Kapitel 11: Einführung in die Zeitreihenanalyse

1. Gegenstand und Methoden der Zeitreihenanalyse 393
a) Zeitreihen und Zeitreihenanalyse 393
b) Methoden der Zeitreihenanalyse 396
2. Das Komponentenmodell der Zeitreihenanalyse 397
a) Beschreibung des Modells 397
b) Methoden der Trendbestimmung 401
c) Berechnung der Saisonkomponente 415
d) Integrierte Modelle 420
3. Hinweise auf weiterführende Verfahren 420
a) Exponential Smoothing (exponentielles Glätten) 420
b) Filter, Operatoren, Polynome 429
c) Fourieranalytische Methoden 432

1. Gegenstand und Methoden der Zeitreihenanalyse

a) Zeitreihen und Zeitreihenanalyse

Die Zeitreihenanalyse beschäftigt sich mit Methoden zur Beschreibung von Daten, die zeitlich geordnet sind (d.h. als Zeitreihen vorliegen), bzw. allgemein, bei denen die Reihenfolge der Beobachtungen wesentlich ist.

Die Zeit hat eine natürliche, irreversible Ordnung. Wie immer das Kontinuum "Zeit" durch Zeitpunkte t_0, t_1,... strukturiert wird, es kann nie zweifelhaft sein, ob t_0 zeitlich vor oder nach t_1 kommt. Die Reihenfolge von Beobachtungen (Daten) ist eindeutig und im Falle der Zeitreihenanalyse für die statistischen Berechnungen auch wesentlich (zu berücksichtigen).

Zeitreihen als Daten werden auch in Kap. 9 und 10 (Meßzahlen, Indizes und Wachstumsraten) sowie in Kap. 12 (Zu- und Abgänge) betrachtet. Im Unterschied zu diesen Methoden geht es bei der Zeitreihenanalyse jedoch nicht um den Vergleich von Zuständen zu unterschiedlichen Zeitpunkten oder -intervallen, sondern um die Darstellung von Abläufen (Prozessen) zwischen Zuständen, d.h. um Vorgänge, die sich in Phasen gliedern lassen oder allgemein als Funktion der Variablen Zeit zu begreifen sind.

Das **Auswertungsziel** der Beschreibung von Abläufen hat, gerade für Ökonomen, große Bedeutung im Rahmen der folgenden praktischen Aufgaben:

- Prognose,

- Analyse, d.h. "Verstehen" im Sinne von Erkennen von Ursachen, u.a. auch durch Beschreibung der bisherigen Entwicklung,
- Kontrolle, d.h. Steuerung oder Regelung von Prozessen, um Abweichungen der Ist- von der Sollgröße auszugleichen.

Hierfür und insbesondere mit Blick auf ökonomische Zeitreihen ist das sog. "Komponentenmodell" der Zeitreihenanalyse ein wichtiges Instrument. Die traditionellen (älteren) und "einfacheren" Verfahren der Zeitreihenanalyse, die allein im folgenden behandelt werden können, gehen von dieser Modellvorstellung aus.

Def. 11.1: Zeitreihe, Ursprungswerte

Eine Folge von Beobachtungswerten y_t mit t = 1,2,...,T und einer natürlichen Ordnung dergestalt, dass die Werte in der Reihenfolge y_1, y_2,... beobachtet wurden, heißt "Zeitreihe". Die (meist diskrete) Variable t ist i.d.R. die Zeit, wobei die Werte t Zeitpunkte oder Zeitintervalle darstellen. Die noch nicht durch eine Zeitreihenanalyse bearbeiteten (z.B. transformierten) Beobachtungswerte y_t heißen "Ursprungswerte".

Bemerkungen zu Def. 11.1:

1. Man kann hinsichtlich der Variablen Y und der Variablen t verschiedene Arten von Zeitreihen unterscheiden:

   - Die Zeitvariable t wird normalerweise als diskret mit äquidistanten Einteilungen (gleichlange Intervalle) vorausgesetzt und die Datenpunkte im y - t - Koordinatensystem (Graph einer Zeitreihe) werden dann meist (nur zur Erleichterung der Augenführung) linear miteinander verbunden.
     Die Variable t kann aber auch stetig sein. Im zeitdiskreten Modell soll die Schreibweise y_t und im stetigen Modell y(t) gelten.
   - Die Beobachtungswerte y_t sind meist Ausprägungen einer metrisch skalierten Variable Y. Die Variable Y kann aber z.B. auch dichotom sein (0-1-Variable) und die Abgabe oder Abwesenheit eines *Impulses* bedeuten. Für die Analyse ist bei derartigen Prozessen dann der zeitliche Abstand zwischen je zwei Impulsen und nicht der Betrag von y (der ja nur 0 oder 1 sein kann) von Interesse.

2. Beispiele für Zeitreihen sind täglich oder stündlich gemessene Aktienkurse, jährliche Werte des Sozialprodukts, eine Fieberkurve oder

Messungen von Luftdruck und Temperatur, die auch kontinuierlich (stetig) erfolgen können.

3. Der **Graph einer Zeitreihe** kann evtl. bereits erste grobe Aufschlüsse über die Bestimmungsfaktoren der Entwicklung, über Regelmäßigkeiten und mögliche Brüche oder Ausreißer liefern und sollte Ausgangspunkt jeder Zeitreihenanalyse sein.

4. Wesentlich ist für eine Analyse ökonomischer Zeitreihen, dass die Variable Y zu allen Beobachtungszeitpunkten sachlich und räumlich gleich abgegrenzt ist. Ändert sich die Definition der Größe Y oder das Mess- bzw. Erhebungsverfahren, so ist ein **Bruch** gegeben und eine zusammenhängende Interpretation der Zeitreihe und ihrer Komponenten i.d.R. nicht mehr sinnvoll.

5. Unter **Konversion** soll eine Änderung der Periodizität der Daten verstanden werden.

   So können z.B. Monatsdaten zu Quartalsdaten konvertiert werden, indem man für den Quartalswert

   - den Wert des letzten (dritten) Monats des Quartals (z.B. bei Bestandsgrößen) oder
   - einen mittleren Wert (zweiter Monat) oder die Summe der drei Monatswerte eines Quartals heranzieht (z.B. bei Stromgrößen),
   - oder bei Bestandsgrößen ein chronologisches Mittel (Kap.12).

   Ähnlich lassen sich Quartalsdaten zu Jahresdaten konvertieren. Die Umkehrung (Vergrößerung der Periodizität), z.B. die Bestimmung von Monats- aus Quartalsdaten, verlangt Interpolationen von Daten , die i.d.R. nicht zu vertreten sind.

6. Die unter Nr. 5 beschriebene Konversion einer Zeitreihe ist eine spezielle **Transformation** der Ursprungswerte y_t (bzw. y(t)), nämlich eine abschnittsweise Aggregation (Summation) oder Mittelwertbildung.

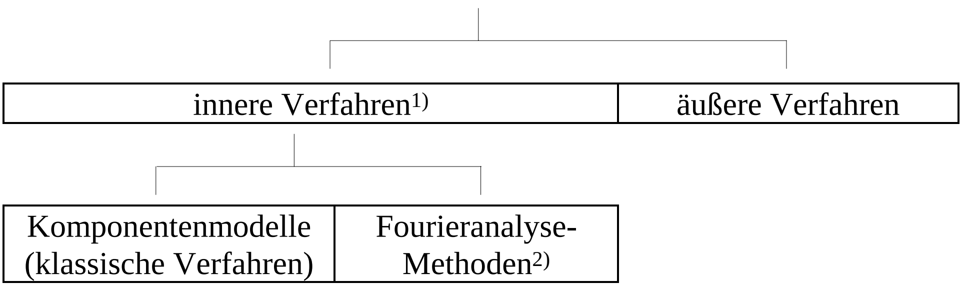
   Andere Transformationen sind algebraische Operationen (z.B. Differenzenbildung) oder funktionale Transformationen $z_t = f_d(y_t)$, bzw. $z(t) = f_s[y(t)]$ im diskreten, bzw. stetigen Modell. Transformationen werden durchgeführt, um die Varianz der transformierten Zeitreihe zu verringern oder um zu einer bestimmten Verteilung und Art der Überlagerung der Komponenten im transformierten Modell z_t bzw. z(t) zu gelangen. Sehr beliebt ist die Box-Cox-Transformation der Reihe y(t) in die Reihe z(t,k,c) wenn y(t) > -c:

$$z(t,k,c) = \begin{cases} \frac{1}{k}\{[y(t)+c]^k - 1\} & \text{wenn } k \neq 0 \\ \ln[y(t)+c] & \text{wenn } k = 0 \end{cases}$$

b) Methoden der Zeitreihenanalyse

Einfache **deskriptive (heuristische) Methoden** wie Graphiken, Vorjahresvergleiche, Berechnung von absoluten Zuwächsen (Differenzen) oder relativen Zuwächsen (Wachstumsraten) sowie Autokorrelationen usw. können hilfreich sein zur Beschreibung der Daten und für die Suche nach einem adäquaten Modell für das Zustandekommen dieser Daten. Weitergehende Erklärungen und auch Prognosen setzen i.d.R. eine **Modellbildung** voraus: Nach Art des Modells lassen sich verschiedene Zeitreihenanalyseverfahren unterscheiden (Übers. 11.1).

Übersicht 11.1: Grundlegende Ansätze der Zeitreihenanalyse[*)]



*) Man unterscheidet auch univariate und multivariate Verfahren, je nachdem ob die zu beschreibende Zeitreihe y_t ein- oder mehrdimensional ist (ein Vektor mit den Daten y_{1t} , y_{2t} ,..); innere Verfahren sind nicht immer nur univariat. Hier sollen nur uni-variate Verfahren betrachtet werden.

1) Hierzu gehören auch die "Box-Jenkins-Methoden" der Zeitreihenanalyse auf die hier nicht näher eingegangen werden kann.

2) harmonische Analyse, Spektralanalyse.

Erläuterungen zur Übersicht 11.1:

1. Innere Methoden erklären eine Zeitreihe y_t allein als Funktion der Zeit oder früherer Werte y_{t-d} (Lag d > 0) der gleichen Zeitreihe; äußere Methoden ziehen auch andere Variablen (etwa x_t, x_{t-d}, z_t usw.) zur Erklärung heran und sind u.a. Gegenstand der Ökonometrie.

2. **Komponentenmodelle** interpretieren eine Zeitreihe y_t als Überlagerung einfacher Funktionen der Zeit, die formal aufgrund ihrer Peri-

odizität definiert sind und "Komponenten" genannt werden. Hierauf beruhende Verfahren der Zeitreihenanalyse eliminieren i.d.R. sukzessive, nicht simultan die einzelnen Komponenten, wobei die "Restkomponente" r_t meist als verfahrensbedingter Rest übrig bleibt (r_t ist auch meist nicht eine Zufallsvariable mit bestimmten a priori geforderten Eigenschaften).

3. "Fourieransätze" als Alternative zum "klassischen Verfahren" der sukzessiven Zerlegung einer Zeitreihe in Komponenten betrachten eine Zeitreihe (ohne die nichtzyklische [monotone] Trendkomponente) als Summe vieler Schwingungen verschiedener Frequenz und Amplitude, die "direkt" (simultan) geschätzt werden. Es gibt auch die Kombination klassischer und fourieranalytischer Methoden (ASA- und Berliner Verfahren). Auf Einzelheiten kann hier nicht eingegangen werden.

2. Das Komponentenmodell der Zeitreihenanalyse

Es wird a priori eine geringe Anzahl isolierbarer "Komponenten" vorausgesetzt, die jeweils einfache (und somit leichter [als die Ursprungswerte] inter- und extrapolierbare) Funktionen der Zeitvariable t sind. Diese Komponenten sind nicht nur durch formale Eigenschaften definiert, sondern auch inhaltlich (d.h. ökonomisch im Sinne länger- oder kürzerfristig wirkender Einflußfaktoren).

a) Beschreibung des Modells

Inhalt der Komponenten

Übersicht 11.2 stellt die seit K. Pearson üblicherweise in ökonomischen Zeitreihen unterschiedenen vier Komponenten dar. Formales Unterscheidungsmerkmal der Komponenten ist die Periodizität (Wellenlänge). Danach sollten von links nach rechts (von m_t bis r_t) Einflußfaktoren mit zunehmender Frequenz (abnehmender Wellenlänge) auftreten.

Der **Trend** als "glatte" Kurve ist Ausdruck von (relativ zur Länge der betrachteten Zeitreihe) "langfristigen" Einflußfaktoren die nicht periodisch sind. Die Bezeichnung des Trends mit m_t soll andeuten, dass der Trend formal als eine Folge bedingter *Mittelwerte* (bedingt durch die Zeitvariable t) aufgefaßt werden kann. **Zyklische** Komponenten, wie die Saisonkomponente und (früher meist auch) die Konjunktur sind demgegenüber (annähernd) periodische Funktionen f(t), wobei "periodisch" bedeutet $f(t + kp) = f(t)$ mit $k = 1,2,...$ und $p = 12$ Monate

(Saison) bzw. p = 4 oder p = 5 Jahre (Konjunktur, nicht genau festgelegte Periodenlänge).

Bemerkung zur Konjunktur

Früher wurde wie in Übers. 11.2 die Konjunktur meist als mittelfristige (Periode etwa 4 bis 5 Jahre, jetzt eher 2 bis 12 Jahre) aber nicht notwendig regelmäßige (zyklische) Schwingung angenommen. Heutzutage ist es üblich k_t nicht mehr als (annähernd) periodische Funktion anzusehen und die Konjunktur deshalb auch nicht mehr durch trigonometrische Funktionen, sondern lokal durch Polynome zu modellieren.

Kausalinterpretation

Die Komponenten sollen einige wenige (vermutete) Ursachenkomplexe darstellen, die auch kausal interpretiert werden können, auch wenn sie nur Funktionen der Zeitreihe sind. Es sollen nicht bloß Summanden, wie in Gl. 11.1 darstellen, die nicht zu interpretieren sind. Das ist übrigens ein Unterschied zwischen dem Komponentenmodell und anderen Verfahren, die ebenfalls eine additive Überlagerung nach Art der Gl. 11.1 voraussetzen.

Übersicht 11.2: Komponenten einer ökonomischen Zeitreihe

Die beobachteten Zeitreihenwerte y_t werden als Ergebnis des Zusammenwirkens folgender, den Ursachen nach verschiedener Komponenten aufgefaßt:

Komponenten der Zeitreihe y_t

systematische

- aperiodisch (monoton)
  - **Trend** $m_t = \hat{y}_t$
- periodisch (zyklisch)
  - **Konjunktur-** komponente k_t**)
  - **Saison-** komponente s_t

glatte Komponente $g_t = m_t + k_t$

nichtsystematische

- **Zufalls-** oder **irreguläre Komponente** r_t
- Strukturbrüche *)
  Ausreißer *)

*) eigentlich keine Komponente

**) zur Konjunktur vgl. Bem. im Text oben

Komponente	ökonomische Beschreibung	formale Beschreibung
Trend	langfristige Niveauänderung, Wachstum [1], Entwicklung, Grundtendenz	monoton steigende bzw. fallende Funktion, oder Polynom geringen Grades
Konjunktur	Schwankungen im Auslastungsgrad des Produktionspotentials	wurde früher (jetzt nicht mehr üblich) als zyklisch aufgefaßt
Saison	jahreszeitliche (z.B. Klima) und institutionelle Einflüsse[2] (z.B. Steuer-, Ferientermine)	weitgehend regelmäßige Schwingung mit einer Periode (Wellenlänge) von (genau) einem Jahr

1) Wachstum (ökonomisch) = Zunahme des Produktionspotentials.

2) Es gibt Schwierigkeiten der Abgrenzung zwischen der Saisonkomponente und Kalenderunreglmäßigkeiten.

Danach ist beispielsweise:

- die Trendkomponente Resultat langfristig wirkender ("säkularer") Faktoren, wie z.B. Bevölkerungs- und Wirtschaftswachstum oder technischer Fortschritt;
- die Saisonkomponente oft Ausdruck des Einflusses der Jahreszeit (z.B. jahreszeitlich bedingte Schwankungen der Ernteerträge oder der Beschäftigung in der Bauwirtschaft), wenn dieser Einfluß wirksam ist (was z.B. nicht der Fall ist bei Löhnen und Gehältern die deshalb meist auch keine Saisonkomponente haben.

Dagegen hat die Zufallskomponente (irreguläre Komponente) entweder keine bekannten Ursachen oder sie ist Ergebnis (einer Vielzahl) einmaliger nicht vorhersehbarer (irregulärer) Einflüsse und wenig bedeutsamer Ereignisse (wobei jedoch Ereignisse, wie Streiks, Mißernten etc. eher "Ausreißer" darstellen).

Daten, Glatte Komponente

Die Berechnung der Saisonkomponente setzt unterjährige Daten voraus (z.B. Quartals-, Monatsdaten).
Trend- und Konjunktur sind nur unterscheidbar, wenn die Zeitreihe hinreichend lang ist (mindestens zwei Konjunkturzyklen umfaßt). Es ist deshalb oft sinnvoll, beide Komponenten zur sog. glatten Komponente g_t (oder: Trend-Zyklus-Komponente) zusammenzufassen.

Verknüpfung (Überlagerung) der Komponenten

Man unterscheidet zwei Grundmodelle:

1) *additive Verknüpfung*: wenn bei steigendem bzw. fallendem Trend die zyklischen Einflüsse gleich große Ausschläge besitzen, so dass die

Schwankungen k_t, s_t und r_t vom Niveau der Zeitreihe y_t unabhängig sind. Es gilt dann:

(11.1)	$y_t = m_t + k_t + s_t + r_t$	(additive Überlagerung)

2) *multiplikative Verknüpfung*: wenn z.B. die Schwankungen der zyklischen Komponenten, insbesondere der Saisonkomponente um den Trend mit steigendem (sinkendem) Niveau der Zeitreihe zunehmen (abnehmen):

(11.2)	$y_t = m_t\, k_t\, s_t\, r_t$	(mutliplikative Überlagerung)

Möglich sind auch "gemischte" Modelle, etwa der folgenden Art:
$y_t = m_t + k_t s_t r_t$ oder $y_t = m_t k_t + s_t + r_t$.
Durch Logarithmieren kann eine mutiplikative Verknüpfung in eine additive Verknüpfung transformiert werden.

<u>Kritik am Komponentenmodell</u>

Es ist notwendig, von bestimmten Hypothesen auszugehen, deren Geltung nur z.T. überprüfbar ist:

1. Existenz einer a priori gegebenen (und im Zeitablauf gleichbleibenden) endlichen Zahl isolierbarer und sachlich interpretierbarer Komponenten.
2. Die Komponenten sind Funktionen der Zeit und nur dieser (!).
3. Auch die Art der Überlagerung (additiv, multiplikativ, gemischt) muss a priori festgelgt werden.

Die Komponenten sollten "unabhängig" wirken, wenngleich nicht verlangt wird, dass sie statistisch unabhängig (Kap. 7) sind.
Bei vier Komponenten (Trend, Konjunktur, Saison, Rest) sind aus T Werten (Länge der Zeitreihe y_t) 4T Unbekannte zu schätzen. Schon daran ist zu erkennen, dass die Zeitreihenanalyse weitergehende Annahmen braucht (z.B. Trendfunktion linear) und nicht ohne gewisse subjektive Entscheidungen auskommt um zu einer Lösung zu kommen, die darin besteht, dass vier Funktionen der Zeit überlagert die Ursprungswerte y_t "reproduzieren". Man kann sich immer auch einen Satz von vier Funktionen vorstellen, der sich den Daten genauso gut anpaßt. Es gibt keine eindeutige, vollautomatische Zeitreihenanalyse und keine "wahren" Komponenten, z.B. keinen "wahren" Trend sowie meist auch keine ökonomische Theorie, derzufolge z.B. der Trend linear sein müßte. Es gibt deshalb auch meist kein Validierungskriterium, an dem gemessen ein Trend "besser" ist als ein anderer.

Ein wohl nicht überwindbarer Grundwiderspruch ist: Die Zeitreihe müßte möglichst lang sein, um mit großer Sicherheit die Komponenten (Einflüsse) nachweisen zu können. Ist sie aber sehr lang, dann ist es wahrscheinlich, dass sich Art und Wirkungsweise der Einflüsse im Zeitablauf geändert haben.

b) Methoden der Trendbestimmung

Im folgenden sollen zwei einfache Methoden zur Trendermittlung, bzw. zur Bestimmung der glatten Komponente behandelt werden. Es sind die Methode:

- der kleinsten Quadrate und
- der gleitenden Durchschnitte.

Es empfiehlt sich, z.B. dann Trendeinflüsse zu eliminieren, wenn Zeitreihen miteinander korreliert werden sollen. So ist z.B. die Produkt-Moment-Korrelation zwischen den beiden Zeitreihen mit einem linearen Trend $x_t = a + bt + u_t$ und $y_t = c + dt + v_t$ (mit den Störgrößen u_t und v_t)

$$r_{xy} = \frac{bds_t^2 + s_{uv}}{\sqrt{(b^2 s_t^2+s_u^2)(d^2s_t^2+s_v^2)}} \; ,$$

so dass eine hohe Korrelation zwischen zwei vom Trend bestimmten Zeitreihen x_t und y_t praktisch eine Scheinkorrelation aufgrund der Variablen t sein kann, wenn $s_{uv} \approx 0$,weil dann $r_{xy} \approx r_{xt}r_{yt}$, wobei $r_{xt} = bs_t / \sqrt{b^2s_t^2 + s_u^2}$ und $r_{yt} = ds_t / \sqrt{d^2s_t^2 + s_v^2}$ ist (s_t^2 ist die Varianz der Variablen t, die natürlich eine Funktion der Länge T der Zeitreihe ist. Gilt t = 1,2,...,T, so ist $s_t^2 = \frac{T^2-1}{12}$).

1. Trendberechnung mit der Methode der kleinsten Quadrate

Bei einem Trend mit einer mathematischen Funktion bestimmten Typs (lineare-, Exponential-, Potenzfunktion usw.) können die Parameter nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt werden. Der Regressand (die abhängige Variable) ist wie in Kap. 8 die Variable Y mit den Beobachtungen y_t und an die Stelle der unabhängigen Variable X tritt bei der Trendfunktion die Zeit t. Die übrigen Komponenten mit den Meßwerten k_t, s_t und r_t stellen das Residuum dar.

Die Parameter a und b eines linearen Trends $\hat{y}_t = m_t = a + b \cdot t$ (t = 1,2,...,T) werden mit den Normalgleichungen

(11.3a) $aT + b\Sigma t = \Sigma y_t$

$$(11.3b) \quad a\,\Sigma t + b\,\Sigma t^2 = \Sigma t y_t$$

bestimmt. Die Größen können beliebig "datiert" werden, d.h. die Größe t kann Werte wie etwa 1988, 1989, 1990, 1991 oder die Werte 1,2,...,T annehmen.

Zweckmäßig ist es, für t die Werte ... -2, -1, 0, +1, +2,... zu vergeben, so dass $\Sigma t = 0$ (statt T(T+1)/2 wie bei t=1,2,...,T) ist. Das geschieht indem man von den ursprünglichen t-Werten 0,1,2,... den Wert $\bar{t} = (T+1)/2$ abzieht. Dann sind a und b direkt aus jeweils einer der beiden Normalgleichungen

$$(1) \quad aT + b\Sigma t = aT = \Sigma y_t \qquad \text{so dass } a = \frac{\Sigma y_t}{T} = \bar{y}$$

$$(2) \quad a\Sigma t + b\Sigma t^2 = b\Sigma t^2 = \Sigma t y_t \qquad \text{so dass } b = \frac{\Sigma t y_t}{\Sigma t^2}$$

zu bestimmen.

Andere Trendfunktionen können durch Variablensubstitution (z.B. Parabel, Hyperbel) oder Variablentransformation (z.B. Logarithmustransformation) linearisiert werden (etwa die Exponentialfunktion oder die Potenzfunktion als Trend). Sämtliche in den Übersichten 8.2 und 9.5 zusammengestellten Funktionen sind als Trendmodelle denkbar.

Anders als bei der Methode der gleitenden Durschschnitte ist es hier erforderlich, eine Trendfunktion anzunehmen, die dem **Typ** nach zu spezifizieren ist (es ist also z.B. zu entscheiden, ob ein linearer oder parabolischer Trend bestimmt werden soll) und die Methode der kleinsten Quadrate erlaubt es, die **Parameter** dieser Funktion empirisch zu bestimmen. Für die Frage nach dem Funktionstyp mag bei **Polynomen** als Trend der folgende (im Abschn. 3 dieses Kapitels näher erläuterte) Zusammenhang hilfreich sein:

> Bei einem Polynom q-ten Grades sind die q-ten Differenzen konstant und die (q+1)ten Differenzen verschwinden. Dem entspricht (bei stetiger Zeitvariable t) der aus der Algebra bekannte Satz, dass q-maliges Differenzieren eines Polynoms vom Grade q zu einer Konstanten führt.

Folgerung: Bei einem polynomialen Trend kann man durch wiederholtes Differenzieren (im zeitstetigen Fall) bzw. durch wiederholte Differenzenbildung (im zeitdiskreten Fall) das Polynom (den Trend) annullieren (vgl. hierzu Abschn. 3b). Dieses Vorgehen liefert aber keine Quantifizierung des Trends, wie z.B. die beiden folgenden Verfahren (Abschn. b und c). Es ist nur eine Hilfe zu Erkennung des Polynomgrades.

Demonstrationsbeispiel: Differenzieren, stetige Zeit:
Parabel (Polynom vom Grade 2): $y = a + bt + ct^2$. Die erste Ableitung nach t ist b+2ct, die zweite 2c und die dritte somit Null.

Differenzenbildung, diskrete Zeit:

	Zeit(t)	0	1	2	3	4
Gerade	10+2t	10	12	14	16	18
Parabel	$10+2t+3t^2$	10	15	26	43	66

Die ersten Differenzen $y_t - y_{t-1}$ sind bei der Geraden: 12-10 = 14-12 = 16-14 = 18-16 = 2, also konstant 2, so dass die zweiten Differenzen verschwinden.
Bei der Parabel (Polynom vom Grade 2) sind die ersten Differenzen 15-10=5, 26-15=11, 43-26=17, 66-43=23 und die zweiten Differenzen sind konstant 6, denn 11-5=6, 17-11= 6 und 23-17=6.

Beispiel 11.1:

Beispiel für die Berechnung eines linearen Trends: Der Umsatz y_t (in Mio. DM) eines Unternehmens entwickelte sich in den Jahren 1984-1992 wie folgt:

Jahr	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992
t_0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_t	6	9	11	12	13	15	18	20	23

Berechnen Sie den linearen Trend $m_t = a + bt$.
Hilfsangaben: $\Sigma y_t = 127$, $\Sigma t = 36$, $n = 9$, $\Sigma y_{t,}{}^2 = 2029$, $\Sigma t^2 = 204$, $\Sigma t y_t = 626$.

Lösung 11.1:

$m_t = 6{,}24 + 1{,}97t$

2. Trendberechnung mit der Methode der gleitenden Durchschnitte

Gleitende Durchschnitte sind eine Folge von arithmetischen Mitteln, die aus jeweils p aufeinanderfolgenden Werten y_t der Zeitreihe gebildet werden.

Def. 11.2: Gleitende Durchschnitte

a) Der dem Ursprungswert y_t zugeordnete gleitende symmetrische p-gliedrige Durchschnitt lautet bei ungeradzahligem $p = 2k+1$

$$(11.4)\qquad \tilde{y}_t = \frac{1}{p}\cdot\sum_{h=-k}^{h=k} y_{t+h} \qquad\qquad (p = 2k+1,\text{ ungeradzahlig})$$
$$= \frac{y_{t-k} + y_{t-k+1} + \ldots + y_t + \ldots. + y_{t+k-1} + y_{t+k}}{2k+1}$$

b) Bei geradzahligem p = 2k wäre der Durchschnitt

$(y_{t-k} + \ldots + y_t + \ldots. + y_{t+k-1})/\ 2k$ der Periode t - ½ und $(y_{t-k-1} + \ldots + y_t + \ldots. + y_{t+k})/\ 2k$ der Periode t + ½ zuzuordnen. Es liegt daher nahe einen ungewogenen Durchschnitt hieraus zu berechnen. Dieser der Periode t zugeordnete ***zentrierte*** gleitenden Durchschnitt lautet:

$$(11.5)\qquad \tilde{y}_t^z = \frac{1}{p}\cdot\left[\sum_{h=-(k-1)}^{h=k+1} y_{t+h} + \frac{y_{t-k} + y_{t+k}}{2}\right] =$$
$$= \frac{½\cdot y_{t-k} + y_{t-k+1} + \ldots + y_t + \ldots. + y_{t+k-1} + ½\cdot y_{t+k}}{2k}$$

<u>*Erläuterung zu Teil b der Definition:*</u>

Beispiel: p = 4 (gleitender viergliedriger Durchschnitt bei Quartalswerten mit t = 0, t = 1,...) k = 2

$\tilde{y}_t^z = (½\cdot y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + ½\cdot y_{t+2})/4$
da p = 2k = 4 ist. Der erste Wert der Folge zentrierter gleitender Durchschnitte ist dann:

$\tilde{y}_2^z = (½\cdot y_{2-2} + y_{2-1} + y_2 + y_{2+1} + ½\cdot y_{2+2})/4$
$\quad = (½\cdot y_o + y_1 + y_2 + y_3 + ½\cdot y_4)/4$

und die nachfolgenden Werte sind:

$\tilde{y}_3^z = (½\cdot y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + ½\cdot y_5)/4$

$\tilde{y}_4^z = (½\cdot y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + ½\cdot y_6)/4$

$\tilde{y}_5^z = (½\cdot y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + ½\cdot y_7)/4$ usw.

Dabei gehen je zwei Werte an den Rändern verloren.

Beispiel 11.2:

Die Entwicklung des Umsatzes y_t (in Mio. DM) einer Brauerei in den Jahren 1989-1991 nach Quartalen sei (vgl. Abb. 11.1):

Jahr	1989				1990				1991			
Quartal	I	II	III	IV	I	II	III	IV	I	II	III	IV
t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_t	2	6	8	6	6	10	12	10	10	14	16	14

Berechnen Sie:
a) die gleitenden Durchschnitte 3. Ordnung (zu p = 3 Perioden) und
b) zentrierte gleitende Durchschnitte zu p = 4 Quartalen!

Lösung 11.2:

a) Gleitender Durchschnitt ungerader Ordnung mit p = 3:

Die Gl. 11.4 ist im Falle von p = 3

$\tilde{y}_t = (y_{t-1} + y_t + y_{t+1})/3 = \frac{1}{3}\Sigma\, y_{t+h}$ mit h = -1,0,+1.

Es gilt also

$\tilde{y}_2 = (2+6+8)/3 = 16/3 = 5{,}33$ (t = 2 bedeutet: 1989, 2.Quartal)

$\tilde{y}_3 = (6+8+6)/3 = 20/3 = 6{,}67$ (t = 3 bedeutet: 1989, 3.Quartal)

usw. bis schließlich

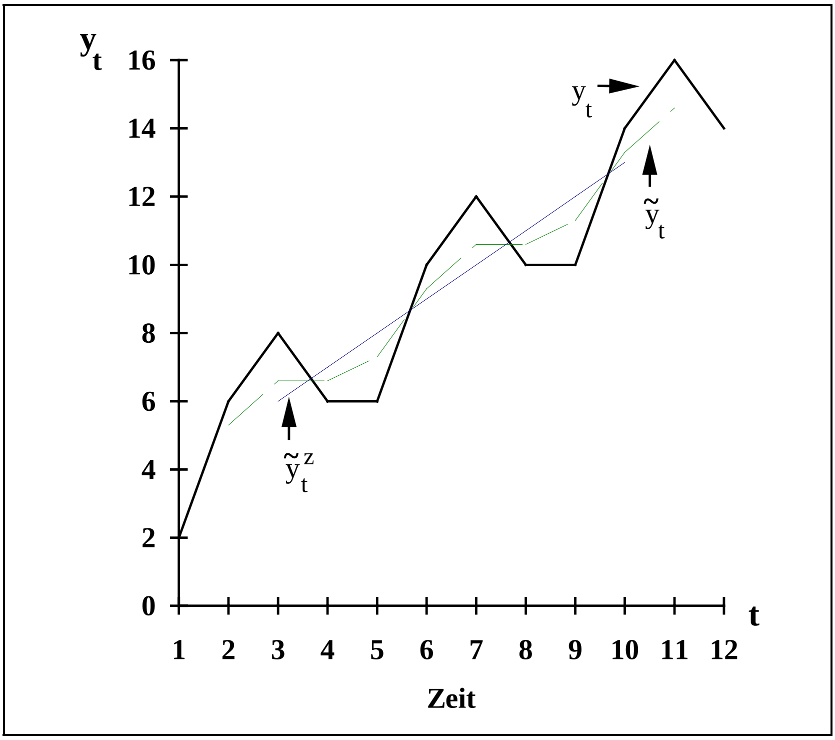
$\tilde{y}_{11} = (14+16+14)/3 = 44/3 = 14{,}67.$

Die folgende Tabelle enthält alle gleitenden Durchschnitte $\tilde{y}_t$ zur Ordnung p = 3 (von p = 3 Perioden) und die Ursprungswerte y_t sowie die unter b) zu berechnenden zentrierten 4 - gliedrigen gleitenden Durchschnitte $\tilde{y}_t^z$:

Jahr und Quartal	t	y_t	$\tilde{y}_t$	$\tilde{y}_t^z$
89.1	1	2	*	*
89.2	2	6	5,33	*
89.3	3	8	6,67	6
89.4	4	6	6,67	7
90.1	5	6	7,33	8
90.2	6	10	9,33	9
90.3	7	12	10,67	10
90.4	8	10	10,67	11
91.1	9	10	11,33	12
91.2	10	14	13,33	13
91.3	11	16	14,67	*
91.4	12	14	*	*

Das Zeichen * soll bedeuten, dass hier verfahrensbedingt kein Wert zu berechnen ist, also Werte "verlorengehen".

Abb. 11.1: Ursprungswerte und Trends für Bsp. 11.2



b) Gleitender Durchschnitt gerader Ordnung

Bei einem gleitenden Durchschnitt gerader Ordnung p = 2k werden zur Zentrierung 2k+1 Perioden in die Mittelwertbildung einbezogen, wobei die erste und die letzte Periode nur mit dem halben Gewicht berücksichtigt wird.
Bei p = 2k = 4 ergibt sich für die zentrierten gleitenden Durchschnitte nach der allgemeinen Formel (Gl. 11.5):

$$\tilde{y}_t^z = [½y_{t-k} + y_{t-(k-1)} + .. + y_{t+(k-1)} + ½y_{t+k}]/2k$$

jeweils (für jedes t) ein Mittelwert aus fünf Werten:

$$\tilde{y}_t^z = 1/4[½y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + ½y_{t+2}]$$

und somit im Beispiel für den ersten gleitenden Durchschnitt:

$$\begin{aligned}\tilde{y}_3^z &= 1/4[½y_{3-2} + y_{3-1} + y_3 + y_{3+1} + ½y_{3+2}]\\ &= 1/4[½y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + ½.y_5]\\ &= (½\cdot 2 + 6 + 8 + 6 + ½\cdot 6)/4 = 24/4 = 6.\end{aligned}$$

Entsprechend sind die folgenden Werte:

$$\begin{aligned}\tilde{y}_4^z &= 1/4[½y_{4-2} + y_{4-1} + y_4 + y_{4+1} + ½y_{4+2}]\\ &= 1/4[½y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + ½y_6] = (3+8+6+6+5)/4 = 28/4 = 7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{y}_5^z &= 1/4[½y_{5-2} + y_{5-1} + y_5 + y_{5+1} + ½y_{5+2}]\\ &= 1/4[½y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + ½y_7] = (4+6+6+10+6)/4 = 32/4 = 8\end{aligned}$$

usw. Man sieht, dass die Zahlen so gewählt sind, dass die zentrierten gleitenden Durchschnitte auf der Geraden $\tilde{y}_t^z = 3 + t$ liegen.

<u>Folgerungen aus Def. 11.2:</u>

- Am Anfang und Ende fallen beim gleitenden Durchschnitt jeweils k Glieder weg.
- Die Reihe der gleitenden Durchschnitte ist damit um 2k Glieder kürzer als die Reihe der Ursprungswerte (Daten).
- Der erste gleitende Durchschnitt fällt auf den k+1 ten Wert.
- Diese Zusammenhänge gelten allgemein, bei ungeradem p mit p = 2k+1 und bei zentrierten gleitenden p-gliedrigen Durchschnitten mit p = 2k.

	p = 2k+1 (ungerade)	p = 2k (gerade)
es fallen weg der erste Wert	k = (p-1)/2 k+1 = (p+1)/2	k = p/2 k+1 = p/2 + 1

- Aufeinanderfolgende gleitende Durchschnitte haben 2k bzw. 2k-2 Glieder gemeinsam:
  ungerades p: p-1 = 2k Glieder,
  gerades p und zentriert: p + 1 - 3 = p - 2 = 2k - 2 Glieder.
- Gleitende Durchschnitte lassen sich somit auch rekursiv bestimmen:
  ungerades p (nicht-zentriert):

$$\tilde{y}_t = [y_{t-k} + y_{t+1-k} + ... + y_{t+(k-1)} + y_{t+k}]/p$$

$$\tilde{y}_{t+1} = [y_{t+1-k} + ... + y_{t-(k-1)} + y_{t+k} + y_{t+1+k}]/p$$

$$= \tilde{y}_t + [y_{t+k+1} - y_{t-k}]/p$$

gerades p und zentriert:

$$\tilde{y}^z_{t+1} = \tilde{y}^z_t + [(y_{t+k} + y_{t+1+k}) - (y_{t-k} + y_{t+1-k})]/2p.$$

Man kann dies leicht anhand des Beispiels 11.2 verifizieren. Dort galt:

- ungerades p = 3 = 2k+1 (also k=1):
  am Anfang und Ende fällt ein Glied weg (k=1); die Reihe der gleitenden Durchschnitte beginnt bei t=2 denn (p+1)/2 = 2.
- gerades p = 4 = 2k (k=2, zentrierte Quartalsdurchschnitte):
  am Anfang und Ende fallen zwei Glieder weg (k = 2 = p/2); die Reihe der zentrierten gleitenden Durchschnitte beginnt bei t=3 denn 3 = k+1 = (p/2)+1.

Man kann mit Beispiel 11.3 leicht erkennen, dass die Bestimmung des Trends bzw. der glatten Komponente und die Eliminierung einer regelmäßigen Schwankung genau dann gelingt, wenn die Gliederzahl des Zyklus mit der des gleitenden Durchschnitts übereinstimmt.

Beispiel 11.3:

a) Berechnen Sie für das Beispiel 11.2 die trendbereinigten Werte [vgl. Gl. 11.7] (mit dem zentrierten 4 - Quartals - gleitenden Durchschnitt als Trend).

b) Man berechne gleitende Durchschnitte mit p = 3 Perioden und die trendbereinigten Werte für die folgende Zeitreihe:

Zeit (t)	1	2	3	4	5	6	7	8
Zeitreihe (y_t)	6	4	11	12	10	17	18	16

c) Man interpretiere die Ergebnisse und vergleiche sie mit einer Trendberechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate!

Lösung 11.3:

Es gilt im Teil a) die Abweichungen $d_t^z = y_t - \tilde{y}_t^z$ zu bestimmen und im Teil b) die gleitenden Durchschnitte $\tilde{y}_t$ zu berechnen und die Abweichungen $d_t = y_t - \tilde{y}_t$. Man erhält die Ergebnisse der nachfolgenden Tabelle.

Teil a)

t	y_t	$\tilde{y}_t^z$	d_t^z
3	8	6	2
4	6	7	-1
5	6	8	-2
6	10	9	1
7	12	10	2
8	10	11	-1
9	10	12	-2
10	14	13	1

Teil b)

t	y_t	$\tilde{y}_t$	d_t
1	6	(5)	1
2	4	7	-3
3	11	9	2
4	12	11	1
5	10	13	-3
6	17	15	2
7	18	17	1
8	16	(19)	-3

Man sieht, dass den konstruierten "Daten" im Fall a) ein Zyklus mit den Werten 2,-1,-2,1 zugrundeliegt, während im Fall b) die Daten entstanden, indem man zur Geraden 3+2t den Zyklus 2,1,-3 addierte. In beiden Fällen handelt es sich um einen regelmäßigen Zyklus, dessen Mittelwert Null beträgt.

Man beachte, dass die mit den gleitenden Durchschnitten in den Fällen a) und b) dieses Beispiels errechnete Gerade nicht identisch ist mit einer Trendgeraden nach der Methode der kleinsten Quadrate. Für diese erhält man:

für a) also die 12 Daten von Beispiel 11.2

$\hat{y}_t = 2{,}72727 + 1{,}04196t \ (r^2 = 0{,}84)$ statt $\tilde{y}_t^z = 3+t$

für b) also die 8 Daten von Beispiel 11.3 Teil b

$\hat{y}_t = 3{,}39287 + 1{,}85714t \ (r^2 = 0{,}80)$ statt $\tilde{y}_t = 3+2t$.

Dass beide Methoden nicht zur gleichen Gerade führen liegt an den unterschiedlichen Modellannahmen (vgl. Übers. 11.3). Der Methode der gleitenden Durchschnitte liegt ein lokales Trendmodell zugrunde, d.h. es werden jeweils p Beobachtungen durch einen Mittelwert angepaßt, während bei der Methode der kleinsten Quadrate der Stützbereich alle T Werte der Zeitreihe umfaßt (globales Modell).

Weitere Bemerkungen zur Methode der gleitenden Durchschnitte:

1. Ein regelmäßiger p-gliedriger Zyklus wird durch einen p-gliedrigen gleitenden Durchschnitt genau ausgeschaltet ["annulliert"] (vgl. Bsp. 11.3). Wird p nicht genau getroffen oder ist der Zyklus nicht regelmäßig, so tritt in jedem Fall eine Glättung ein, weil jeweils p Werte durch einen Mittelwert repräsentiert werden und dieser nicht kleiner (größer) sein kann, als der kleinste (größte) Wert $y_{t-k},....,y_{t+k}$.

2. Verkürzung der Reihe: Die Reihe der gleitenden Durchschnitte ist gegenüber der Reihe der Ursprungswerte am Anfang (historischer Rand) und [was problematischer ist; Prognose!] am Ende (aktueller Rand) um k Werte kürzer.

3. Wovon hängt es ab, wie stark die Reihe geglättet wird? Wie groß soll p gewählt werden? Die Zeitreihe wird i.d.R. umso mehr geglättet, je größer p gewählt wird. Als Faustregel für die Wahl der richtigen Periodenlänge p gilt:

   - p groß wählen, wenn die zu schätzende Trend- bzw. glatte Komponente schwach und die sie überlagernde Restkomponente (Zyklus) stark ausgeprägt ist

Übersicht 11.3: Gleitende Durchschnitte und kleinste Quadrate

	gleitende Durchschnitte	kleinste Quadrate
Trendfunktion	keine Funktion anzunehmen*), reines Glättungsverfahren	Typ der Trendfunktion muss a priori angenommen werden
Voraussetzungen bzgl. der Daten	Annahmen über Zykluslänge p erforderlich,	Zeitreihe muss nicht äquidistant sein
Trendmodell	lokales Trendmodell (Anpassung von jeweils p Werten)	globales Trendmodell (Anpassung aller T Beobachtungen)
Länge des Trends	Reihe der Trendwerte im Vergleich zu den Ursprungswerten am Anfang und Ende verkürzt	einheitliche Trendfunktion für alle Zeitpunkte von t=0 bis t=T

*) Im Gegensatz zur Trendbestimmung mit der Methode der kleinsten Quadrate braucht man bei der Methode des gleitenden Durchschnitts keine Vorkenntnisse über den möglichen Funktionstyp des Trends. Das Ergebnis ist dann eine "glatte" Kurve, für

die aber i.d.R. auch keine Funktion explizit in einem geschlossenen Ausdruck anzugeben ist.

- p klein wählen, wenn die glatte Komponente stark ausgeprägte Schwankungen hat, die nicht ausgemittelt werden sollen und die Restkomponente schwach ausgeprägt ist.

4. Verschiebung von "Wendepunkten" (im Sinne der Ökonomie, also Extremwerte): Ein zu starkes Glätten der Zeitreihe kann dazu führen, dass Wendepunkte verschwinden bzw. mit erheblicher Verzögerung angezeigt werden.

5. Das "Hintereinanderschalten" mehrerer gleitender Mittelwerte erzeugt einen gewogenen gleitenden Mittelwert mit entsprechend verlängertem Stützbereich (wie bereits bei der Herleitung von Gl. 11.5 gezeigt wurde).

   Beispiel: Die Reihe x_t wird geglättet mit $y_t = ½(x_t+x_{t-1})$ und anschließend wird diese Reihe mit $z_t = ½(y_t+y_{t-1})$ erneut geglättet. Das gleiche Ergebnis erhält man mit einer einmaligen Glättung mit dem gewogenen Mittel $z_t = ¼\ x_t + ½\ x_{t-t} + ¼\ x_{t-2}$. Die Gewichte c_i des dritten Mittels sind Produktsummen der Gewichte a_i und b_i der ersten beiden Mittel ($c_i = \Sigma_k a_i b_{i-k}$).

6. Bisher wurden nur gleitende ungewogene arithmetische Mittel betrachtet. Man kann auch **gewogene** arithmetische Mittel gleitend berechnen, etwa bei ungeradem p = 2k+1

   $$\tilde{y}_t = [g_o\, y_{t-k} + g_1\, y_{t-k-1} + ... + g_{2k-1}\, y_{t+(k-1)} + g_{2k}\, y_{t+k}]/p,$$

   wobei die Gewichte g_i (i=0,1,...,2k) in der Summe 1, aber nicht notwendig alle positiv sein sollen. Man kann zeigen, dass ein polynomialer Trend nach der Methode der kleinsten Quadrate eine Folge gewogener gleitender Durchschnitte ist (vgl. Beispiel 11.4).
   Ein Beispiel für gewogene gleitende arithmetische Mittel ist das exponential smoothing. Man kann auch Mittelwerte anderen Typs verwenden, z.B. gleitende Mediane.

7. Durch die gleitende Mittelwertbildung oder Differenzenbildung kann $\tilde{y}_t$ auch bei einer reinen Zufallsfolge y_t (die nicht autokorreliert ist) einen Zyklus haben (sinusoidal verlaufen, autokorreliert sein). Dieser sog. "**Slutzki-Yule-Effekt**"

(Beispiel 11.5) kommt dadurch zustande, dass aufeinanderfolgende gleitende p-gliedrige (p ungerade) jeweils p-1 Glieder gemeinsam haben.

Beispiel 11.4:

Gegeben sei die folgende Zeitreihe:

t	-2	-1	0	+1	+2
y_t	10	12	15	17	16

Man berechne den Trend mit der Methode der kleinsten Quadrate und vergleiche die so erhaltenen fünf Trendwerte mit gewogenen arithmetischen Mitteln der fünf Ursprungswerte y_t der obigen Zeitreihe, wenn man die folgenden fünf Gewichtungsschemen benutzt:

	-2	-1	0	+1	+2
1	0,6	0,4	0,2	0	-0,2
2	0,4	0,3	0,2	0,1	0
3	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
4	0	0,1	0,2	0,3	0,4
5	-0,2	0	0,2	0,4	0,6

Was fällt bei der Betrachtung der fünf Gewichtungsschemen auf?

Lösung 11.4:

Das Beispiel soll Zusammenhänge zwischen der Methode der kleinsten Quadrate und der Methode der (gewogenen) gleitenden Mittelwerte demonstrieren.

Mit der Methode der kleinsten Quadrate erhält man bei den gegebenen Daten den linearen Trend $\hat{y} = 14 + 1{,}7 \cdot t$ und die Trendwerte:

-2	-1	0	+1	+2
10,6	12,3	14	15,7	14,4

Berechnet man den Mittelwert aus den Ursprungswerten mit dem Wägungsschema Nr. 1, so erhält man:
$0{,}6 \cdot 10 + 0{,}4 \cdot 12 + 0{,}2 \cdot 15 + 0.17 + (-0{,}2) \cdot 16 = 6 + 4{,}8 + 3 - 3{,}2 = 10{,}6.$

Mit dem Schema Nr.2 erhält man für das gewogene Mittel den Wert 12,3 usw. In der Reihenfolge der Wägungsschemen erhält man also genau die Werte der geschätzten Trendgeraden. Bei der Betrachtung der Gewichte fällt auf:

- Die Summe der Gewichte ist jeweils 1.
- Das dritte Wägungsschema ist das **un**gewogene arithmetische Mittel.
- Das fünfte Schema ist das "inverse" (Umkehr der Reihenfolge der Gewichte) erste, denn es gilt :

Schema 1:	0,6	0,4	0,2	0	-0,2
Schema 5:	-0,2	0	0,2	0,4	0,6

und entsprechend ist das Schema 4 das "inverse" Schema 2.

- Das mittlere (dritte) Wägungsschema ist dagegen symmetrisch.

Beispiel 11.5:

Im Supermarkt S wurden an 11 Tagen die folgenden Mengen der Konserve K gekauft, die offenbar zufällig um den Wert 58,45 schwankten: 64, 57, 65, 58, 51, 77, 52, 45, 89, 46, 39. Man berechne gleitende dreigliedrige Durchschnitte $\tilde{y}_t$ und zeichne die Ursprungswerte y_t und die gleitenden Durchschnitte $\tilde{y}_t$. Was fällt bei dem Bild auf?

Lösung 11.5:

Die gleitenden Durchschnitte sind periodisch: 62, 60, 58, 62, 60, 58, 62, 60, 58, während die Ursprungswerte ziemlich regellos schwanken.

Beispiel 11.6:

Gegeben seien die Zeitreihen (zu diskreten Zeitpunkten t = 0,1,2,...,8)

$$y_1(t) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\, t\right)$$

$$y_2(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\, t\right)$$

Man bestimme nicht zentrierte gleitende Mittelwerte zu je zwei Perioden (die dann den Werten t = 0.5,1.5,2.5,...zugeordnet sind) von $y_1(t)$, $y_2(t)$ und $y_3(t) = y_1(t) + y_2(t)$

Lösung 11.6:

Aufgrund des folgenden trigonometrischen Zusammenhangs

$$\frac{1}{2}(\sin\alpha + \sin\beta) = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

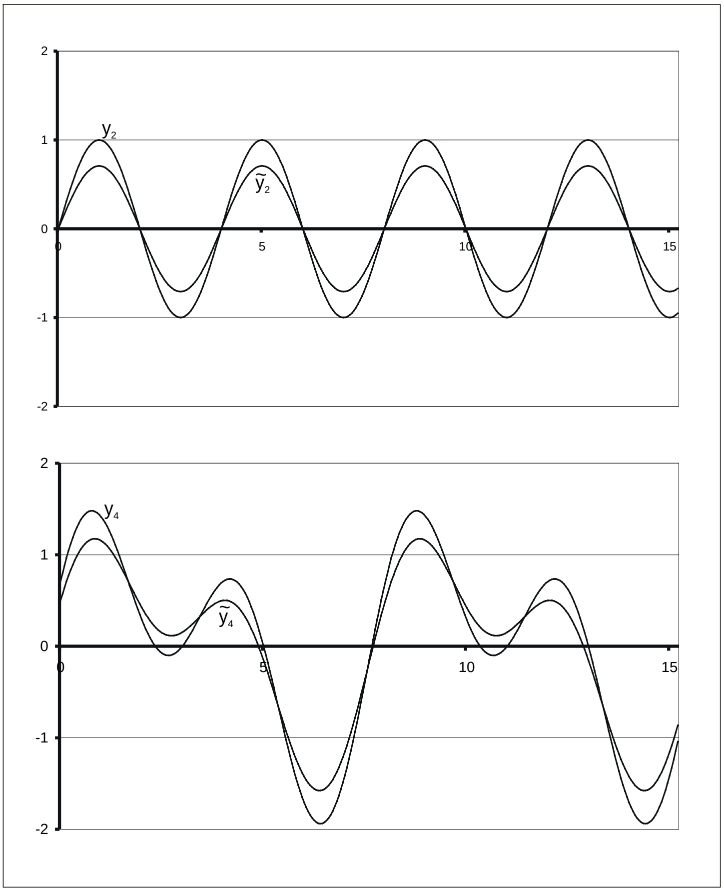
lässt sich zeigen, dass man die folgenden gleitenden Mittelwerte erhält

$$\tilde{y}_1(t) = \sin\left(\frac{3}{8}\pi\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) = 0{,}92388 \cdot y_1(t) = A_1\, y_1(t)$$

$$\tilde{y}_2(t) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\ \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\ = 0{,}70711 \cdot y_2(t) = A_2\, y_2(t)$$

Wie man sieht, entstehen durch gleitende Mittelwerte gedämpfte Schwingungen (Amplitude $A_1 < 1$, $A_2 < 1$). Die Zeitreihe $y_2(t)$ hat eine doppelt so große Frequenz (halb so lange Periode) wie $y_1(t)$ und sie wird etwas stärker gedämpft. Die Überlagerung $y_3(t)$ ist von beiden Zyklen geprägt.

Abb. 11.2: Zeitreihen und gleit. 2- Perioden Durchschnitte des Bsp. 11.6



Auch der gleitende Mittelwert $\tilde{y}_3(t) = \tilde{y}_1(t) + \tilde{y}_2(t)$ ist wieder eine gedämpfte Schwingung (vgl. Abb. 11.2). Im Abschnitt 3c wird der Gedanke der Überlagerung von Sinusschwingungen weiter verfolgt. Interessant ist es festzuhalten, dass sich die gleitenden Mittelwerte nicht auf Frequenz und Phase sondern nur auf die Amplitude auswirken. Führt man eine Phasenverschiebung durch, etwa

$$y_4(t) = y_1(t) + \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

so werden auch die gleitenden Mittelwerte von dieser Überlagerung geprägt. Man erhält

$$\tilde{y}_4(t) = \tilde{y}_1(t) + A_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{statt} \quad \tilde{y}_3(t) = \tilde{y}_1(t) + A_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

c) Berechnung der Saisonkomponente

Die Saisonkomponente ist zu bestimmen, um eine Saisonbereinigung durchführen zu können. Dadurch können die (kurzfristigen) saisonalen Einflüsse von den längerfristigen Einflüssen isoliert werden, wodurch eine Änderung der mittel- bzw. langfristigen Entwicklung besser (bereinigt von kurzfristigen Einflüssen) zu erkennen ist.
Die im folgenden behandelten einfachen Verfahren heißen auch "Phasendurchschnittsverfahren" weil über gleichnamige Monate, Quartale usw. gemittelt wird.

1. Konstante Saisonfigur (Saisonnormale) bei additiver Überlagerung

Notation: Die Ursprungswerte y_t der Zeitreihe von T Perioden werden im folgenden doppelt indiziert. Statt y_t soll y_{js} geschrieben werden, wobei $j = 1,2,...,J$ das Jahr und $s = 1,2,...,n$ den Unterzeitraum bezeichnet, z.B. ein Quartal ($n = 4$) oder einen Monat ($n = 12$), so dass $T = nJ$.

Eine konstante (starre) Saisonfigur ist dann gegeben, wenn die Werte der Saisonkomponente für gleiche Unterzeiträume in jedem Jahr j identisch sind. Sie wiederholt sich in jedem Jahr in genau gleicher Weise. Im additiven Modell

$$\boxed{(11.6) \quad y_{js} = m_{js} + k_{js} + s_{js} + r_{js}}$$

gilt somit $s_{js} = s_s$ bei einem starren Saisonmuster.

Zieht man von den Ursprungswerten y_{js} den Trend bzw. die glatte Komponente $g_{js} = m_{js}+k_{js}$ (etwa in Gestalt von $\tilde{y}_{js}$ bei gleitenden Durchschnitten) ab, so erhält man die Reihe trendbereinigter Werte y^*_{js}, die nur noch aus saisonalen und irregulären Schwankungen besteht:

$$(11.7) \quad y^*_{js} = y_{js} - g_{js} = s_{js} + r_{js} \qquad \text{(trendbereinigte Werte).}$$

Die konstante und nicht-normierte Saisonkomponente oder "Saisonnormale" s_s ist das arithmetische Mittel aller trendbereinigter Werte, die dem gleichen Unterzeitraum s zugeordnet sind (über alle J Jahre gemittelt):

$$(11.8) \quad s_s = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^{j=J} y^*_{js}$$

Die n einzelnen Werte s_s heißen auch Saisonkoeffizienten. Man kann statt arithmetische Mittel auch Mediane bestimmen.

Zur Begründung des Verfahrens:

Geht man vom Modell $y_{js} = y^*_{js} + u_{js}$ aus, wobei y^*_{js} die trendbereinigten Werte sind, so führt die Bestimmung von Konstanten k_s unter den Bedingungen

$$\sum_{j=1}^{J} (y^*_{js} - k_s)^2 = \text{Min (für jedes s)}$$

wegen der Minimumeigenschaft des arithmetischen Mittels zum Wert $k_s = s_s$ gem. Gl. 11.8. Ähnlich führen "Saisondummies" d_s, also Regressoren, für die gilt $d_s = 1$ sonst und wenn die Beobachtung in den Unterzeitraum s (s = 1, 2,..., n-1) fällt und $d_s = 0$ wenn s = n in der Regressionsgleichung $y_{js},^* = a + \sum_{s=1}^{n-1} b_s d_s + u_{js}$ zu einer Schätzung der Koeffizienten $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ so dass $a+b_s = s_s$ für s = 1, 2,..., n-1 und $a = s_n$ jeweils das arithmetische Mittel gleichnamiger (für den gleichen Unterzeitraum s geltender) trendbereinigter Werte ist, wenn die Beobachtungen genau J Jahre umfassen. Die Beschränkung auf n-1 Dummies ist notwendig, damit keine lineare Abhängigkeit entsteht, d.h. die Matrix **X'X** (vgl. Kap. 8) invertierbar ist.

Beispiel 11.7:

Die Berechnung einer starren Saisonfigur durch Bildung eines arithmetischen Mittels der im folgenden gegebenen trendbereinigten Werte für gleichnamige Quartale (I bis IV) über J = 4 Jahre führt nach Gl. 11.8 zu den Werten:

$s_1 = (-7-1-6-2)/4 = -4,$

$s_2 = (3+5+1+3)/4 = +3$ usw.

Quartal	trendbereinigte Werte 1986	1987	1988	1989
I	-7	-1	-6	-2
II	+3	+5	+1	+3
III	+2	-1	+1	-2
IV	+8	+10	+9	+9

Saison-normale	Restkomponente 1986	1987	1988	1989	Σ
-4	-3	+3	-2	+2	0
+3	0	+2	-2	0	0
0	+2	-1	+1	-2	0
+9	-1	1	0	0	0

Zieht man die Saisonnormale von den trendbereinigten Werten ab, so erhält man nach Gl. 11.7 die Restkomponente.

Der mittlere Ausschlag der Saisonnormalen ist nicht Null, sondern $\bar{s} = 2 = 8/4$ wegen $\Sigma s_s = -4 + 3 + 0 + 9 = 8$. Die Saisonkomponente ist somit nicht "normiert".

Das arithmetische Mittel der n Saisonkoeffizienten beträgt

$$(11.9) \qquad \bar{s} = \frac{1}{n}\sum_s s_s$$

wobei die Summe über alle n Unterzeiträume (s = 1,2,...,n) gebildet wird, also z.B. über die n = 4 Quartale oder n = 12 Monate.

Die auf einen Mittelwert von $\bar{s}_s^* = 0$ ***normierte Saisonnormale*** (oder "Saisonindex") s_s,* ist dann die Lineartransformation der nicht-normierten s_s (gem. Gl. 11.8) indem man von s_s den Mittelwert $\bar{s}$ dieser Saisonkoeffizienten (gem. Gl. 11.9) abzieht:

$$(11.10) \quad s_s^* = s_s - \bar{s} \qquad \text{(normierte Saisonnormale).}$$

Zieht man von den Ursprungswerten y_{js} den jeweils zugehörigen normierten Saisonkoeffizienten s_s^* ab, so erhält man die ***saisonbereinigte Zeitreihe***. Sie soll einen Eindruck vermitteln, wie sich die Zeitreihe (längerfristig) entwickelt hätte, wenn sie nicht von saisonalen Einflüssen überlagert worden wäre.

Die normierte Saisonnormale für die vier Quartale des Beispiels 11.4 beträgt: für

Quartal I: $-2 - 2 = -4$ (da $\bar{s} = 2$)
Quartal II: $3 - 2 = 1$

Quartal III: 0 - 2 = -2
Quartal IV: 9 - 2 = 5, was im Mittel Null ist.
Der normierte Wert s_s^* ist der Schätzwert für die typische Abweichung des s-ten Unterzeitraums. Die n Werte für s_s^* bilden die normierte Saisonfigur und sind im Mittel Null.

Beispiel 11.8:

Man bestimme die normierten Saisonkoeffizienten für die folgenden trendbereinigten Werte (n = 4 Quartale und J = 4 Jahre):

s	1987	1988	1989	1990
1	-7	-1	-6	-2
2	3	5	1	3
3	2	-1	1	-2
4	8	10	9	9

Lösung 11.8:

Nicht-normierte Saisonkoeffizienten:

$s_1 = -4,\quad s_2 = 3,\quad s_3 = 0,\quad s_4 = 9.$

Ihr Mittelwert beträgt (-4 + 3 + 0 + 9)/4 = 8/4 = 2, so dass man für die normierte Saisonnormale erhält:

$s_1^* = -6,\quad s_2^* = 1,\quad s_3^* = -2,\quad s_4^* = 7\quad (\text{mit } \Sigma s_s^* = 0).$

2. Variable Saisonfigur bei multiplikativer Überlagerung

Bei multiplikativer Verknüpfung

(11.6a) $y_{js} = m_{js} \cdot k_{js} \cdot s_{js} \cdot r_{js}$

kann eine Saisonkomponente, die im Mittel 1 beträgt, bestimmt werden. Dabei ist statt der absoluten die relative (in bezug auf die glatte Komponente) Ausschlaghöhe für gleiche Unterzeiträume konstant.

Dividiert man die Ursprungswerte y_{js} durch die glatte Komponente g_{js}, so erhält man die trendbereinigten Werte y_{js}^* eines multiplikativen Modells. Durch arithmetische (nicht geometrische) Mittelung über gleichnamige Unterzeiträume (z.B. Quartale, Monate) erhält man die nicht-normierten Saisonkoeffizienten.
Diese und weitere Verfahrensschritte werden in Übers. 11.4 zusammengefaßt und dem Verfahren bei starrer Saisonfigur (additives Modell) gegenübergestellt.

Da die normierten Saisonkoeffizienten $s^*_{js} = s^*_s$ (für jedes Jahr j = 1, 2,..., J) im multiplikativen Modell im Mittel 1 sind, wird durch das Mittel $\bar{s}$ der nicht-normierten Saisonkoeffizienten s^*_{js} dividiert:

$$\text{(11.10a)} \quad s^*_s = \frac{s_s}{\bar{s}} \qquad \text{mit } \bar{s} = \frac{1}{n}\Sigma s^*_{js}$$

(wobei summiert wird über s = 1,2,...,n).

Dividiert man die Ursprungswerte y_{js} durch den entsprechenden normierten Saisonkoeffizienten s^*_s, so erhält man die saisonbereinigten Werte.

Übersicht 11.4: Saisonbereinigung bei additiver und multiplikativer Überlagerung

	additives Modell (starre Saison)	muliplikatives Modell (variable Saison)
trendbereinigte[1] Werte y^*_{js} =	$= y_{js} - g_{js}$ Differenz, Gl.11.7	$= \frac{y_{js}}{g_{js}}$ Quotient
nichtnormierte Saisonnormale[2] s_s =	$\frac{1}{J}\sum_j y^*_{js}$ (arithmet. Mittel, Gl.11.8)	$\frac{1}{J}\sum_j y^*_{js}$ (arithmetisches Mittel)
normierte Saison s^*_s = (mit Mittel $\bar{s}$ nach Gl. 11.9)	$s_s - \bar{s}$ (mittlere nicht-normierte Saison abgezogen, [Gl.11.10])	$s_s / \bar{s}$ (Division durch mittlere nichtnormierte Saison, [Gl. 11.10a])
normiert auf[3]	$\bar{s}^*_s = 0$	$\bar{s}^*_s = 1$

1) "trendbereinigt" soll heißen: ohne Trend bzw. glatte Komponente $g_t = g_{js}$ (meist geschätzt als gleitender Durchschnitt $\tilde{y}_{js}$).

2) oder Saisonkoeffizienten (n Werte)

3) d.h. das arithmetische Mittel (aller n Werte) der normierten Saisonnormalen s^*_s (s = 1,2,...,n) beträgt 0 bzw. 1.

d) Integrierte Modelle

Man kann auch das Modell $y_t = g_t + s_t + u_t$ (mit dem Residuum u_t) in einem Akt schätzen, d.h. die glatte Komponente g_t und die Saisonkomponente s_t ***simultan***, statt ***sukzessiv*** schätzen, indem man die Methode der kleinsten Quadrate anwendet und Σu_t^2 als Funktion der zu schätzenden Parameter von g_t und s_t

- global, d.h. für die ganze Länge T der Zeitreihe (t = 1, 2, ..., T) minimiert oder
- lokal, d.h. Σu_t^2 für gleitende Stützbereiche der Länge p minimiert.

Die Komponenten g_t und s_t werden dabei meist wie folgt modelliert:

- g_t als Polynom geringen Grades, also
  $g_t = \Sigma a_i t^i$ (mit i = 0,1,...,p), etwa (p = 2) $a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ und
- s_t als trigonometrische Funktion, d.h.
  $s_t = \sum_{j=1}^{j=q}[b_{1j}\cos(\lambda_j t) + b_{2j}\sin(\lambda_j t)]$ mit der Frequenz $\lambda_j = j \cdot 2\pi/P$ und
  $j = 1,2,...,q \leq ½P$
  wenn die Periode P ungeradzahlig ist bzw.

  $s_t = \sum_{j=1}^{q}[b_{1j}\cos(\lambda_j t) + b_{2j}\sin(\lambda_j t)] + b_{1q}\cos(\pi t)$ wenn die Periode P geradzahlig ist, weil bei $q = ½P$ gilt $\sin\lambda qt = \sin(\pi t) = 0$ und deshalb b_{2q} nicht definiert ist.

3. Hinweise auf weiterführende Verfahren

a) Exponential Smoothing (exponentielles Glätten)

Exponentielles Glätten ist ein sehr einfaches und beliebtes Verfahren zur Bestimmung einer Ein-Schritt-Prognose (Prognose von y_{t+1} zur Zeit t). Es wird zunächst das bekannteste, sog. "einfache" Verfahren für Zeitreihen ohne Trend und ohne Saison behandelt.

1. Einfaches exponentielles Glätten:

Der zur Zeit t für t+1 ermittelte Prognosewert soll $\hat{y}_{t+1}$, und der dann später [zur Zeit t+1] beobachtete tatsächliche Wert y_{t+1} genannt werden. Der Ansatz ist rekursiv, d.h. man bestimmt $\hat{y}_{t+1}$ aufgrund von y_t und $\hat{y}_t$, $\hat{y}_{t+2}$ aufgrund von y_{t+1} und $\hat{y}_{t+1}$ usw.
Es gibt vier äquivalente Formulierungen des Prognoseansatzes, die den Sinn des Vorgehens deutlich machen und die im folgenden dargestellt werden.

1. Prognose als gewogenes Mittel aus den letzten Werten

Danach errechnet sich $\hat{y}_{t+1}$, der Prognosewert für die Periode t+1 als gewogenes arithmetisches Mittel aus y_t, dem tatsächlichen Wert der Periode t und $\hat{y}_t$, dem zur Zeit t-1 für t prognostizierten Wert, wobei die Gewichtung nach Maßgabe des frei zu wählenden Parameters α erfolgt, d.h. für $\hat{y}_{t+1}$ gilt:

$$\boxed{(11.11) \quad \hat{y}_{t+1} = \alpha y_t + (1-\alpha)\hat{y}_t \qquad (\text{mit } 0 < \alpha < 1).}$$

Interessant sind die mit obiger Einschrankung für α ($0 < \alpha < 1$) an sich ausgeschlossenen zwei Extremfälle:

$\alpha = 0$: $\hat{y}_{t+1} = \hat{y}_t$ (eine einmal gestellte Prognose wird unabhängig von der Erfahrung beibehalten)

$\alpha = 1$: $\hat{y}_{t+1} = y_t$ (es wird quasi angenommen, dass morgen das eintreten wird, was heute eingetreten ist)

Gl. 11.11 erfordert eine Startbedingung [für t = 0]: $\hat{y}_o = y_o$. Das impliziert auch $\hat{y}_1 = y_o$.

2. Prognose als Mittel aller vergangenen Beobachtungen

Ersetzt man in Gl. 11.11 den prognostizierten Wert $\hat{y}_t$ durch den tatsächlichen Wert y_{t-1} und $\hat{y}_{t-1}$ (denn $\hat{y}_t = \alpha y_{t-1} + (1-\alpha)\hat{y}_{t-1}$), entsprechend hierin $\hat{y}_{t-1}$ durch $\hat{y}_{t-2}$ und y_{t-2} usw., so erhält man:

$$(11.12) \quad \hat{y}_{t+1} = \alpha y_t + \alpha(1-\alpha)y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{t-2} + ... + \alpha(1-\alpha)^n y_{t-n} + (1-\alpha)^{n+1}\hat{y}_{t-n} = \sum_{i=0}^{i=n} \alpha(1-\alpha)^i y_{t-i} + (1-\alpha)^{n+1}\hat{y}_{t-n} \quad (i = 0,1,...,n).$$

Wegen $0 < \alpha < 1$ ist $\lim_{n\to\infty}(1-\alpha)^{n+1} = 0$. Die Summe der unendlichen geometrischen Reihe $\Sigma\alpha(1-\alpha)^i = \alpha(1-\alpha)^0 + \alpha(1-\alpha)^1 + \alpha(1-\alpha)^2 + ...$ ist bekanntlich eins. Somit ist $\hat{y}_{t+1}$ ein gewogenes Mittel aller früheren tatsächlichen Werte y_{t-i}, gewogen mit $\alpha(1-\alpha)^i$, also mit exponentiell abnehmenden Gewichten [daher auch der Name exponentielle Glättung].

Gl. 11.12 zeigt zugleich die Grenzen des Verfahrens: da $\hat{y}_{t+1}$ ein gewogenes arithmetisches Mittel ist, kann es nicht größer als der größte und nicht kleiner als der kleinste vergangene Wert sein. Liegt kein Trend vor, d.h. besteht die Zeitreihe nur aus Schwankungen um ein konstantes Niveau a, so ist es gleichwohl plausibel $\hat{y}_{t-n}$ zu schätzen aus früher tatsächlich beobachteten Werten y_{t-i} und zwar so, dass y_{t-1} stärker ins Gewicht fällt als y_{t-2}, y_{t-2} stärker als y_{t-3} usw.

3. partielle Korrektur einer Fehlschätzung

Nach einer dritten Schreibweise des Prognoseansatzes, die man ebenfalls durch einfache Umformung von Gl.11.11 erhält, wird $\hat{y}_{t+1}$ durch Korrektur von $\hat{y}_t$ um den Prognosefehler $F = y_t - \hat{y}_t$ (oder genauer: um einen [durch α bestimmten] Teil des Prognosefehlers [daher "partielle" Korrektur]) nach der folgenden Regel gewonnen:

$$(11.13) \quad \hat{y}_{t+1} = \hat{y}_t + \alpha(y_t - \hat{y}_t) = \hat{y}_t + \alpha F.$$

Mit $F = y_t - \hat{y}_t$ gilt

- bei einer Überschätzung (Prognose $\hat{y}_t$ lag zu hoch, höher als y_t, so dass $F < 0$ weil $\hat{y}_t > y_t$) wird die Prognose nach unten korrigiert, so dass $\hat{y}_{t+1} < \hat{y}_t$;
- bei einer Unterschätzung ($F > 0$ da $\hat{y}_t < y_t$) wird die Prognose nach oben korrigiert, so dass $\hat{y}_{t+1} > \hat{y}_t$.

Im Falle von $\alpha = 1$ wird der volle Fehler F adddiert [egal, wie gut oder schlecht die Prognose war], denn dann ist $\hat{y}_{t+1} = \hat{y}_t + F = y_t$, was darauf hinausläuft, den zuletzt beobachteten Wert als Prognosewert zu nehmen. Mit $\alpha = 0$ wird der Fehler überhaupt nicht korrigiert und es gilt $\hat{y}_{t+1} = \hat{y}_t$, auch wenn $\hat{y}_t$ falsch war, also von y_t abwich.

4. eponentielle Glättung und gleitende Mittelwerte:

Man kann Gl. 11.11 auch als sukzessive Schätzung einer Niveaukomponente a interpretieren. Die Zeitreihe y_t setzt sich danach aus einem Niveau a und einer Zufallskomponente u_t zusammen, so dass gilt:

$$\boxed{(11.14) \quad y_t = a + u_t.}$$

Das Niveau a wird in jeder Periode t neu als a_t ("updating") geschätzt durch Mittelung der m früheren Werte von y:

$$(11.14a) \quad \hat{a}_{t-1} = \frac{y_{t-1} + ... + y_{t-m}}{m}$$

entsprechend gilt:

$$\hat{a}_t = \frac{y_t + ... + y_{t-m+1}}{m} \quad \text{und}$$

$$\boxed{(11.15) \quad \hat{a}_t = \hat{a}_{t-1} + \alpha(y_t - \hat{a}_{t-1})}$$

wenn man $\alpha = 1/m$ und $y_{t-m} = \hat{a}_{t-1}$ setzt. Da $\hat{a}_{t-1}$ nach Gl. 11.14a definiert ist läuft die Annahme $y_{t-m} = \hat{a}_{t-1}$ darauf hinaus, dass:

$$(11.14b) \quad y_{t-m} = \hat{a}_{t-1} = \frac{y_{t-1} + ... + y_{t-m+1}}{m-1}$$

gelten soll, was bei hinreichend großem m und Geltung des Modells $y_t = a + u_t$ auch zutreffen dürfte. Denn dann dürfte auch
$(y_{t-1} + ... + y_{t-m})/m = (y_{t-1} + ... + y_{t-m+1})/(m-1)$ erfüllt sein.
Ersetzt man in Gl. 11.15 die Größe $\hat{a}_t$ durch $\hat{y}_{t+1}$ und $\hat{a}_{t-1}$ durch $\hat{y}_t$ so erhält man Gl. 11.13.

<u>Aussagen über die Wirkung von α:</u>

Ein großes α führt zu einer schnellen Abnahme der Gewichte:

	α	$\alpha(1-\alpha)$	$\alpha(1-\alpha)^2$	$\alpha(1-\alpha)^3$	$\alpha(1-\alpha)^4$
α	0,9	0,09	0,009	0,0009	0,00009
groß	0,8	0,16	0,032	0,0064	0,00128
α	0,3	0,21	0,147	0,1029	0,07203
klein	0,1	0,09	0,081	0,0729	0,06561

Ein großes α bedeutet ein kurzes Gedächtnis des Prozesses (die länger zurückliegenden Werte spielen eine geringere Rolle). Die Prognose reagiert schnell, auch auf vorübergehende Erscheinungen, sie paßt sich einem neuen Trend schnell an. Bei geringem α wird die Prognose auch von weiter zurückliegenden Daten stark beeinflußt und sie reagiert auf neue Entwicklungen sehr träge.

Beispiel 11.9

Die Hausfrau H wusste stets kulinarischen Genuß zu schätzen und entwikkelte unterdessen ein Raumbedürfnis welches hienieden sonst nicht schicklich ist. Sie trachtete deshalb hinfort danach, durch Schlankheitsmittel ihre Proportionen auf ein gefälligeres Maß zu reduzieren. Dabei gebrach es ihr jedoch an der gebotenen Konsequenz, so dass ihr Gewicht y (in kg) stark schwankte und sich eine nachhaltige Reduktion nicht einstellen wollte, wie die folgenden Zahlen zeigen:

t	0	1	2	3	4	5	6
t^*	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3
y_t	120	130	125	120	130	125	120

Man bestimme

a) Gleitende Durchschnitte zu jeweils 3 Perioden,

b) einen linearen Trend mit der Methode der kleinsten Quadrate und

c) einen Prognosewert für die Periode $t = 7$ (oder $t^* = 4$) mit der Methode des exponentiellen Glättens ($\alpha = 0,2$)!

Lösung 11.9

Die gleitenden Durchschnitte sind konstant 125. Mit der Methode der kleinsten Quadrate erhält man die nicht konstante, sondern leicht fallende Gerade: $y_t = 124,286 - 0,1786t^*$, bzw. (da $t^* = t-3$ und $124,686 + 3 \cdot 0,1786 = 125,222$) $y_t = 125,222 - 0,1786t$. Die Prognosewerte errechnen sich wie folgt gem. Gl. 11.11:

$\hat{y}_1 = y_o = 120$ (Startbedingung)

$\hat{y}_2 = \alpha y_1 + (1-\alpha)\hat{y}_1 = 0,2 \cdot 130 + 0,8 \cdot 120 = 122$

$\hat{y}_3 = \alpha y_2 + (1-\alpha)\hat{y}_2 = 0,2 \cdot 125 + 0,8 \cdot 122 = 122,6$ usw.

$\hat{y}_4 = 122,08$; $\hat{y}_5 = 123,664$; $\hat{y}_6 = 123,93$; $\hat{y}_7 = 123,145$

wobei die Prognose des Wertes 130 bei Betrachtung der Daten natürlich näher gelegen hätte. Wegen des geringen Wertes von α nähert sich die Folge der Prognosewerte nur allmählich dem den Daten zugrundeliegenden langfristigen Mittelwert von 125.

2. Exponentielles Glätten zweiter Ordnung

a) Rechengang

Beim *einfachen exponentiellen Glätten* (exponentielle Glättung *erster Ordnung*) galt $y_t = a + u_t$, so dass die Zeitreihe allein zufallsabhängig um ein bestimmtes Niveau a schwankt. Die Niveauschätzung a und damit $\hat{y}$ wird mit dem updating (11.15a) $\hat{a}_t = \alpha\, y_t + (1-\alpha)\, \hat{a}_{t-1} = \hat{y}_{t+1}$ laufend revidiert. Liegt dagegen ein linearer Trend vor, so soll das Modell

$$\boxed{(11.16) \quad y_{t+i} = a + i \cdot b + u_t}$$

(i= 1, 2, ..) lauten, wobei sowohl a als auch b unter Berücksichtigung vergangener Werte von y laufend neu zu schätzen sind als $\hat{a}$ und $\hat{b}$. Über dieses updating wirken die Daten y_t (und damit die Variable t) auf die Prognose ein. Der Prognoseansatz ist mithin

$$(11.16a) \quad \hat{y}_{t+i} = \hat{a}_t + i \cdot \hat{b}_t \ ,$$

bzw. bei Ein-Schritt-Prognosen (i=1)

$$\boxed{(11.17) \quad \hat{y}_{t+1} = \hat{a}_t + \hat{b}_t.}$$

Zur rekursiven Bestimmung von $\hat{a}$ und $\hat{b}$ gibt es verschiedene Lösungsansätze, die sich hauptsächlich aufgrund der Anzahl zu verwendender Glättungsfaktoren unterscheiden. Beim *Zwei-Parameter-Glätten* nach Holt verwendet man für Grundwert (a) und Trendwert (b) jeweils eigene Glättungsfaktoren α und β ($0 \leq \alpha, \beta \leq 1$), wobei gilt

$$(11.18) \qquad \hat{a}_t = \alpha\, y_t + (1-\alpha)\, \hat{y}_t$$

analog zu Gl. 11.11. Allerdings ist wegen der folgenden Gleichungen jeweils $\hat{a}_t$, $\hat{a}_{t-1}$,... hier nicht identisch mit den gleichnamigen Größen im einstufigen Fall. Über Gl. 11.18 beeinflussen die Daten y_t die Schätzung $\hat{a}_t$ (wenn $\alpha > 0$) und indirekt über $\hat{a}_t$ auch $\hat{b}_t$ wegen

$$(11.19) \qquad \hat{b}_t = \beta\, (\hat{a}_t - \hat{a}_{t-1}) + (1-\beta)\, \hat{b}_{t-1}.$$

b) Interpretation

Aus den damit dargestellten Verfahrensschritten lassen sich zwei Gleichungen folgern, nämlich:

$$(11.20) \qquad \hat{y}_{t+1} = \alpha \sum_{i=0}^{n} (1-\alpha)^i\, y_{t-i} + (1-\alpha)^{n+1}\, \hat{y}_{t-n} + \sum_{i=0}^{n} (1-\alpha)^i\, \hat{b}_{t-i}$$

und

$$(11.20a) \quad \hat{b}_t = \beta\, \Sigma\, (1-\beta)^i\, (\hat{a}_{t-i} - \hat{a}_{t-i-1}) + (1-\beta)^{n+1}\, \hat{b}_{t-(n+1)}$$

die im Vergleich mit Gl. 11.12 und bei Betrachtung extremer Werte für β, nämlich $\beta = 0$ und $\beta = 1$ für eine inhaltliche Interpretation nützlich sein dürften. Aus den Startbedingungen (vgl. Übers. 11.5) $\hat{a}_0 = y_0$ und $\hat{b}_0 = y_1 - y_0$ folgt generell $\hat{y}_1 = y_1$ und $\hat{y}_2 = 2y_1 - y_0$. Erst ab $\hat{y}_3$ wirkt sich aus, welche Werte für α und β angenommen werden.

$\boxed{\beta = 0}$

Ist $\beta = 0$, so ist $\hat{b}_t = \hat{b}_{t-1} = ... = \hat{b}_1 = \hat{b}_0 = y_1 - y_0$ und man erhält

$$\hat{y}_{t+1} = \alpha \sum_{i=0}^{n} (1-\alpha)^i\, y_{t-i} + (1-\alpha)^{n+1}\, \hat{y}_{t-n} + R$$

wobei das Restglied lautet

$$R = (y_1 - y_0) \sum_{i=0}^{n} (1-\alpha)^i = \frac{1-(1-\alpha)^{n+1}}{\alpha} (y_1 - y_0) \quad ,$$

d.h. es wird zu den Prognosewerten des einfachen exponentiellen Glättens praktisch (wenn $n \to \infty$) nur die Konstante $(y_1 - y_0)/(1-\alpha)$ addiert.

$\boxed{\beta = 1}$

Ganz allgemein gilt $\hat{a}_t - \hat{a}_{t-1} = \alpha(y_t - \hat{y}_t) + \hat{b}_{t-1}$. Wenn außerdem gelten soll $\beta = 1$, dann ist $\hat{b}_t = \hat{a}_t - \hat{a}_{t-1}$, so dass man erhält

$\hat{b}_0 = y_1 - y_0$

$\hat{b}_1 = \alpha(y_1 - \hat{y}_1) + \hat{b}_0 = y_1 - y_0$

$\hat{b}_2 = \alpha(y_2 - \hat{y}_2) + \hat{b}_1 = \alpha[y_2 - (2y_1 - y_0)] + (y_1 - y_0)$

$\hat{b}_3 = \alpha(y_3 - \hat{y}_3) + \hat{b}_2$ usw.,

so dass der Schätzung der Trendkomponente in diesem Fall eine Vorgehensweise in Analogie zu Gl. 11.13 (partielle Korrektur einer Fehlschätzung) zugrunde liegt, in ähnlicher Art übrigens wie dies für die Schätzung der Niveaukomponente $\hat{a}_t$ gilt. Denn aus den Gl. 11.17 bis 11.19 folgt

(11.18a) $\hat{a}_t = \hat{y}_t + \alpha (y_t - \hat{y}_t)$

(11.19a) $\hat{b}_t = \hat{b}_{t-1} + \alpha\beta (y_t - \hat{y}_t)$.

Zu einer zusammenfassenden Gegenüberstellung der Gleichungen für das exponentielle Glätten vgl. Übers. 11.5.

Beispiel 11.10:

Gegeben sei die folgende Zeitreihe mit einem ansteigenden Trend:

t	y_t	$\hat{a}_t$	$\hat{b}_t$	$\hat{y}$
0	14	14	2	14
1	16	16	2	16
2	17	17,7	1,91	18
3	17	18,83	1,68	19,61
4	19	20,06	1,54	20,51
5	-	-	-	21,6

Man bestimme Prognosewerte mit der zweistufigen Methode der exponentiellen Glättung (α, $\beta = 0{,}3$).

Lösung 11.10:

Für t=1 folgt daraus: $\hat{y}_1 = \hat{a}_0 + \hat{b}_0 = 14 + 2 = 16$,

$\hat{a}_1 = \hat{y}_1 + \alpha\,(y_1 - \hat{y}_1) = 16 + 0{,}3 \cdot (16-16) = 16$

und $\hat{b}_1 = \hat{b}_0 + \alpha\,\beta\,(y_1 - \hat{y}_1) = 2 + 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot (16-16) = 2$

usw. Die Prognosewerte sind in der Tabelle enthalten. Man erhält am *aktuellen Rand* für den Zeitpunkt t=5:

$$\hat{y}_5 = \hat{a}_4 + \hat{b}_4 = 20{,}06 + 1{,}54 = 21{,}6$$

Nach Gl. 11.16a kann man eine Mehrschrittprognose etwa für t=10 (i=6) wie folgt berechnen:

$$\hat{y}_{10} = \hat{a}_4 + 6\,\hat{b}_4 = 20{,}06 + 6 \cdot 1{,}54 = 29{,}3.$$

Mit der (in diesem Fall nicht angemessenen) Methode des einstufigen exponentiellen Glättens ($\alpha = 0{,}3$) erhielte man folgende Werte

$\hat{y}_1 = 14$, $\hat{y}_2 = 14{,}6$, $\hat{y}_3 = 15{,}32$, $\hat{y}_4 = 15{,}824$ und als Prognose $\hat{y}_5 = 16{,}7768$.

Übersicht 11.5: Schätzgleichungen bei exponentieller Glättung

	Glättung erster Ordnung	*Glättung zweiter Ordnung*
Prognose	$\hat{y}_{t+1} = \hat{a}_t$ [1]	$\hat{y}_{t+1} = \hat{a}_t + \hat{b}_t$
Rekursions-gl. für $\hat{a}_t$	$\hat{a}_t = \alpha\, y_t + (1-\alpha)\, \hat{y}_t$ [1] $= \alpha\, y_t + (1-\alpha)\, \hat{a}_{t-1}$	$\hat{a}_t = \alpha\, y_t + (1-\alpha)\, \hat{y}_t$ [2] $= \alpha\, y_t + (1-\alpha)\, (\hat{a}_{t-1} + \hat{b}_{t-1})$
	$\hat{a}_t - \hat{a}_{t-1} = \alpha\, (y_t - \hat{y}_t)$[3]	$\hat{a}_t - \hat{a}_{t-1} = \alpha\, (y_t - \hat{y}_t) + \hat{b}_{t-1}$
für $\hat{b}_t$		$\hat{b}_t = \beta\, (\hat{a}_t - \hat{a}_{t-1}) + (1-\beta)\, \hat{b}_{t-1}$ $= \hat{b}_{t-1} + \alpha\beta(y_t - \hat{y}_t)$[4]
Startbe-dingung	$\hat{a}_0 = y_0$	$\hat{a}_0 = y_0$ und $\hat{b}_0 = y_1 - y_0$

1) Wegen $\hat{y}_{t+1} = \hat{a}_t$ gilt auch $\hat{y}_t = \hat{a}_{t-1}$.

2) Dies ist nicht identisch mit Gl. 11.15a, denn $\hat{y}_t$ ist hier nicht gleich $\hat{a}_{t-1}$, sondern $\hat{a}_{t-1} + \hat{b}_{t-1}$, wie auch alle Größen $\hat{a}$ zahlenmäßig nicht identisch sind mit den entsprechenden Größen auf der linken Seite.

3) Zur Interpretation vgl. Gl. 11.13.

4) Man kann die Rekursionsgleichung für $\hat{b}$ auch so auffassen, dass man mit den Differenzen ($\hat{a}_t$ - $\hat{a}_{t-1}$) erneut eine Glättung durchführt (Gl. 11.12a).

b) Filter, Operatoren, Polynome

In diesem Abschnitt sollen kurz einige Werkzeuge der Beschreibung (und Modellwahl) von Zeitreihen sowie Folgerungen und Zusammenhänge unter Verwendung dieser Werkzeuge vorgestellt werden.

1. Filter:

Viele Rechenoperationen mit Zeitreihen kann man als Filterung der Zeitreihe auffassen. Ein "Filter" verwandelt eine Zeitreihe y_t (input) in eine transformierte Zeitreihe (output) z_t. Einfache lineare Filter sind z.B. gleitende Mittelwerte oder die Differenzenbildung (deren Output z_t lautet: $z_t = x_t - x_{t-1}$). Ein typischer nichtlinearer Filter ist die Bildung von Wachstumsraten mit $z_t = (x_t - x_{t-1})/x_{t-1}$.

2. Operatoren:

a) Verschiebungen der Variable t bewirkt der Backshift- oder Lag-Operator: $Ly_t = y_{t-1}$, $L^2y_t = y_{t-2}$ usw., der inverse Operator heißt Vorwärts- (V) oder Leadoperator $V^s y_t = L^{-s} y_t = y_{t+s}$.

b) Nicht auf t, sondern auf die Inputvariable wirken der Vorwärtsdifferenzenoperator (delta Δ) mit $\Delta y_t = y_{t+1} - y_t$, bzw. die Rückwärtsdifferenzen (nabla δ) $\delta y_t = y_t - y_{t-1}$. Hintereinanderausführen heißt Potenzieren des Operators

$$\Delta^2 y_t = \Delta y_{t+1} - \Delta y_t = \Delta(\Delta y_t) = y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t \ .$$

Man beachte, dass $\Delta^2 y_t$ nicht identisch ist mit $y_{t+2} - y_t$. Man kann Vor- und Rückwärtsdifferenzen auch für mehrere Perioden definieren, etwa $\delta(4)y_t = y_t - y_{t-4}$ oder $\delta(12)y_t = y_t - y_{t-12}$ beim Vorjahresvergleich mit Quartals- oder Monatsdaten, wovon man sich eine "automatische" Saisonbereinigung verspricht, weshalb man auch von saisonalen Differenzen spricht.

c) Zwischen den unter a) und b) genannten Operatoren bestehen Zusammenhänge. So sind beispielsweise δy_t und $(1-L)y_t$ äquivalent.

3. Lagpolynome:

Der Ausdruck $A_p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 +...+ a_pt^p$ ist ein Polynom in t vom Grade p und A_p heißt Polynomoperator.

Ein autoregressives Schema (eine linear-rekursive Funktion) erhält man mit dem Lagpolynom

$A_p(L)y_t = (a_0 + a_1L + a_2L^2 + ...+ a_pL^p)y_t = a_0y_t + a_1y_{t-1} + a_2y_{t-2} + ...+ a_py_{t-p}$.

Lineare Filter kann man als Lagpolynome darstellen, so z.B.

- ein ungewogener gleitender dreigliedriger Durchschnitt
  $y_t = (a_{-1}L^{-1} + a_0L^0 + a_1L^1)y_t = 1/3(y_{t+1} + y_t + y_{t-1})$
  mit $a_{-1} = a_0 = a_1 = 1/3$ oder
- ein (Rückwärts) Differenzenfilter
  $y_t - y_{t-1} = (1-L)y_t$ mit $a_0=1$ und $a_1=-1$.

4. Zwei Folgerungen, die für die praktische Anwendung von Bedeutung sind, sollen hier kurz dargestellt werden:

a) Ist y_t ein Polynom vom Grade p > 0 dann ist $\delta y_t = y_t - y_{t-1}$ ein Polynom vom Grade p-1, so dass die p-ten Differenzen $\delta^p y_t$ eine Konstante darstellen (Beispiel 11.9).

b) **<u>Satz:</u>**

Einem Polynom $y_t = A_p(t)$ ist eine linear rekursive Funktion $B_{p+1}(L)y$ äquivalent.

Beispiel:

p=1: der Funktion $y_t = a_0 + a_1t$ (Polynom vom Grade 1) ist das Lagpolynom $y_t = b_0 + b_1y_{t-1} + b_2y_{t-2}= 2y_{t-1} - y_{t-2}$ ($b_0 = 0$, $b_1 = 2$, $b_2 = -1$) mit den Anfangswerten $y_0 = a_0$ und $y_1 = a_0 + a_1$ äquivalent.
Aus $y_t = 2y_{t-1} - y_{t-2}$ folgt übrigens $\delta y_t = y_t - y_{t-1} = y_{t-1} - y_{t-2} = \delta y_{t-1} =$ const und für die zweiten Differenzen $\delta^2 y_t = 0$ (also das Verschwinden der zweiten Differenzen).

p=2: $y_t = a_0 + a_1t + a_2t^2$
äquivalent ist $y_t = 3y_{t-1} - 3y_{t-2} + y_{t-3}$
mit den Anfangswerten $y_0 = a_0$, $y_1 = a_0 + a_1 + a_2$ und $y_2 = a_0 + 2a_1 + 4a_2$. Hieraus folgt $\delta^3 y_t = 0$.

Wie man sieht, führt die Verallgemeinerung für beliebiges p zum binomischen Satz. Offenbar sind autoregressive Schemen, wenn deren Koeffizienten bestimmte Werte annehmen, als Polynome in t zu interpretieren.

5. Weitere Hilfsmittel zur Analyse von Zeitreihen sind die ***Autokovarianz- und Autokorrelationsfunktion*** (Korrelation von y_t mit y_{t-d}, wobei d = 0, 1, 2,... der Lag ist). Sie sind Ausgangspunkt weiterer Analyseverfahren (Spektralanalyse, Box Jenkins Verfahren), auf die jedoch hier nicht eingegangen werden soll.

Beispiel 11.10:

Man bilde für die Polynome

a) $y_t = a + bt = 2 + 3t$ und
b) $y_t = a + bt + ct^2 = 2 + 3t + 0{,}5t^2$

die Differenzen erster und zweiter Ordnung und stelle die Gleichungen dar als linear rekursive Funktionen.

Lösung 11.11:

a) Polynom vom Grade 1 (lineare-, Geradenfunktion)

t	y_t	δy_t	$\delta^2 y_t$
0	2		
1	5	3	
2	8	3	0
3	11	3	0
4	14	3	0

b) Polynom vom Grade 2 (Parabel)

t	y_t	δy_t	$\delta^2 y_t$	$\delta^3 y_t$
0	2			
1	5,5	3,5		
2	10	4,5	1	0
3	15,5	5,5	1	0
4	22	6,5	1	0

Man erkennt, dass bei einem Polynom vom Grade p die p-ten Differenzen konstant (und somit die p+1-ten Differenzen Null) sind.

a) $y_t = 2 + 3t$ ist äquivalent mit $y_t = 2y_{t-1} - y_{t-2}$ mit den Anfangswerten $y_0 = 2$ und $y_1 = 2 + 3 = 5$, so dass man erhält

$y_2 = 2y_1 - y_o = 2 \cdot 5 - 2 = 8$

$y_3 = 2y_2 - y_1 = 2 \cdot 8 - 5 = 11$

$y_4 = 2y_3 - y_2 = 2 \cdot 11 - 8 = 14 \cdot$

b) $y_t = 2 + 3t + ½t^2$ ist äquivalent mit $y_t = 3y_{t-1} - 3y_{t-2} + y_{t-3}$ mit den Anfangswerten $y_0 = 2$ und $y_1 = 2 + 3 + 0,5 = 5,5$ und $y_2 = 2 + 6 + 2 = 10$, so dass man erhält

$y_3 = 3y_2 - 3y_1 + y_0 = 3·10 - 3·5,5 + 2 = 15,5$

$y_4 = 3y_3 - 3y_2 + y_1 = 3·15,5 - 3·10 + 5,5 = 22$ usw.

c) Fourieranalytische Methoden

Eine kurze heuristische Einführung in die fourieranalytischen Methoden der Zeitreihenanalyse, auf die hier nicht weiter eingegangen werden kann, sollte zeigen, dass auch recht komplizierte Kurvenverläufe als Addition trigonometrischer Polynome "entstehen" können, so dass "umgekehrt" die Analyse einer empirischen Zeitreihe auch darin bestehen kann, zu zeigen, aus welchen Schwingungen sie sich zusammensetzt.

In der Funktion

(11.21) $y(t) = A·\sin(Bt + C)$

ist A die Amplitude (Maximalausschlag der Sinus-Schwingung), B die Kreisfrequenz (Anzahl der Schwingungen im Intervall $[0,2\pi]$; das übliche Symbol ist ω statt B) und C die Phase (Verschiebung gegenüber dem Ursprung).

Mit $a = A·\sin(C)$ und $b = A·\cos(C)$ läßt sich Gl. 11.21 umformen zu

(11.22) $y(t) = a·\cos(Bt) + b·\sin(Bt)$ mit $0 < B \leq \pi$

mit der Amplitude $A = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Umfasst z.B. die gesamte Länge einer Zeitreihe T = 120 Monate, so erstreckt sich eine Sinusschwingung über die volle Länge von 120 Monaten, wenn $B = 2\pi/120$ ist. Man erhält zwei Schwingungen über den gesamten Bereich, wenn die Frequenz 2B ist, weil dann die Periodenlänge (Wellenlänge) $2\pi/2B = (2\pi)120/4\pi = 60$ Monate beträgt. Entsprechend bedeutet eine Frequenz von kB (mit k = 1, 2,..., 60), dass k Schwingungen ausgeführt werden, die jeweils die Periodenlänge von 120/k Monaten (allgemein T/k Einheitsintervalle) haben. Statt $\sin(\lambda_k Bt)$ mit $B = 2\pi/T$ kann man auch schreiben $\sin(\lambda_k 2\pi t)$ mit $\lambda_k = k/T$ als Frequenz (im Unterschied zur Kreisfrequenz B), d.h. λ_k ist die Anzahl der Schwingungen zwischen t = 0 und t = 1.

Eine Überlagerung derartiger Schwingungen, d.h. ein Ausdruck der Gestalt

(11.23) $y(t) = \Sigma[a_k \cos(kBt) + b_k \sin(kBt)]$ mit $k = 1, 2, 3,...$
und a_k, b_k = Fourierkoeffizienten

kann eine unregelmäßig erscheinende Kurve darstellen. Das bedeutet auch, dass sich eine unregelmäßige Kurve y(t), bzw. deren diskrete Werte y_t als Summe von Schwingungen verschiedener Frequenzen und Amplituden zerlegen lässt. Eine Darstellung der relativen Bedeutung von Schwingungen verschiedener Frequenz ist das Periodogramm.

Im folgenden Beispiel wurde quasi Gl. 11.23 von rechts nach links betrachtet, d.h. es wurden zwei Schwingungen g(t) und h(t) konstruiert und die sich daraus ergebende Gestalt der "Zeitreihe" y(t) hinsichtlich der "Bedeutung" (gemessen an den Amplituden) bestimmter Frequenzen interpretiert. In der Praxis ist die Blickrichtung natürlich genau umgekehrt, d.h. bei gegebener Zeitreihe y(t) (bzw. y_t) wird von der linken auf die rechte Seite der Gl. 11.23 geschlossen, d.h. auf die der Zeitreihe zugrundeliegenden Schwingen. Wie dies geschieht, kann hier nicht dargestellt werden. Das gilt auch für die Interpretation des Periodogramms, das grob gesprochen angibt, in welchem Ausmaß eine Zeitreihe von kürzer- und längerfristigen Vorgängen geprägt ist.

Beispiel 11.13:

Bestimmen Sie die Gestalt der Überlagerung $y_1(t)$ der Funktionen

$g_1(t) = 20 \sin(2\pi \cdot 0{,}35t)$ und
$h_1(t) = 5 \sin(2\pi \cdot 0{,}07t)$
$y_1(t) = g_1(t) + \ln(t)$ für $t = 0$ bis $t = 30$

Man berechne ferner das Periodogramm für $f_1(t)$ und für $f_2(t)$ mit

$y_2(t) = 20 \sin(2\pi \cdot 0{,}07t) + 5 \sin(2\pi \cdot 0{,}35t)$

$y_1(t) = h_2(t) + g_2(t)$.

Lösung 11.13:

Der obere Teil der Abb. 11.3 und 11.4 zeigt die Funktionen $y_1(t)$ und $y_2(t)$ für $t = 0$ bis $t = 30$, d.h. unterschiedliche Überlagerungen von zwei Sinusschwingungen. Wie man sieht ist $y_1(t) = g_1(t) + h_1(t)$ als Zeitreihe von ganz anderer Gestalt als $y_2(t) = g_2(t) + h_2(t)$.

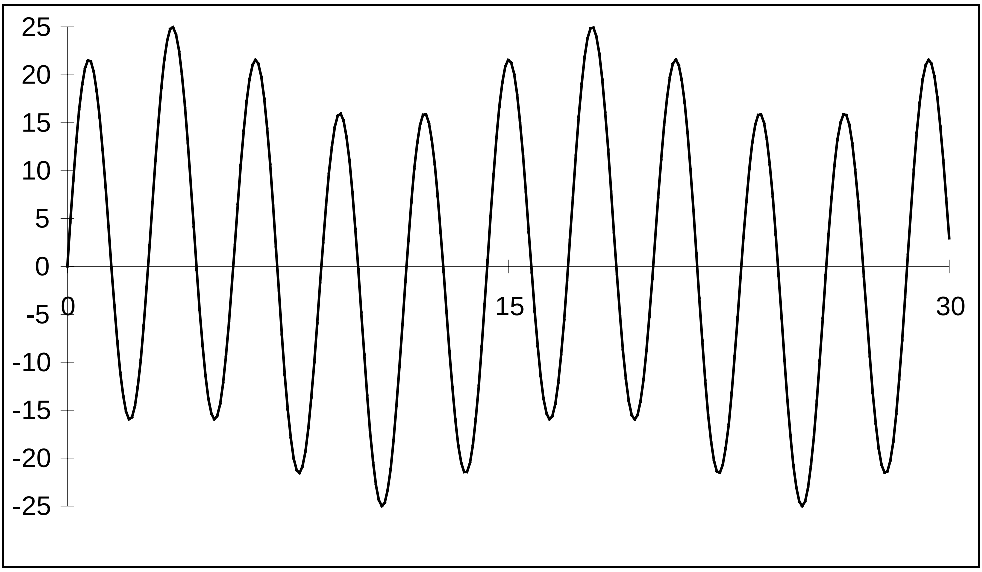
Die Periodogramme[1] zeigen, dass $y_1(t)$ stark von einer kurzen Welle (hohe Frequenz 0,35) geprägt ist, während es bei $y_2(t)$ genau umgekehrt ist. Das Beispiel wurde auch so konstruiert, dass in

$y_1(t)$ die hochfrequente Reihe ($g_1(t)$) die dominierende Amplitude besitzt und in

$y_2(t)$ "spiegelbildlich" die niedrigfrequente (langwellige) Reihe ($h_2(t)$) die dominierende Amplitude besitzt.

Das Ergebnis ist natürlich nicht überraschend, weil das Periodogramm jeweils genau das zu Tage gefördert hat, was in die fiktiven Zeitreihen "hineingelegt" wurde. Aber man erkennt an dieser extrem vereinfachten Betrachtung nicht nur wie unterschiedlich die konstruierten Zeitreihen im Zeitbereich (oberer Teil der Abbildungen) aussehen können, sondern auch dass sich dies bei der spektralen Darstellung im Frequenzbereich (unterer Teil der Abb. 11.3 und 11.4) widerspiegelt.

Abb. 11.3: Zeitreihe und Periodogramm von $y_1(t)$



1 Es wurde berechnet von Herrn Thomas Lungwitz aufgrund von diskreten Zeitreihen (t=1,...,300) von $y_1(t)$ und $y_2(t)$ mit dem Programm RATS im Rahmen seiner Diplom-Arbeit im Fach Statistik. Empirische Zeitreihen haben i.d.R. eine diskrete Zeitvariable t. Zehn gleiche Abschnitte wie in Abb. 11.3 und 11.4 so dass T = 300 ist (statt 30 Werte wie in den Abbildungen) wurden gewählt, damit die Schätzung des Periodogramms zuverlässig ist.

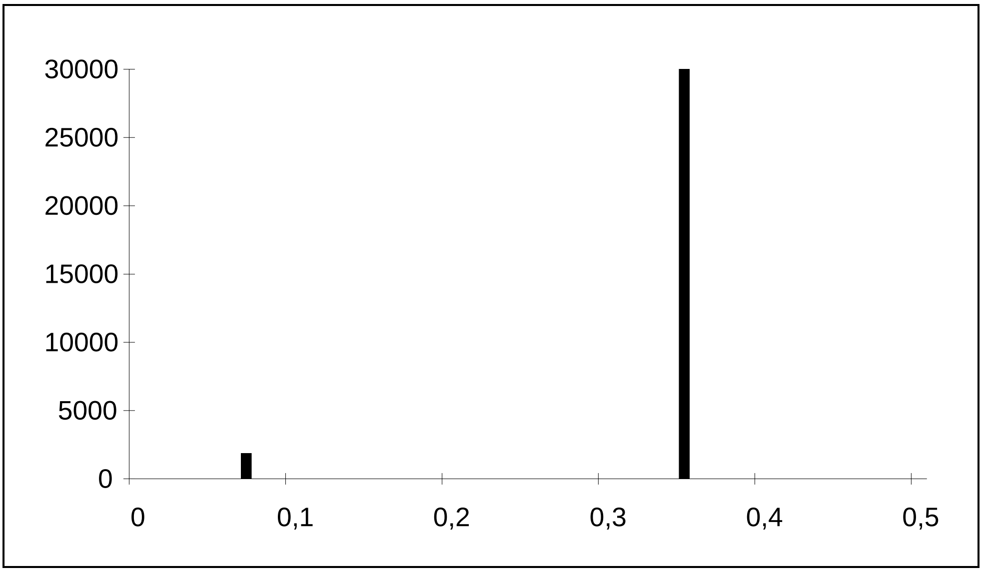
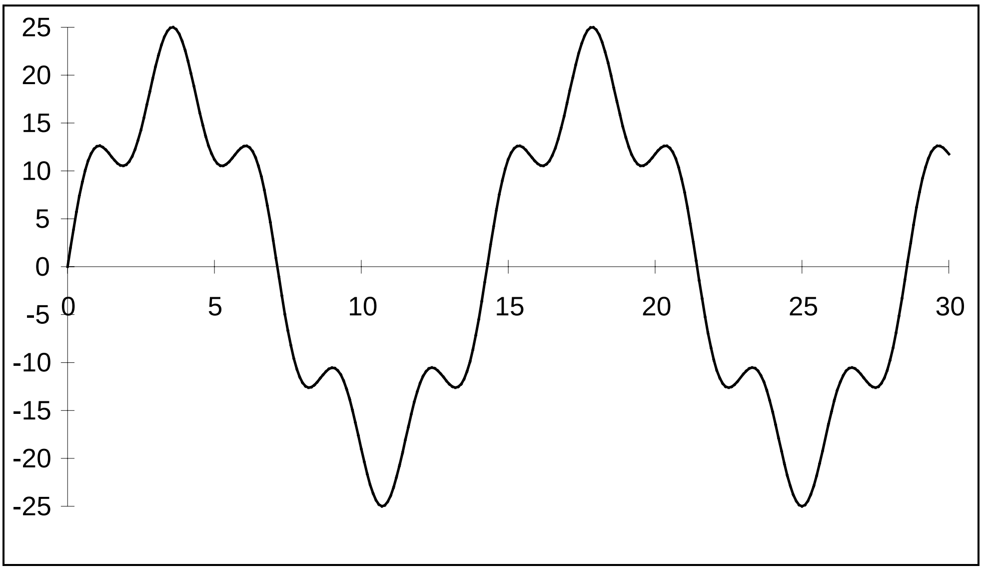
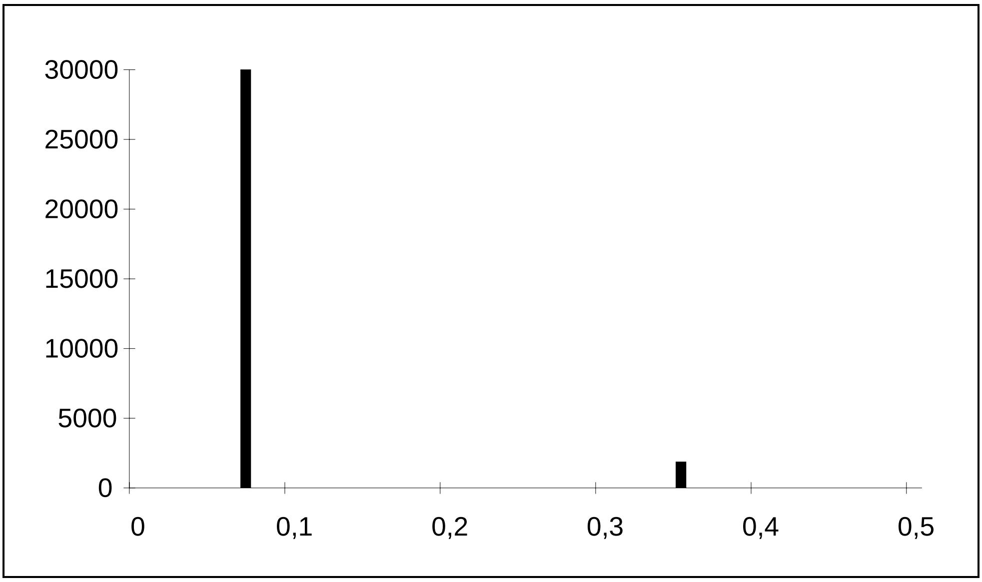


Abb. 11.4: Zeitreihe und Periodogramm von $y_2(t)$




30000
25000
20000
15000
10000
5000
0
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5