Zeitpunkten gelten:

Gut	t=0	t=1
A	4	2
B	2	4

Berechnen Sie den Preisindex nach Laspeyres und nach Paasche sowie die Zunahme der Gesamtausgaben (Kostenindex)!

Abb. 10. 1



Lösung 10.9:

Die Zahlen und die Gestalt der Indifferenzkurve sind so gewählt, dass die Ausgaben für die Güterkombinationen N_0 und N_1 gleich (nämlich 12) sind. Der Kostenindex (Wertindex), der in diesem Fall zugleich ein Nutzenindex (P^N) ist (da N_0 und N_1 auf einer
Indifferenzkurve liegen) ist also 12/12 = 1. Für P^L erhält man 18/12 = 1,5 und für P^P = 12/18 = 2/3 so dass $P^L > P^N > P^P$. Die hier dargestellte Situation zeigt auch, warum bei einem (vom Ursprung aus gesehen) konvexen Verlauf der Indifferenzkurve $P^L > P^P$ sein muss.

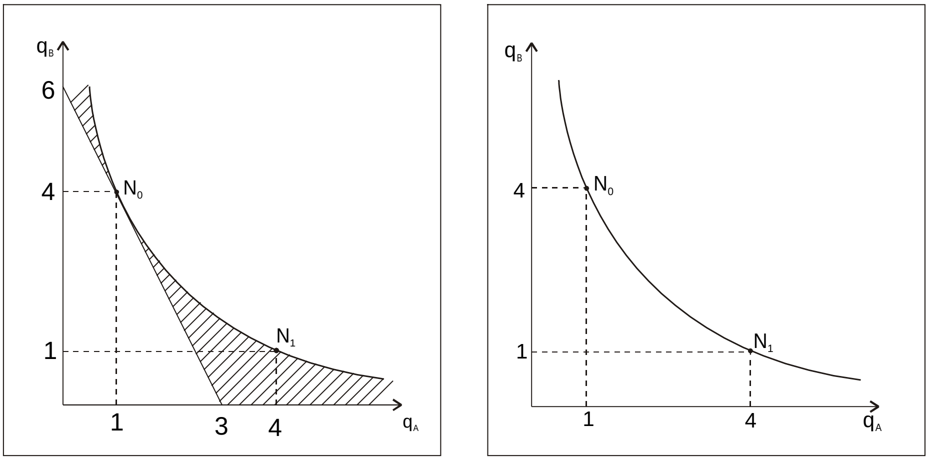
Die Bilanzgerade zur Zeit t=0 tangiert die Indifferenzkurve in N_0. Sie hat die Funktion q_B
$= 6\text{-}2q_A$. Jede Güterkombination auf dieser Geraden führt zu Ausgaben in Höhe von 12 bei den Preisen des Preisvektors $\mathbf{p}_0$ also $\Sigma p_0q_0 = 12$. Dass sich die Indifferenzkurve von der Bilanzgeraden (Iso-Ausgabenkurve) entfernt, was in Abb. 10.2 (links) durch Schraffur angedeutet wird, bedeutet dass bei gegebener Menge q_A die Menge q_B auf der Indifferenzkurve größer sein muss als auf der Bilanzgeraden, also $q_{Bt} > 6 - 2q_{At}$ so dass $\Sigma p_0q_1 > \Sigma p_0q_0$.

Entsprechendes gilt für die Ausgaben zur Zeit 1. Die konstante Ausgabe von 12 bei Preisen von t bedeuten $q_B = 3 - ½\ q_A$ (Geradenfunktion, Abb. 10.2, rechts). Es gilt $\Sigma\ p_1q_1$

$< \Sigma p_1 q_0$, da ja der Punkt M (mit $q_A = 1$ und $q_B = 3 - ½ = 2{,}5$) unter dem Punkt N_0 ($q_A=1$ und $q_B = 4$) liegt.

Aus $\Sigma p_0 q_1 > \Sigma p_0 q_0$ und $\Sigma p_1 q_1 < \Sigma p_1 q_0$ folgt dass $P^P < P^L$, denn der Nenner von P^P ist größer und der Zähler kleiner als der von P^L. Erheblich komplizierter wird die Betrachtung, wenn verschiedene Nutzenniveaus verglichen werden.
Es gilt dann $P^P < P_{0t},^N(U_t)$ und $P_{0t},^N(U_0) < P^L$.

Abb. 10.2



4. Besondere Rechenoperationen mit Indizes

a) Umbasierung und Verkettung

Von Zeit zu Zeit ist es notwendig einen Index von einer alten Indexbasis (0) auf eine neue (aktuellere) Indexbasis (s) umzustellen. Dabei ist zu unterscheiden:

a) Ist die Umstellung mit einer Revision der Reihenauswahl (d.h. bei einem Preisindex: des Preisvektors) und/oder des Wägungsschemas, also der Gewichtung verbunden, so spricht man von einer **Neuberechnung**.

b) Wird der Index dagegen nur von der Basis 0 auf die Basis s mit einer einfachen Rechenoperation (i.d.R. mit dem "Dreisatz") umgerechnet, so spricht man von **Umbasierung**.

Es wird im folgenden (nur zur Veranschaulichung) davon ausgegangen, dass für die Perioden gilt $0 < s < t$ (für die Formeln ist diese Annahme nicht nötig), denn die praktisch relevanten Fälle einer Umbasierung sind meist:

- die Umstellung eines Indexes von einer weiter zurückliegenden Basis (0) auf eine aktuellere (s) oder
- der Vergleich mehrerer Indizes mit verschiedener Basisperiode so, dass alle Indizes die gleiche Basis haben, meist diejenige des Indexes mit der neuesten Basis.

Def. 10.6: Umbasierung

Die Umbasierung eines Indexes (z.B. eines Preisindexes P) mit der Basis 0 auf die Basis s erfolgt mit

$$\boxed{(10.25)\quad P_{st} = \frac{P_{0t}}{P_{0s}} \quad .}$$

Bemerkungen zu Def. 10.6:

1. Werden die Indizes in Prozent ausgedrückt, so ist die rechte Seite der Gl. 10.25 mit 100 zu multiplizieren.

2. Da P_{0s} eine Konstante ist, ist die neue Indexreihe P_{st} ein konstantes Vielfaches (Proportionalitätsfaktor P_{0s}^{-1}) der alten Indexreihe P_{0t}. Denn Gl. 10.25 geht von der Annahme der Proportionalität aus. Löst man $P_{st}/P_{0t} = P_{ss}/P_{0s}$ nach P_{st} auf (unter Berücksichtigung von $P_{ss} = 1$) so erhält man Gl. 10.25.

3. Strenggenommen darf eine Umbasierung nach Gl. 10.25 nur durchgeführt werden, wenn die Zirkularität erfüllt ist, denn es ist leicht zu sehen, dass die Umbasierung nach Gl. 10.25 nur eine Umformung der Gl. 10.21 für die Verkettung darstellt.
Bei einer Umbasierung eines (nicht verkettbaren) Laspeyres-Indexes, wird P_{st} aus Gl. 10.25 i.d.R. nicht mit dem direkt errechneten Ergebnis von $P_{st},^{L}$ übereinstimmen (vgl. Bsp. 10.10). Setzt man in Gl. 10.25 die Laspeyres-Formel ein, so erhält man

$$\frac{P_{0t}}{P_{0s}} = \frac{\dfrac{\Sigma p_t q_0}{\Sigma p_0 q_0}}{\dfrac{\Sigma p_s q_0}{\Sigma p_0 q_0}} = \frac{\Sigma p_t q_0}{\Sigma p_s q_0} \quad \text{statt} \quad P_{st} = \frac{\Sigma p_t q_s}{\Sigma p_s q_s}$$

Die beiden Ergebnisse (Umbasierung und direkte Berechnung) werden sich nur dann wenig unterscheiden, wenn die Struktur der Warenkörbe zur Zeit 0 und zur Zeit s ähnlich ist.

Def. 10.7: Verkettung, splicing

Eine Verkettung von Indexwerten ist die Bildung einer langen Reihe zur Basis 0 aus mehreren verschiedenen (mit verschiedenen Basisperioden) sich überlappenden Indizes unter der Annahme der Proportionalität nach der folgenden Gleichung:

(10.25a) $P_{0t} = P_{0s}P_{st}$ (wobei meist gilt $0 < s < t$) oder
$P_{0t} = P_{0r}P_{rs}P_{st}$ (wenn $0 < r < s < t$)
oder von Periode zu Periode
$P_{0t} = P_{01}P_{12}....P_{t-1,t}$.

Soll die durch Verkettung errechnete Reihe mit einer originär aus den Daten für Preise und Mengen errechneten Reihe übereinstimmen, so ist Verkettbarkeit der Indexformel vorauszusetzen, was für die meisten Indexformeln aber nicht zutrifft.

Bemerkungen zu Def. 10.7:

1. Da Verkettung die Umkehrung der Umbasierung darstellt gelten die Bemerkungen zu Def.10.6 auch hier.

2. Die typische Aufgabenstellung, die eine Verkettung nahelegt ist in Beispiel 10.11 dargestellt. Mehrere Reihen werden i.d.R. zu einer einzigen Indexreihe zusammengefaßt, weil man an der Entwicklung über einen größeren Zeitraum interessiert ist, oder Bruchstellen vermeiden möchte.

3. In der Literatur wird gelegentlich von Verknüpfung gesprochen oder ein Unterschied zwischen Verknüpfung und Verkettung konstruiert, der jedoch weder formal, noch von der Fragestellung her sinnvoll gemacht werden kann. In jedem Fall wird eine Proportionalität aller Indexreihen angenommen, gleichgültig, ob man eine lange Reihe auf der Grundlage einer "alten" Basis errechnet (also eine alte Indexreihe fortführt), oder ob die lange Reihe auf der Grundlage einer "neuen" Basis gebildet werden soll (ob man also die neue Indexreihe zurückrechnet).

Beispiel 10.10:

Man basiere im Bsp. 10.8 den Laspeyres-Preisindex vom Basisjahr 0 auf das Basisjahr 1 um und vergleiche das Ergebnis nach Gl.10.25 mit dem aus den Daten direkt errechneten Ergebnis für $P^L{}_{,1t}$!

Lösung 10.10:

Ausgehend von Beispiel 10.8 erhält man folgende Laspeyres-Indizes:
$P^L{}_{,01} = 1{,}0625$; $P^L{}_{,02} = 1{,}1250$; $P^L{}_{,03} = 1{,}1803$; $P^L{}_{,13} = 1{,}1110$.
Wird gem. Gl. 10.25 auf die Indexbasis 1 umgestellt, so erhält man $P^*{}_{,13} = 1{,}1803/1{,}0625 = 1{,}1108$ statt 1,1110.

Beispiel 10.11:

Gegeben seien Indizes zur Basis 1980, 1985 und 1990

Jahr	Index A	Index B	Index C
1980	100		
1985	120	100	
1986	125	105	
1987		109	
1988		112	
1989		116	98
1990		118	100
1991			103
1992			105

Der Index A wurde ab 1986 nicht mehr fortgeführt, andererseits wurde der Index B nicht für die Zeit vor 1985 zurückgerechnet und der Index C nur für das Jahr 1989 zurückgerechnet. Berechnen Sie eine lange Indexreihe

a) zur Basis 1980 (Fortführung des alten Index A)
b) zur Basis 1990 (Rückrechnung des neuen Index C).

Lösung 10.11:

Die durch Verkettung errechneten Indexwerte haben jeweils das Symbol *.

zu a) Fortführung des Indexes A (oder B)

a1) (Verkettungsperiode jeweils das Basisjahr (also 1985, 1990):

Jahr	Index A*	(= Produkt·100)	Index B*	(=Produkt·100)
1986	126	(=1,20·1,05)		
1987	130,8	(=1,20·1,09)		
1988	134,4	(=1,20·1,12)		
1989	139,2	(=1,20·1,16)		
1990	141,6	(=1,20·1,18)		
1991	145,84	(=1,416·1,03)	121,54	(=1,03·1,18)
1992	148,68	(=1,416·1,05)	123,9	(=1,05·1,18)

a2) andere Möglichkeiten der Verkettung:

Liegt eine Überlappung der Indizes um mehr als eine Periode vor, so kann sich zeigen, dass die Annahme der Proportionalität evtl. gar nicht zutreffend sein muss und man könnte auch eine andere Periode der Verkettung zugrundelegen: Die Zunahme des Indexes A von 1985 auf 1986 beträgt 4,17% (von 120 auf 125), die des Indexes B dagegen 5% (von 100 auf 105). Wird das Jahr 1985 zur Verkettung von A und B benutzt, so muss die fortgeführte Reihe A* für 1986 demnach den Wert 126, statt 125 annehmen (126 ist 5% mehr als 120). Verkettet man den Index A und B zwecks Fortführung des Indexes A zu A* auf der Basis des Jahres 1986 (statt 1985) so ergäbe sich für den fortgeführten Index A*

Jahr	Index A*	statt oben	zu errechnen aus:
1987	129,76	130,8	109(125/105)
1988	133,33	134,4	112(125/105)
1989	138,10	139,2	116(125/105)
1990	140,48	141,6	118(125/105)

b) Rückrechnung des Indexes C durch Verkettung

(d.h. aufgrund der Proportionalität mit Index B in der Zeit 1985-1989 und aufgrund der Proportionalität mit Index A in der Zeit vor 1985)

Jahr	Index C*	(=Produkt 100)
1980	83,333	100(100/120)
1985	84,745	100(100/118)
1986	88,983	105(100/118)
1987	92,373	109(100/118)
1988	94,915	112(100/118)
1989	98,305	116(100/118)

Wie der tatsächliche Wert von Index C für 1989 (nämlich 98) zeigt, ist die Proportionalitätsannahme nicht gerechtfertigt. Man könnte auch hier eine alternative Rückrechnung aufgrund des Stands von 1989 (statt 1990) vornehmen.

b) Aggregation von und Zerlegung in Teilindizes

Ein Index sollte nach einer einfachen Formel in Teilindizes zerlegbar sein. Die Aggregation von Indizes kann an einem einfachen Beispiel gezeigt werden. Angenommen, es seien zwei Teilindizes (Sektorenindizes) zu bilden, der erste aus den Waren A und B, der zweite aus den Waren C und D. Dann gilt für die Laspeyres-Formel

$$P^L = (g_A + g_B)P^L{}_{,1} + (g_C + g_D)P^L{}_{,2} = g_1P^L{}_{,1} + g_2P^L{}_{,2}.$$

Der Gesamtindex ist also ein gewogenes Mittel der Sektorenindizes ($P^L{}_{,1}$ und $P^L{}_{,2}$), wobei als Gewichte die Summen der Ausgabenanteile (g) der in den Sektorenindizes zusammengefaßten Waren an den Ausgaben für alle Waren des Gesamtindexes auftreten. Für die Paasche-Formel ist entsprechend ein harmonisches Mittel zu verwenden mit den aggregierten Gewichten der Berichtsperiode.

Bei der Aggregation von Sektorenindizes zum Gesamtindex gelten also die gleichen Beziehungen (Art des Mittels und der Gewichtung) wie bei der Berechnung eines Indexes aus den Messzahlen. Dies soll im folgenden Beispiel (Bsp.10.12) verifiziert werden.

Beispiel 10.12:

In der oben angegebenen Weise (Zusammenfassung der Waren A und B in dem ersten - und der Waren C und D in dem zweiten Sektorenindex) ist im Beispiel 10.1 zu verfahren. Es sind Laspeyres- und Paasche-Preisindizes für das gesamte Aggregat (alle vier Waren) und für die beiden Teile (Sektoren) zu bilden.

Lösung 10.12:

Gesamtaggregate (vgl. Lösung 10.1) $P^L = 545/370 = 1{,}47297$ und $P^P = 975/665 = 1{,}466165$. Es soll nun gezeigt werden, wie sich die Gesamtindizes aus Teil- (Sektoren) indizes "zusammensetzen".

a) Teilaggregate (Sektorenindizes) nach Laspeyres
   Sektor 1: $P^L{}_{,1} = (3\cdot 25 + 8\cdot 20)/(2\cdot 25 + 4\cdot 20) = 235/130 = 1{,}80769$
   Sektor 2: $P^L{}_{,2} = (9\cdot 30 + 4\cdot 10)/(7\cdot 30 + 3\cdot 10) = 310/240 = 1{,}29167$

Die aggregierten Ausgabenanteile zur Basiszeit lauten 130/370 = 0,351 und 240/370 = 0,649, so dass gilt $P^L = 0{,}351\ P^L{}_{,1} + 0{,}649\ P^L{}_{,2}$ = 1,47297.

b) Die entsprechende Berechnung nach Paasche: zunächst wieder die Berechnung der Sektorenindizes

Sektor 1: $P^P{}_1 = (3\cdot 50 + 8\cdot 30)/(2\cdot 50 + 4\cdot 30) = 390/220 = 1{,}7727$

Sektor 2: $P^P{}_2 = (9\cdot 25 + 4\cdot 90)/(7\cdot 25 + 3\cdot 90) = 585/445 = 1{,}3146$

aggregierte Ausgabenanteile zur Berichtszeit 390/975 = 0,4 und 585/975 = 0,6

$(P^P)^{-1} = 0{,}4(1{,}7727)^{-1} + 0{,}6(1{,}3146)^{-1} = 88/390 + 267/585 = 0{,}6820513 = (1{,}466165)^{-1}$, so dass $P^P = 1{,}466165$.