Kapitel 12: Bestandsanalyse und Tafelrechnung

1. Bestands- und Bewegungsmassen

a) Definitionen

Gegenstand der Bestandsanalyse ist die (graphische) Darstellung und Beschreibung (durch Kennzahlen) von Bestandsveränderungen durch laufend auftretende Zu- und Abgänge. Es ist durch geeignete Kennzahlen diese Dynamik des Bestands und das Ein- und Austrittsverhalten der Einheiten darzustellen.

Def. 12.1: Bestandsmasse, Bewegungsmasse, Verweildauer

a) Eine statistische Masse, deren Einheiten (i=1,2,...,n) jeweils gemeinsam zu einem bestimmten Zeit**punkt** t_j in einem Bestand (über eine nicht näher bestimmte Zeit) verweilen, heisst **Bestandsmasse** (engl. **stock**). Der Umfang der Bestandsmasse zum Zeitpunkt t_j heißt Bestand $B(t_j) = B_j$. Er ist zu jedem Zeitpunkt $t = t_j$ durch die Bestandsfunktion B(t) gegeben. Die Zeit kann als diskrete ($t = t_0, t_1,...,t_j,...,t_m$) oder stetige Variable betrachtet werden.

b) Eine statistische Masse, deren Einheiten dadurch charakterisiert sind, dass sie zu einem bestimmten Zeitpunkt ihren Zustand ändern (was ein "Ereignis" darstellt) heißt **Bewegungsmasse** (Ereignismasse, Stromgröße, engl. **flow**). Der Umfang einer Bewegungsmasse ist die Anzahl derartiger Ereignisse in einem gegebenen Zeit**raum**

(Zeitintervall). Zustandsänderung kann insbesondere bedeuten: Zugang zu oder Abgang von einer Bestandsmasse.

c) Jede Einheit einer Bewegungsmasse (i=1,2,...,n) ist durch Zugangszeit (t_{zi}) und Abgangszeit (t_{ai}) gekennzeichnet. Der Zeitraum zwischen Zu- und Abgangszeit $d_i = t_{ai} - t_{zi}$ heißt **Verweildauer** (Verbleibdauer).

Bemerkungen zu Def. 12.1:

1. Einheiten einer Bestandsmasse haben eine Verweildauer $d_i > 0$, d.h. sie befinden sich über einen nicht näher definierten Mindestzeit**raum** (Strecke) "im Bestand", während eine Bewegungsmasse aus Ereignissen besteht, die quasi in einem Zeit**punkt** passieren.
   Man spricht deshalb auch von Strecken- und Punktmasse, was jedoch insofern etwas verwirrend sein mag, weil erstere zu einem Zeitpunkt, zweite zu einem Zeitraum festgestellt wird (Nr. 2).
2. Umfang und Struktur einer Bestandsmasse wird zu einem Stichtag t_j erfaßt, während eine Bewegungsmasse für ein Zeitintervall $[t_0, t_j]$ definiert ist und i.d.R. sekundärstatistisch durch laufende Registrierung festgestellt wird.
3. Jeder Bestandsmasse (z.B. der Wohnbevölkerung) sind zwei Bewegungsmassen zugeordnet, die Zugangs- (Geburten und Einwanderungen) und die Abgangsmasse (Todesfälle und Auswanderungen).

   Das heißt jedoch nicht, dass jede Bewegungsmasse bestandsverändernd wirken muss: wegen Mehrfachbeschäftigung kann z.B. der Bestand an beschäftigten Personen nicht einfach mit der Zahl begonnener und beendeter Beschäftigungsverhältnisse fortgeschrieben werden.
4. Beispiele:

Bestandsmasse (stock)	Bewegungsmasse (flow)
Wohnbevölkerung	Geburten, Todesfälle, Wanderungen
Bruttoanlagevermögen	Investitionen, Verschrottungen
Kontostand	Gutschrift, Lastschrift
Vermögen	Einkommen
Auftragsbestand	Auftragseingang, Umsatz

Methoden der Erhebung von Bestands- und Bewegungsmassen:

Es gibt mehrere Möglichkeiten, Bestands- und Bewegungsmassen zu erfassen. Hiervon hängt es ab, wie informativ die Daten sind und welche Methoden zur Auswertung der Daten angewendet werden können.

1. Feststellung der Bewegungen (Bewegungsmassen)

a) durch individualisierte Erhebung aller Verläufe, d.h. für jede Einheit werden Zugangs- und Abgangszeit festgestellt (= Längsschnitts- oder Verlaufsanalyse);

b) laufende Registrierung aller Bestandsveränderungen und Auswertung der über ein Beobachtungsintervall (von t_0 bis t_j) kumulierten Zugänge (Z_{0j}) und Abgänge (A_{0j}), d.h. der Bruttoströme.

c) Feststellung der Bestandsveränderungen (d.h. der Salden- oder Nettoströme Z_{0j}-A_{0j}).

Im Vergleich zu den Bruttoströmen stellen Nettoströme eine erhebliche Verringerung des Informationsgehalts dar: es ist ein Unterschied, ob z.B. der Arbeitslosenbestand um 100.000 Personen wächst, weil 100.000 Personen arbeitslos geworden sind (Z_{0j} = 100.000) und niemand aus der Arbeitslosigkeit ausgeschieden ist (also A_{0j} = 0), oder ob es einen größeren Umschlag gab, also z.B. gilt Z_{0j} = 500.000 und A_{0j} = 400.000. Der Unterschied betrifft die mittlere Verweildauer und die Umschlagshäufigkeit der Einheiten.

2. Feststellung der Bestände (Bestandsmassen)

a) durch periodische Inventuren (Zählen oder Messen)

b) durch Fortschreibung für das Intervall $[t_0,t_j]$:

$$\boxed{(12.1)\quad B_j = B_0 + Z_{0j} - A_{0j} \quad (j = 0,1,...m)}$$

In Gl. 12.1 ist B_0 der Anfangsbestand, B_j der Bestand zum Zeitpunkt t_j, Z_{0j} die Anzahl der Zugänge und A_{0j} die Anzahl der Abgänge im Beobachtungsintervall $[t_0,t_j]$.

c) Bei Kenntnis sämtlicher individueller Verläufe (wie in 1a), also bei Längsschnittdaten, ist, wie noch gezeigt wird, der Bestand zu jedem beliebigen Zeitpunkt bekannt.

Unter Querschnittsanalysen versteht man die Kombination 1b + 2a und unter Längsschnittsanalysen die Kombination 1a + 2c.

Die durch Gl. 12.1 definierte "Fortschreibung" einer Bestandsmasse erlaubt auch eine "**Bilanzdarstellung**" von Bestandsmassen (Anfangs- [$=B_0$] und Endbestand [$=B_j$]) :

(12.1a) $N_{0j} = B_0 + Z_{0j} = B_j + A_{0j}$ (N_{0j} = Bilanzsumme)

Aktiv	Passiv
B_0	B_j
Z_{0j}	A_{0j}

Die "Bilanzsumme" N_{0j} ist die Anzahl der Einheiten, die im Intervall $[t_0,t_j]$ jemals der Bestandsmasse angehörten (wobei eine Einheit auch mehrfach gezählt werden kann). Es ist eine Anzahl von Bewegungen (Zu- und Abgängen), von Ein- und Austritts**fällen**, nicht die Anzahl n der daran beteiligten **Personen** ($n \leq N_{0j}$), weil eine Einheit (z.B. eine Person) mehrmals ein- und austreten kann.
Die Gleichungen 12.1 und 12.1a können für beliebige Intervalle aufgestellt werden, z.B. Gl. 12.1a auch für das gesamte Beobachtungsintervall von t_0 bis t_m

(12.1b) $N_{0m} = B_0 + Z_{0m} = B_m + A_{0m}$.

Aus der obigen Bilanzdarstellung kann man auch eine **kombinierte Fluß- und Bestandsgrößendarstellung** herleiten. Unterscheidet man die beiden Sektoren "Außenwelt"(AW) und "Bestand" oder "System"(BS) so ergeben sich folgende "Lieferbe-ziehungen":

	nach		
von	AW	BS	Σ
AW	**	Z_{0m}	**
BS	A_{0m}	R_{0m}	B_0
Σ		B_m	

Die Summe der drei Größen A_{0m}, Z_{0m} und R_{0m} ist N_{0m}.

Die mit ** bezeichneten Felder sind meist nicht von Interesse. In der Summenzeile, bzw. -spalte erscheinen End-, bzw. Anfangsbestand. R_{0m} sind die Einheiten des Anfangsbestan-
des die während des ganzen Intervalls im System geblieben sind. Die Abgänge A_{0m} kann man als "Lieferung" des Systems an die Außenwelt auffassen.

b) Beckersches Diagramm, Bestandsfunktion und Zeitmengenfläche

1. Beckersches Diagramm:

Eine graphische Darstellung der individuellen Verläufe ist das Beckersche Diagramm (Abb. 12.1 für das Beispiel 12.1). Die 45^o - Linie (Zugangsachse) z ist Konsequenz dessen, dass Zugangs- und Kalenderzeit (Abszisse t) synchron sind. Kreise bezeichnen Zugänge (auf der Achse z) und Kästchen Abgänge. Ihre horizontale Verbindung ist die Verweillinie der Einheit i, deren Länge die Verweildauer d_i ist. In Abb. 12.1 wurde davon ausgegangen, dass jeweils nur eine Einheit zu- oder abgeht.

2. Bestandsfunktion:

Es ist leicht zu sehen, wie aus dem Beckerschen Diagramm (oberer Teil von Abb. 12.1) die Bestandsfunktion B(t) (t stetig), bzw. B_j (Bestände zu den diskreten Zeitpunkten t_j) herzuleiten ist. Mit jedem Zugang (Abgang) einer Einheit erhöht (verringert) sich die Bestandsfunktion um 1.

3. Zeitmengenfläche:

Die schraffierte Fläche unter der Bestandsfunktion heißt Zeitmengenfläche F, oder genauer F_{0m} wenn die Fläche "über" dem Intervall $[t_0,t_m]$ betrachtet wird.

Beispiel 12.1:

Wegen des zur Nachsaison unsicheren Wetters ist das Badevergnügen oft von nur kurzer Dauer. Andererseits ergreifen jedoch die Urlauber wegen der ihnen entstandenen Kosten der weiten Reise jede sich bietende Gelegenheit, den Strand aufzusuchen. Am Strand von Katapulco gab es mithin an einem Vormittag (9 - 13 Uhr) ein ständiges Kommen und Gehen von (zwecks Rechenvereinfachung) nur fünf

Urlaubern A,...,E. Für die Zeiten galt:

	Zeitpunkt des	
	Zugangs t_{zi}	Abgangs t_{ai}
A	09^{30}	10^{00}
B	09^{45}	10^{45}
C	10^{30}	12^{30}
D	10^{45}	11^{15}
E	11^{45}	12^{45}

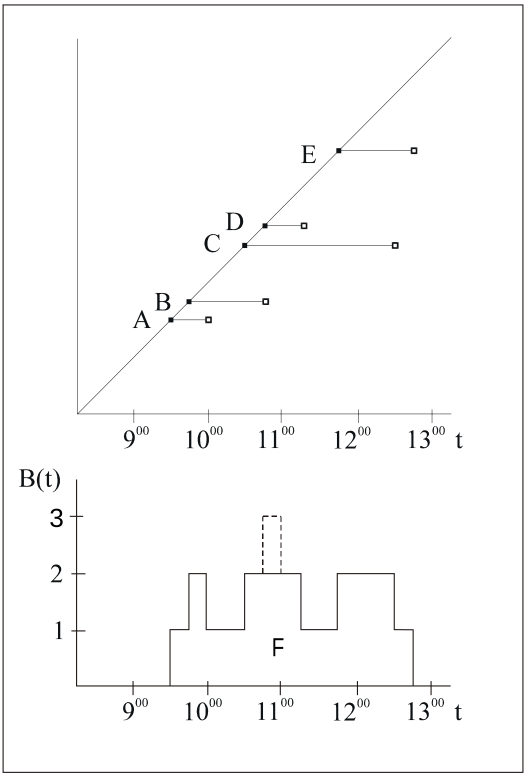
Man zeichne das Beckersche Diagramm und bestimme die Verweildauerverteilung.
Modifikation: B kommt um 09^{45} und geht nicht um 10^{45}, sondern um 11^{00}.

<u>Lösung 12.1:</u>

Man erhält für die Verweildauerverteilung:

	Zeitpunkt des		Verweildauer d_i	Verweildauer bei
	Zugangs	Abgangs	(in Stunden)	der
A	09^{30}	10^{00}	0,5	0,5
B	09^{45}	10^{45}	1,0	1,25
C	10^{30}	12^{30}	2,0	2,0
D	10^{45}	11^{15}	0,5	0,5
E	11^{45}	12^{45}	1,0	1,0
		Verweilsumme	$\Sigma d_i = 5{,}0$	$\Sigma d_i = 5{,}25$

Abb. 12.1: Beckersches Diagramm und Bestandsfunktion Beispiel 12.1



Def. 12.2: Zeitmengenfläche, -bestand

Die Zeitmengenfläche F_{0j} des Intervalls $[t_0,t_j]$ ist die Fläche "unter" der Bestandsfunktion B(t) im Intervall $[t_0,t_j]$.

Bemerkungen zu Def. 12.2:

1. Im Beispiel 12.1 ist die Zeitmengenfläche $F_{0m} = 5$, das ist die schraffierte Fläche in Abb. 12.1, bzw. 5,25 im modifizierten Bsp. 12.1.

2. Die Zeitmengenfläche ist eine gewogene Summe der Anzahl der Einheiten, gewogen mit der Zeit, die sie in diesem Intervall im Bestand verbringen. Bei einer geschlossenen Masse (vgl. Def. 12.3) ist die Zeitmengenfläche gleich der Verweilsumme Σd_i.

3. Die Maßeinheit der Zeitmengenfläche ist je nach zugrundeliegendem Beobachtungsintervall (z.B. Stunden, Jahre) "Personenstunden" oder "-jahre". Sie hat eine Anzahl- (vertikal) und eine Zeitdimension (horizontal) und erlaubt deshalb die Herleitung des Durchschnittsbe-

stands $\overline{B}$ einerseits und der durchschnittlichen Verweildauer $\overline{d}$ und der Umschlagshäufigkeit U andererseits (vgl. Übers. 12.1).

Satz 12.1:

Das Beckersche Diagramm ist umfassender (informativer) als

a) die zeitliche Verteilung der Zu- und Abgänge, bzw. die im Intervall von t_0 bis t_j kumulierten Zu- und Abgänge (Z_{0j}, A_{0j})
b) die Bestandsfunktion B_j (Bestand zu jedem Zeitpunkt $t = t_j$)
c) die Verteilung der Verweildauer d_i, also die Häufigkeitsverteilung der Variable Verweildauer. Denn:

Man kann vom Beckerschen Diagramm eindeutig auf a), b) oder c) schließen, nicht aber umgekehrt.

Das liegt daran, dass das Beckersche Diagramm individualisierte Verläufe enthält, bei den genannten Funktionen dagegen jeweils Individuen zusammengefaßt werden (vgl. hierzu Beispiel 12.2).

Beispiel 12.2:

Gegeben seien die folgenden vier Fälle von Bestandsveränderungen (jeweils eine geschlossene Masse [Def. 12.3]):

	Fall 1		Fall 2		Fall 3		Fall 4	
Einheit	t_{zi}	t_{ai}	t_{zi}	t_{ai}	t_{zi}	t_{ai}	t_{zi}	t_{ai}
A	1	4	1	3	1	3	1	2
B	2	3	2	4	2	4	2	5
C	3	4	3	4	3	4	4	6
D	4	6	4	6	4	7	5	6
E	5	7	5	7	5	6	5	7

Wie unterscheiden sich diese Fälle hinsichtlich

- der zeitlichen Verteilung der Zu- und Abgänge,
- der Bestandsfunktion,
- der Verweildauerverteilung und
- hinsichtlich des Beckerschen Diagramms?

Lösung 12.2:

Die zeitliche Verteilung (Zeitreihe) der Zu- und Abgänge ist in den Fällen 1 - 3 gleich: es geht jeweils eine Einheit zu den Zeitpunkten 1,2,3,4 und 5 zu. Es gibt drei Zeitpunkte (3,6 und 7), an denen jeweils eine Einheit und einen Zeitpunkt (4) an dem jeweils zwei Einheiten abgehen. Welche Einheiten jeweils abgehen ist jedoch verschieden. Konsequenz: gleiche Bestandsfunktion, aber unterschiedliche Beckersche Diagramme und folglich reicht es nicht aus, Zeitreihen über Zu- und Abgänge zu haben. Solche Daten erlauben keinen eindeutigen Schluß auf die Verweildauerverteilung. Denn es unterscheiden sich die Verteilungen der Verweildauer d_i. Man erhält die folgenden Verteilungen in den Fällen Nr.1, 3 und 4:

d_i	n_i
1	2
2	2
3	1

während man im Fall 2, wie man leicht sieht, eine andere Verteilung der Verweildauer erhält. Es kann sogar sein, dass sowohl die Zeitreihen der Zu- und Abgänge, als auch die Verweildauerverteilungen gleich sind (Fälle 1 und 3) und trotzdem hat das Beckersche Diagramm eine andere Gestalt: auch wenn es z.B. jeweils nur eine Einheit ist, die eine Verweildauer von nur einer Periode hat, so unterscheiden sich doch die Zu- und Abgangszeitpunkte (im Fall 1 ist dies die Einheit B, die zum Zeitpunkt 2 zu- und zum Zeitpunkt 3 abgeht, im Fall 3 ist dies die Einheit C, die in 3 zu- und in 4 abgeht).

Zusammenfassung:

Abkürzungen: Zeitreihen der Zu- und Abgänge (ZZA), Verweildauerverteilung (VV), Beckersches Diagramm (BD).

Vergleich der Fälle	gleich ist	ungleich ist*)
1 mit 2	ZZA	VV, BD
1 mit 4 und 3 mit	VV	ZZA, BD
1 mit 3	ZZA und VV	nur BD

*) ungleich ist bei **jedem** Vergleich das Beckersche Diagramm (BD).

c) Offene und geschlossene Massen

Def. 12.3: offene-, geschlossene Masse

Eine Bestandsmasse heißt geschlossen bezüglich des Zeitintervalls $[t_0, t_m]$, wenn keine ihrer Einheiten vor t_0 zugegangen ist und nach t_m abgeht (endgültig aus dem Bestand ausscheidet). Eine Masse, die nicht beidseitig geschlossen ist, heißt offene Masse. Man kann auch halbseitig und beidseitig offene Massen unterscheiden.

Im Beispiel 12.1 ist die Bestandsmasse der Badegäste geschlossen bezüglich des Intervalls 9 bis 13 Uhr, oder auch von 9^{10} bis 12^{50}, sie ist dagegen offen bezüglich des Intervalls 9^{50} bis 12^{10} (Anfangsbestand $B_0 = 2$, Endbestand $B_m = 2$)

Satz 12.2:

Bei einer geschlossenen Masse gilt:

1. Es gibt keinen Anfangs- und keinen Endbestand ($B_0 = B_m = 0$);
2. Zugänge = Abgänge (im Bsp. 12.1: $Z_{0m} = A_{0m} = 5$), denn alle Zugänge, die nur nach t_0 stattfanden sind auch vor t_m wieder abgegangen;
3. die Zeitmengenfläche (F_{0m}) ist gleich der Verweilsumme (Σd_i) (im Beispiel ist $F_{0m} = \Sigma d_i = 5$), d.h. es gilt:

(12.2a) $Z_{0m} = A_{0m} = N_{0m} = N$
(12.2b) $F_{0m} = \Sigma d_i$.

Zu weiteren Besonderheiten einer geschlossenen Masse vgl. Bem. 3 zu Def. 12.5.

2. Kennzahlen der Dynamik eines Bestands: Durchschnittsbestand, durchschnittliche Verweildauer und Umschlagshäufigkeit

a) Einführende Übersicht

Gegenstand der Bestandsanalyse ist, wie gesagt, die Beschreibung der Dynamik eines Bestandes, d.h. der Bestandsveränderung aufgrund laufender Zu- und Abgänge durch geeignete Kennzahlen, wie

- Durchschnittsbestand ($\overline{B}$),
- durchschnittliche Verweildauer ($\overline{d}$) und
- Umschlagshäufigkeit (U).

Übersicht 12.1 zeigt den Zusammenhang zwischen diesen im folgenden dargestellten Kennzahlen zur Beschreibung der Bestandsentwicklung. Die Zeitmengenfläche F_{0m} (d.h. die Fläche unter der Bestandsfunktion) ist die Grundlage für alle weiteren Berechnungen. Sie hat eine Zeit- und eine Anzahldimension; ihre Maßeinheit ist deshalb z.B. bei Stunden als Einheitsintervall "Personenstunden".

Übers. 12.1: Kennzahlen zur Beschreibung der Bestandsentwicklung

Zeitmengenfläche
F_{0m} (Personenstunden)

Zeitdimension - horizontal -	Anzahldimension (Bestand) - vertikal -
Division durch die Anzahl N von Ein- und Austrittsfällen*)	Division durch die Länge m des Intervalls $[t_m, t_0]$ ($m = t_m - t_0$) liefert den
durchschnittl. Verweildauer $\bar{d}$ (Stunden)	**Durchschnittsbestand $\bar{B}$ (Personen)**

U = Umschlagshäufigkeit
dimensionslos (da das Verhältnis von zwei Zeitintervallen m und $\bar{d}$, bzw. von zwei Anzahlen N und $\bar{B}$)

*) Die Anzahl $N = N_{0m}$ ist eine Anzahl von Fällen, nicht notwendig gleich der Anzahl n von Personen (Einheiten) die ein- und ausgetreten (zu- und abgegangen) sind.

Für die Berechnung des Durchschnittsbestands ($\bar{B}$) reichen (anders als für $\bar{d}$ und U) Inventuren und Fortschreibungen aus. Es ist auch gleichgültig, ob die Masse offen oder geschlossen ist. Die korrekte Bestimmung der durchschnittlichen Verweildauer ist aber bei solchen Querschnittsdaten nicht möglich. Bei offenen Massen sind ferner in höherem Maße Schätzungen vorzunehmen als bei geschlossenen Massen (vgl. Übers. 12.2).
Es ist deshalb im folgenden zu unterscheiden ob Längsschnitts- oder Querschnittsdaten vorliegen und dabei jeweils, ob die Bestandsmasse im Beobachtungsintervall geschlossen oder offen ist.

b) Kennzahlen bei Kenntnis der individuellen Verläufe (Längsschnittsdaten)

1. Bei einer geschlossenen Masse

Bei Kenntnis aller individueller Zu- und Abgangszeiten ist zu allen Zeitpunkten die Bestandsfunktion bekannt. Sie ist eine stetige Funktion B(t), weil Zu- und Abgänge zu beliebigen Zeiten stattfinden können. Aus dem Konzept der Bestandsfunktion folgt unmittelbar die Definiton des Durchschnittsbestands.

Def. 12.4: Durchschnittsbestand

Zwei Bestandsfunktionen $B_1(t)$ und $B_2(t)$ sind im Intervall $[t_0,t_m]$ der Länge $m = t_m - t_0$ "äquivalent", wenn sie die gleiche Zeitmengenfläche F_{0m} haben. Der Durchschnittsbestand ist dann als derjenige konstante Bestand definiert, der äquivalent der beobachteten Bestandsfunktion ist. Folglich gilt:

$$\boxed{(12.3)\quad \bar{B} = \frac{F_{0m}}{m}}$$

Abb. 12.2 veranschaulicht den Gedanken. Die Fläche (schraffiert) unter der tatsächlichen Bestandsfunktion (linker Teil von Abb. 12.2) ist gleich der Fläche unter der Konstanten $\bar{B}$ (rechter Teil), da gem. Gl. 12.3 gilt:

$m\bar{B} = F_{0m}$.

Das im folgenden behandelte Konzept der durchschnittlichen Verweildauer ist am einfachsten im Falle einer geschlossenen Masse einzuführen.

Def. 12.5: durchschnittliche Verweildauer, Umschlagshäufigkeit

a) Die durchschnittliche Verweildauer $\bar{d}$ ist das arithmetische Mittel der Verweildauerverteilung:

$$(12.4)\quad \bar{d} = \frac{\Sigma d_i}{N}.$$

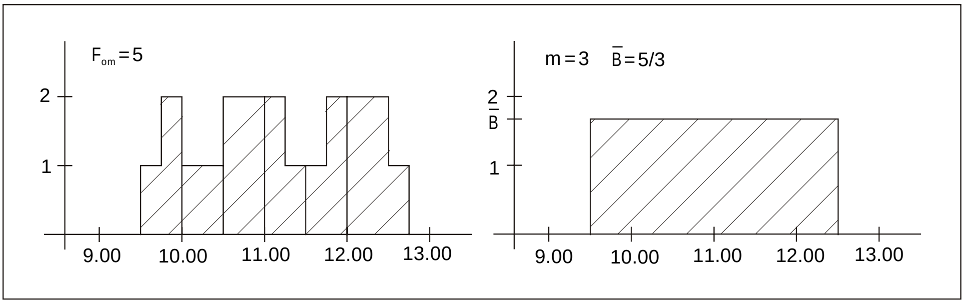
Nach Satz 12.2 gilt bei einer geschlossenen Masse $\Sigma d_i = F_{0m}$, so dass bei geschlossenen Massen Gl. 12.4 äquivalent ist mit

$$(12.4a)\quad \bar{d} = \frac{F_{0m}}{N}\ .$$

b) Die Umschlagshäufigkeit U ist gegeben durch

$$(12.5)\quad U = \frac{m}{\bar{d}}\ .$$

Abb. 12.2: Durchschnittsbestand



Bemerkungen zu Def. 12.5

1. Die Umschlagshäufigkeit U bringt zum Ausdruck, ob die durchschnittliche Verweildauer $\bar{d}$ größer (dann ist U < 1) oder kleiner (U > 1) als das Beobachtungsintervall m ist. Ist $\bar{d}$ < m, so können die Einheiten im Durchschnitt nicht die ganze Beobachtungszeit über im Bestand sein; der Bestand muss folglich mindestens einmal "umgeschlagen" sein. Bei gegebener Länge des Beobachtungsintervalls ist die Umschlagshäufigkeit indirekt proportional zur mittleren Verweildauer: je kürzer die Einheiten im Durchschnitt im Bestand verweilen, desto häufiger muss ein (konstanter) Bestand umgeschlagen sein.

2. Aus Gl. 12.3 und 12.4 folgt unmittelbar, dass auch gilt :

$$(12.5a)\quad U = \frac{N}{\bar{B}}$$

d.h. dass U das Verhältnis zwischen der Anzahl der Bewegungen N und dem Durchschnittsbestand $\overline{B}$ ist. Ist $Z_{0m} > \overline{B}$, also die Anzahl der Zugänge größer als der Durchschnittsbestand, so muss der Bestand mehrmals erneuert worden sein, also U > 1 sein.

3. Bei einer geschlossenen Masse ist stets $U \geq 1$, weil $\overline{d} \leq m$.

4. Im Falle einer Längsschnittsanalyse ist nicht nur die durchschnittliche Verweildauer, sondern die gesamte Verteilung der Verweildauer bekannt. Bei Querschnittsdaten kann es sein, dass die Verweildauerverteilung schwer zu schätzen ist, nicht aber deren Mittel, die durchschnittliche Verweildauer.

5. Im Beispiel 12.1 gilt:
   - durchschnittliche Verweildauer $\overline{d} = (1/N)\Sigma d_i = (1/n)\Sigma d_i = 5/5 = 1$ also eine Stunde;
   - Durchschnittsbestand (für die Zeit von 9 bis 13 Uhr) $\overline{B} = F_{0m}/(t_m-t_0) = 5/4 = 1{,}25$ Personen;
   - Umschlagshäufigkeit $U = m/\overline{d} = N/\overline{B} = 4$ (Bestand schlägt im Beobachtungsintervall viermal um). Zur Interpretation vgl. auch das Beispiel 12.3.

Beispiel 12.3:

Ein Lager werde zur Zeit $t_0 = 0$ mit vier Waren (A,...,D) gefüllt und der Lagerbestand soll während der ganzen Beobachtungszeit (von $t_0 = 0$ bis $t_m = 8$) konstant 4 betragen:

a) alle vier Waren haben die gleiche Verweildauer von 4 Perioden
b) zwei der vier Waren (A,B) haben eine Verweildauer von 2 Perioden und zwei Waren (C,D) von 4 Perioden.

Man bestimme die den beiden Teilen zugrundeliegenden Verteilungen der Verweildauer sowie die Umschlagshäufigkeit des Lagers in beiden Fällen.

Lösung 12.3:

Bezeichnet man die Waren von Typ A mit A_1, A_2,... wenn sie jeweils durch eine Ware des gleichen Typs A ersetzt werden (entsprechend B_1,B_2 usw.). Man erhält nun im Falle

a) Der Bestand besteht von t=0 bis t<4 aus A_1,B_1,C_1 und D_1 und von t=4 bis t<8 aus A_2, B_2,C_2 und D_2. Die Anzahl N der Ein- bzw. Austritte (Auslagerungen) ist 8, denn 4 Einheiten werden zur Zeit t=0 eingelagert (und bei t=4 ausgelagert) und 4 Einheiten werden zur Zeit t=4 ein- und zur Zeit t=8 ausgelagert. Der

Durchschnittsbestand ist $\bar{B} = 4$ und die Verweildauerverteilung hat die folgende Gestalt:

Verweildauer	$d_1 = 2$	$d_2 = 4$
Anzahl der Fälle	0	8

so dass die durchschnittliche Verweildauer $\bar{d} = 4$ und die Umschlagshäufigkeit 2 ist (denn das Lager wurde zweimal, zur Zeit t=0 und zur Zeit t=4 vollständig neu gefüllt).

b) Der Bestand besteht nun zwischen t=0 und t<2 aus A_1,B_1,C_1,D_1 und zwischen t=2 und t<4 aus A_2,B_2,C_1 und D_1, dann (t=4 bis t<6) aus A_3,B_3,C_2,D_2 und schließlich (t=6 bis t=8) aus A_4,B_4,C_2,D_2. Die Anzahl der Bewegungen (Ein- und Auslagerungen) ist 12 (nämlich $A_1,...,A_4,...,D_1,D_2$, so dass man die folgende Verweildauerverteilung erhält:

Verweildauer	$d_1 = 2$	$d_2 = 4$
Anzahl der Fälle	8	4

und die mittlere Verweildauer ist somit $2/3 \cdot 2 + 1/3 \cdot 4 = 32/12 = 8/3 = 2{,}667$ (und nicht, wie man meinen könnte, drei als [ungewogenes] arithmetisches Mittel aus 2 und 4; sie ist vielmehr das **harmonische** Mittel aus 2 und 4) und die Umschlagshäufigkeit ist 3, denn das Lager wurde im Mittel dreimal "umgeschlagen", zweimal bei den Waren C und D und viermal bei den Waren A und B.

2. Bei einer offenen Masse

Für die Definition des Durchschnittsbestands gilt weiterhin Gl. 12.3, die auch zur Berechnung von $\bar{B}$ herangezogen werden kann. Es ist aber nicht mehr von $\Sigma d_i = F_{0m}$ auszugehen. Vielmehr ist zur Berechnung der Verweilsumme Σd_i bezogen auf die $N = N_{0m}$ Einheiten, die im Beobachtungsintervall zu irgend einer Zeit dem Bestand angehörten, F_{0m} zu korrigieren um die Zeiten, welche die

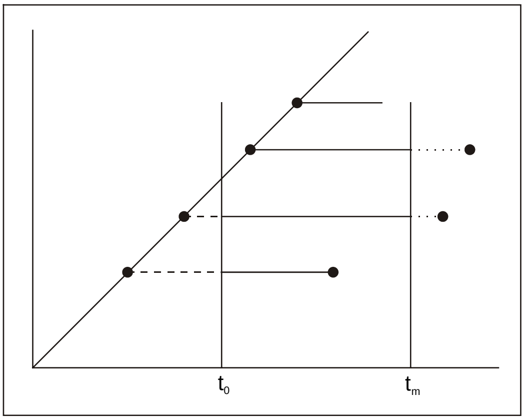
- B_0 Einheiten des Anfangsbestands vor t_0 bereits dem Bestand angehört hatten und die Zeiten welche die
- B_m Einheiten des Endbestands nach dem Ende des Beobachtungsintervalls, also nach t_m dem Bestand noch angehören werden.

In diesem Sinne spricht man von **Aufbauzeiten** und **Abbauzeiten** und es ist davon auszugehen, dass für die Zeiten vor t_0 und nach t_m keine Längsschnittsdaten vorliegen, so dass die Auf- und Abbauzeiten nur geschätzt werden können (zur Veranschaulichung dieser Zeiten vgl. Abb. 12.3). Die Verweilsumme ist unter diesen Voraussetzungen zu schätzen mit

$$\boxed{(12.6) \quad G_{0m} = B_0\bar{d}_0 + F_{0m} + B_m\bar{d}_m}$$

(B_0,B_m = Anfangs-, Endbestand; $\bar{d}_0$ ist die mittlere **Aufbau**zeit [d.h. die mittlere Verweildauer der B_0 Einheiten **vor** t_0] und $\bar{d}_m$ die mittlere **Abbau**zeit [mittlere restliche Verbleibdauer **nach** t_m im Bestand]).

Abb. 12.3: Auf- und Abbauzeiten



Aufbauzeit ---- Abbauzeit ·····

Man beachte, dass sich die Summanden in Gl. 12.6 aus sehr unterschiedlichen Verweilsummen zusammensetzen. Mit den Größen der oben behandelten kombinierten Fluß- und Bestandsgrößendarstellung erhält man die folgenden Verweilsummen:

Verweilsummen

Gruppe	vor t_0	im Intervall	nach t_m
A_{0m}	V_1	V_3	
R_{0m}	V_2	V_4	V_6
Z_{0m}		V_5	V_7

$N_{0m} = A_{0m} + R_{0m} + Z_{0m}$

Es ist offensichtlich, dass sich die Verweilsumme G_{0m} in Gl. 12.6 wie folgt zusammensetzt:

$$
\begin{aligned}
&B_0\bar{d}_0 &&= V_1 + V_2 \\
(12.7)\quad &F_{0m} &&= V_3 + V_4 + V_5 \\
&B_m\bar{d}_m &&= V_6 + V_7 \,.
\end{aligned}
$$

Zur Berechnung der durchschnittlichen Verweildauer ist G_{0m} an die Stelle von Σd_i in Gl. 12.4 einzusetzen, so dass für die durchschnittliche Verweildauer aller N_{0m} Einheiten, die jemals (zu irgendeiner Zeit) im Intervall [t_0,t_m] zum Bestand gehört haben gilt

$$
\boxed{(12.8)\qquad \bar{d}_N = \frac{G_{0m}}{N_{0m}}\;.}
$$

Für die Umschlagshäufigkeit U gilt weiter Gl. 12.5.

c) Kennzahlen bei Querschnittsdaten

1. Übersicht

Es ist davon auszugehen, dass für die Praxis allein der Fall einer offenen Masse relevant ist.
Ein Problem, das bei dieser Art von Daten zusätzlich auftritt und bisher nicht zu behandeln war, ist die Schätzung der Zeitmengenfläche, weil nicht individuelle Zu- und Abgänge beobachtet werden, d.h. diese nicht als Einzelfälle mit genauem Ein- und Austrittszeitpunkt festgehalten werden, sondern nur summarisch. Dies gilt selbst dann, wenn die Zu- und Abgänge im Beobachtungsintervall stattfinden. Übersicht 12.2 zeigt, wie sich die Berechnung von Kennzahlen in Abhängigkeit der Daten verkompliziert:

Übersicht 12.2: Schätzprobleme bei den Kennzahlen

Daten/Masse	Zeitmengenfläche F_{0m}	Verweilsumme Σd_i
1. Längsschnitt a) geschlossen b) offen	kein Problem, da Bestandsfunktion B(t) für jedes t bekannt	a) identisch mit F_{0m} b) als G_{0m} aus F_{0m} zu schätzen mit Gl. 12.6
2. Querschnitt (nur offene Masse)	zu schätzen mit Gl. 12.10, da B(t) nur zu bestimmten Zeitpunkten bekannt ist	Übergang von F_{0m} zu G_{0m} wie im Fall 1b, aber Annahmen über Auf- u. Abbauzeiten nötig

Der Übergang zu den aus F_{0m} bzw. Σd_i abgeleiteten Maßzahlen $\bar{B}$ und $\bar{d}$, sowie U ergibt sich analog zu Gl. 12.3 bis 12.5.

2. Zeitmengenfläche und Durchschnittsbestand:

Wenn die Bestandsänderungen ausschließlich genau zu den Beobachtungszeitpunkten t_j (j=1,2,...,m) stattfinden, dann ist die Zeitmengenfläche gegeben durch:

$$\boxed{(12.9) \quad F_{0m} = \Sigma B_{j-1}(t_j - t_{j-1}) \ ,}$$

denn der Bestand ist dann von t_{j-1}, als die letzte Bestandsänderung stattfand, bis t_j konstant B_{j-1}. Sind die Beobachtungszeitpunkte t_j (mit j = 1,2,... m) äquidistant, so dass $t_j - t_{j-1}=1$ (für alle j) und $t_m - t_0 = m$, so folgt aus Gl. 12.9

(12.9a) $F = F_{0m} = \Sigma B_{j-1} = B_0 + B_1 +...+B_{m-1}$.

Wegen $\Sigma(t_j - t_{j-1}) = m$ (bei j = 1,2,...,m und $t_m - t_0 = m$) ist erkennbar, dass $\bar{B} = F_{0m}/m$ ein mit Zeitintervallen gewogenes Mittel von Beständen ist.
Gl. 12.9a geht davon aus, dass Bestandsänderungen (Zu- und Abgänge) jeweils am **Ende** einer Einheitsperiode stattfinden. Entsprechend wäre bei Bestandsänderungen jeweils am **Anfang** einer Einheits- (Beobachtungs-) Periode die Zeitmengenfläche mit

(12.9b) $F^* = \Sigma B_j = B_1 + B_2+...+ B_{m-1} + B_m$

zu schätzen. Es liegt nahe, einen Mittelwert von F und F^* zu berechnen, so dass F_{0m} zu schätzen ist mit

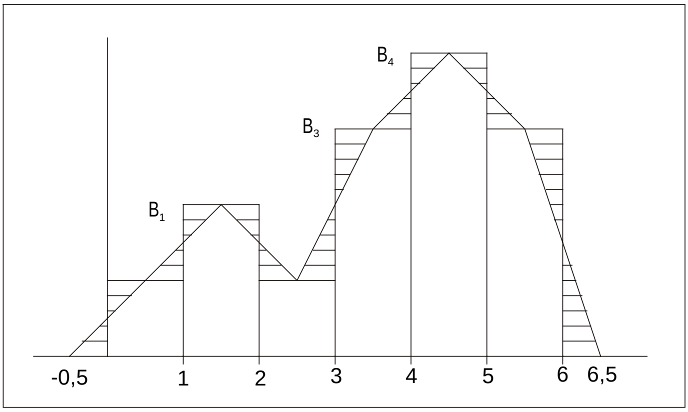
(12.10) $F_{0m} = ½B_0 + B_1 +...+ B_{m-1} + ½B_m$,

woraus $\bar{B}$ mit Gl. 12.3 zu errechnen ist.

Bemerkungen zu Gleichung 12.10:

1. Gl. 12.10 ergibt sich bei linearer Approximation der Bestandsfunktion (die dann ein Polygonzug ist); sie gilt bei offener **und** geschlossener Masse (vgl. Abb. 12.4). Sie beruht auf der Annahme, dass im Intervall von t_{j-1} bis t_j jeweils im Durchschnitt ½ $(B_{j-1} + B_j)$ Einheiten im Bestand sind.

Abb. 12.4: Bestandsfunktion als Polygonzug



2. Gl. 12.10 wird auch als **chronologisches Mittel** (einer Folge von Bestandszahlen) bezeichnet. Die Formel ist auch bekannt aus der Behandlung zentrierter gleitender Mittelwerte.

3. Eine exakte Berechnung der Zeitmengenfläche durch Gl. 12.9a bis 12.10 liegt nur dann vor, wenn Zu- und Abgänge von jeweils einer oder mehrerer Einheiten stets alle genau am Anfang, am Ende oder in der Mitte der Beobachtungsintervalle stattfinden. In allen anderen Fällen kann Gl. 12.10 nur eine Näherung sein. Dies gilt insbesondere dann, wenn für jedes Intervall nur die **kumulierten** (d.h. die Summe aller im Intervall zu beliebigen Zeitpunkten insgesamt erfolgten) Zu- und Abgänge bekannt sind.

4. Man beachte, dass Gl. 12.10 nicht identisch ist mit der häufig als Schätzung des Durchschnittsbestands verwendeten Mittelung von Anfangs und Endbestand ($\frac{1}{2}B_0 + \frac{1}{2}B_m$), die als Näherung noch wesentlich gröber ist und nur vertretbar ist, wenn die Bestandsfunktion im Intervall von t_0 bis t_m linear verläuft.

3. Durchschnittliche Verweildauer und Umschlagshäufigkeit:

Der Durchschnittsbestand ergibt sich einfach mit Gl. 12.10 in Verbindung mit Gl. 12.3. Die Schätzung der durchschnittlichen Verweildauer ist jedoch schwieriger, weil die Verweilsumme Σd_i aus F_{0m} zu schätzen ist. Es ist dabei analog zu Gl. 12.6 vorzugehen, d.h. G_{0m} ist die geeignete Schätzung von Σd_i. Anders als bei der Betrachtung von Gl. 12.6 ist jedoch jetzt davon auszugehen, dass keine Längsschnittsdaten vorliegen und über die durchschnittliche Aufbau- und Abbauzeit nichts bekannt ist.

Es sind nun Annahmen über die mittlere Aufbauzeit ($\bar{d}_0$) und Abbauzeit ($\bar{d}_m$) nötig. Üblich ist die Annahme

$$\bar{d}_0 = \delta\bar{d} \text{ und } \bar{d}_m = (1-\delta)\bar{d} \quad \text{mit } 0 < \delta < 1 ,$$

d.h. die B_0 Einheiten des Anfangsbestands haben im Durchschnitt bereits ein δ-tel ihrer gesamten Verweildauer vor t_0 zurückgelegt und die B_m Einheiten des Endbestands werden nach t_m noch ein (1-δ)-tel ihrer gesamten Verweildauer im Bestand bleiben.
Eingesetzt in (12.6) liefert das

$$G_{0m} = \bar{d}N_{0m} = B_0\delta\bar{d} + F_{0m} + B_m(1-\delta)\bar{d} \text{ und schließlich}$$

$$\boxed{(12.11)\quad \bar{d} = \bar{d}_N = \frac{F_{0m}}{dZ_{0m} + (1-d)A_{0m}}}$$

Welchen Wert kann man nun für δ in Gl. 12.11 ansetzen?

1. Wie man leicht sieht, bedeutet δ = 0

   $$\boxed{(12.11a)\quad \bar{d}_1 = m\bar{B}/A_{0m}}$$

   und bei δ = 1 gilt

   $$\boxed{(12.11b)\quad \bar{d}_2 = m\bar{B}/Z_{0m} \quad .}$$

   Der "Grenzwert" δ = 0 bedeutet, dass die Aufbauzeit der Zugänge vor t_0 genau $\bar{d}$ und folglich die Verweildauer im Beobachtungsintervall 0 beträgt. Es sind also Z_{0m} Einheiten zugegangen, und zwar ausschließlich vor t_0. Entsprechend widersprüchlich ist die Annahme δ = 1.

2. Sehr verbreitet ist nun die Annahme δ = ½, was zu der sehr bekannten Formel

   $$\boxed{(12.12)\quad \bar{d} = \frac{2m\bar{B}}{Z_{0m}+A_{0m}}}$$

   führt. Sie gilt auch bei einer geschlossenen Masse, da dort stets $N_{0m} = Z_{0m} = A_{0m} = (Z_{0m}+A_{0m})/2$ ist. Gilt $Z_{0m} = A_{0m}$, was bei einer offenen Masse meist dann anzunehmen ist, wenn das Intervall von t_0 bis t_m genügend lang ist und sich der Bestand nicht wesentlich verändert, so erhält man unabhängig von der Wahl von δ aus Gl. 12.11 stets Gl. 12.12.

   Als Faustregel gilt, dass die Länge m des Intervalls etwa (mindestens) die vierfache durchschnittliche Verweildauer $\bar{d}$, sein sollte, um $\bar{d}$, mit Gl.12.12 zuverlässig schätzen zu können.

   Zur Anwendung der Gl. 12.12 bei der Schätzung der durchschnittlichen Verweildauer vgl. auch Beispiel 12.4.

3. Man kann davon ausgehen, dass sich ein größerer Bestand langsamer auf- und abbaut als ein kleinerer Bestand und so z.B. annehmen, dass die (auf die Anzahl der Einheiten bezogene) durchschnittliche Aufbauzeit des Anfangsbestands sich zu der durchschnittlichen Abbauzeit des Endbestands wie Anfangsbestand zu Endbestand verhält, also $\bar{d}_0 / \bar{d}_m = B_0 / B_m$. Das führt dann zu der folgenden häufig verwendeten Annahme über δ:

$$(12.13) \qquad \boxed{\delta = \frac{B_0}{B_0 + B_m}}$$

Gleichbleibender Bestand $B_0 = B_m$ bedeutet danach $\delta = ½$ und zunehmender Bestand ($B_0 < B_m$) kürzere Aufbauzeiten, also $\delta < ½$. Bei gegebener Fläche F_{0m} ist der Nenner $\delta(Z_{0m}-A_{0m})+A_{0m}$ in Gl. 12.11 bei zunehmendem Bestand wegen $Z_{0m} > A_{0m}$ (sonst könnte der Bestand ja auch nicht zunehmen) größer als bei abneh-mendem Bestand $Z_{0m} < A_{0m}$, so dass in diesem Fall auch die Verweildauer sinkt.

Beispiel 12.4:

Für die Bundesrepublik galten für die Zeit von 1982 bis 1987 die folgenden Zahlen der Arbeitslosenstatistik:

Bestand, Zugang und Abgang an Arbeitslosen

Jahr	Bestand	Zugang	Abgang
1982	1.833.244	3.706.655	3.187.165
1983	2.258.235	3.704.185	3.578.551
1984	2.265.559	3.672.791	3.696.594
1985	2.304.014	3.750.240	3.728.294
1986	2.228.004	3.637.266	3.766.214
1987	2.228.788	3.726.460	3.636.411

Quelle: J. Kühl, 15 Jahre Massenarbeitslosigkeit, Aspekte einer Halbzeitbilanz, in: Aus Politik und Zeitgeschichte, Beilage zur Wochenzeitschrift "Das Parlament" vom 16.9.1988.

Berechnen Sie den Durchschnittsbestand und schätzen Sie die durchschnittliche Verweildauer (in der Arbeitslosigkeit) sowie die Umschlagshäufigkeit des Arbeitslosenbestandes!

(Anmerkung zu den Daten: Es wird häufig vergessen, dass ein hoher Bestand an Arbeitslosen von über 2,2 Millionen [ab 1983] auch einhergeht mit einer erheblichen Bewegung auf dem Arbeitsmarkt. In diesen Jahren wurden nämlich jeweils über 3½ Millionen Zu- und Abgänge zur, bzw. aus der Arbeitslosigkeit gezählt. Ist die Anzahl der Bewegungen groß gegenüber dem Bestand [so bei Arbeitslosigkeit oder Krankenhausbelegung], so ist die durchschnittliche Verweildauer kurz. Die

Umkehrung gilt bei der Bevölkerung: die Anzahl der jährlich beobachteten Bewegungen (Geburten, Todesfälle) ist gering, verglichen mit dem Bestand, also ist die Verweildauer (Lebensdauer) relativ groß.

Lösung 12.4:

Die Anwendung von Gl. 12.10 (für F_{0m}) und Schätzung von $\overline{B}$ nach Gl. 12.3/12.12 führt zu: F_{0m} = 11.086.828, $\overline{B}$ = 2.217.365,6 (man beachte, dass m = 5 ist, $B_0 = B_{1982}$ und $B_m = B_{1987}$, so dass ½(B_0+B_m) = 2.031.016 < $\overline{B}$, wobei $\overline{B}$ aufgrund von mehr als nur zwei Bestandszahlen geschätzt wurde); Z_{0m} = 22197597 und A_{0m} = 21593229. Man erhält daraus mit Gl. 12.12 für die durchschnittliche Verweildauer $\overline{d}$ = 0,50635. Man erkennt übrigens auch, dass die Wahl von δ keine große Rolle spielt, denn:
für δ = 0 erhält man $\overline{d}_0 = F_{0m}/A_{0m}$ = 0,51344
und für δ = 1 erhält man $\overline{d}_u = F_{0m}/Z_{0m}$ = 0,49946.

Weitere Interpretationen von Gl. 12.11 und 12.12

- Es ist offensichtlich, dass die Gl. 12.11 und 12.12 nicht zu verwenden sind, wenn es keine Zu- und Abgänge gibt, wenn also $Z_{0m} = A_{0m} = 0$.
- Von der gerade durchgeführten Betrachtung, ob $Z_{0m} > A_{0m}$ oder umgekehrt $Z_{0m} > A_{0m}$, ist zu unterscheiden, wie sich bei gegebenem Z_{0m} eine Zunahme von A_{0m} (bzw. bei gegebenem A_{0m} eine Zunahme von Z_{0m}) auf die durchschnittliche Ver-weildauer auswirkt. In beiden Fällen ist wegen des Nenners der Gl. 12.12 mit einer Abnahme der Verweildauer zu rechnen.
- Man sollte sich klarmachen, dass Gl. 12.12 in der Regel nur eine grobe Schätzung der mittleren Verweildauer darstellen kann. Das folgende Beispiel mit drei bzw. vier Personen (A,...,D) möge das zeigen.

Beispiel/Lösung 12.5:

Gegeben seien die folgenden Angaben über die Verweildauer von vier Einheiten:

Verweildauer

Person	vor t_0	im Intervall	nach t_m
A	2	2	0
B	0	3	3
C	0	5	0
D	3	3	0

Rechnet man nur mit den Personen A,B und C, so erhält man die durchschnittliche Verweildauer $\overline{d}$ = (4+6+5)/3 = 5 und nach Gl. 12.11 wegen F_{0m}= 2+3+5=10 sowie Z_{0m}= A_{0m} = 2 (Zugänge: B,C; Abgänge: A,C)und δ = ½ ebenfalls $\overline{d}$ = 5. Die Berechnung für die vier Personen A,..., D führt dagegen zu einer tatsächlichen Verweilsumme von Σd_i =21 also $\bar{d}$ = 21/4 = 5,25, aber nach Gl. 12.11 wegen F_{0m} = 2+3+5+3=13 sowie Z_{0m} = 2 und A_{0m}= 3 sowie δ = ½ zu $\bar{d}$= 26/5 = 5,2.

4. Weitere Kennzahlen bei Querschnittsdaten: Verhältniszahlen

Es ist davon auszugehen, dass Zugänge (Abgänge) nicht individuell zum Zeitpunkt ihres Zugangs (Abgangs), sondern nur summarisch erfaßt werden, so dass Z_{0m} (A_{0m}) die Gesamtzahlen der Zu-, bzw. Abgänge sind, die irgendwann im Intervall $[t_0,t_m]$ stattfanden. Entsprechend sei dann $\bar{B}$ der Durchschnittsbestand im Intervall bzw. der Bestand in der **Mitte** dieses Intervalls.

Def. 12.6: Zugangs- und Abgangsraten

Die mit

$$(12.14) \quad z_{0m} = \frac{Z_{0m}}{\bar{B}} \quad \text{und} \quad a_{0m} = \frac{A_{0m}}{\bar{B}}$$

definierten Größen werden auch Raten genannt. Die (rohe)[1] Geburtenrate ist vom Typ einer Zugangsrate (z_{0m}) und die (rohe) Todesrate eine Abgangsrate (a_{0m}). Raten sind Beziehungszahlen und somit spezielle Verhältniszahlen (vgl. Kap. 9).

Der Ausdruck Rate ist in diesem Fall durchaus sinnvoll. Würde man im Nenner nicht den Durchschnitts- sondern den Anfangsbestand ansetzen, so wäre offensichtlich die Differenz der so definierten Raten $z^* = Z_{0m}/B_0$ und $a^* = A_{0m}/B_0$ die Wachstumsrate des Bestands. Hier zeigt sich übrigens auch die Problematik der Längsschnittsinterpretation von Querschnittsdaten: Wenn beispielsweise die Scheidungsquote (Scheidungen eines Jahres/Bestand an Ehen in der Mitte des Jahres) σ = 0,007 ist, dann heißt das nicht, dass nur 0,7% aller Ehen vor dem Scheidungsrichter enden, denn in σ gehen ja nur die Scheidungen eines Jahres ein und die durchschnittliche Verweildauer in der Ehe ist jedoch länger als ein Jahr. Damit ist die Lösung des folgenden Beispiels klar.

Beispiel 12.6:

(querschnitts- und längsschnittsanalytische Scheidungsquote)

---

[1] Der Zusatz "roh" (oder "allgemein") ist üblich, weil es auch alters- oder geschlechtsspezifische Raten gibt. So ist z.B. die altersspezifische Sterberate (Todesrate) der 60-jährigen definiert als die Anzahl der im Alter von 60 Gestorbenen, dividiert durch die Wohnbevölkerung (also die Lebenden) im Alter von 60 Jahren. Die altersspezifischen Sterberaten sind die Grundlage für die Berechnung der Sterbewahrscheinlichkeiten, die ihrerseits Basis für die Konstruktion der Sterbetafel sind.

In den letzten Jahren betrug die sog. "Scheidungsquote" in der Regel meist etwa um 20 je 10.000 Einwohner und 70 je 10.000 bestehende Ehen.
Bedeutet dies, dass nur jeder 500te Bundesbürger geschieden wird und dass nur etwa jede 143te Ehe (also noch nicht einmal 1%, genau genommen nur 0,7% [70/10000]) vor dem Scheidungsrichter endet?

Lösung 12.6:

Die Lösung ergibt sich aus dem Text vor dem Beispiel.

3. Stationäre Bevölkerung und Tafelrechnung

a) Stationäre Bevölkerung

Das Modell der stationären Bevölkerung ist eine stark vereinfachte Darstellung einer Entwicklung, bei der abstrahiert wird von Wachstum und Strukturveränderung. Es erlaubt, eine offene Masse wie eine geschlossene Masse zu behandeln und von der Querschnitts- auf die Längsschnittsbetrachtung zu schließen. Es liegt der Berechnung einer Sterbetafel zugrunde, weshalb man auch von "Sterbetafelbevölkerung" spricht.
In einer stationären Bevölkerung wird jeder Geburtsjahrgang (jede "Kohorte") durch eine

a) gleich große und
b) gleich strukturierte

Kohorte ersetzt. Wegen a) wird im Modell abstrahiert von einer Dynamik (Wachstum) und wegen b) von einer Strukturveränderung (z.B. in Form einer Veränderung der Sterbewahrscheinlichkeiten und damit der Abgangsordnung). Es sind deshalb zunächst die Begriffe Kohorte und Abgangsordnung zu definieren.

Def. 12.7: Kohorte, Abgangsordnung, stationäre Bevölkerung

a) Eine Zugangskohorte oder einfach Kohorte ist die Gesamtheit der gleichzeitig (zum gleichen Zeitpunkt t_j, bzw. im gleichen Intervall geringer Länge $[t_{j-1}, t_j]$) zugehenden Einheiten. Ihr Umfang, d.h. die Zahl
der zugehenden Einheiten ist l_0.

b) Die Abgangsordnung l_x (wobei x = 0,1,...,w das Alter, d.h. die Anzahl der vollendeten Jahre ist) ist die Anzahl der Überlebenden des Alters x. Es ist der Restbestand einer Geburtskohorte des Umfangs l_0 nach Vollendung von x Jahren in Abhängigkeit von x.

c) Bei einer stationären Bevölkerung (Sterbetafelbevölkerung) wird jede Kohorte (jeder Geburtsjahrgang) in jedem aufeinanderfolgenden Intervall (in allen folgenden Jahren) durch eine gleich große Kohorte (so dass $Z_{j-1,j} = l_0$ für alle j) mit gleicher Abgangsordnung (d.h. gleicher "Struktur"; l_x ist nicht von j sondern nur von x abhängig) ersetzt.

Folgerungen aus Def. 12.7:

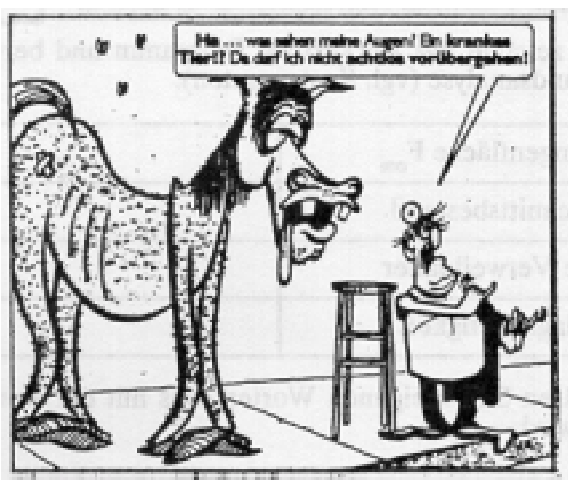
1) Die Stärke der Geburtsjahrgänge und die Abgangsordnung l_x ist nicht abhängig vom Geburtsjahr (von der absoluten-, objektiven Zeit). Die Abgangsordnung, d.h. die Folge $l_0, l_1, \ldots l_w$, und alle im folgenden eingeführten Tafelfunktionen q_x, T_x und e_x hängen bei einer stationären Bevölkerung allein vom Alter x ab (von der relativen Zeit). Das ist der Grund, weshalb hier (und nur hier) vom Querschnitt auf den Längsschnitt geschlossen werden kann.

2) Die Abgangsordnung (auch "Absterbeordnung", "Überlebensordung" oder "Absterbefunktion") ist eine monoton (nicht streng-monoton) abnehmende Funktion des Alters: ist das Alter z größer als das Alter x, so ist $l_z \leq l_x$.

Beispiel 12.7:

Trotz intensivster ärztlicher Bemühungen haben sich die fünf ersten Exemplare einer neu gezüchteten Pferderasse als nicht sonderlich überlebensfähig herausgestellt. Das Pferd Egon konnte noch nicht einmal seinen ersten Geburtstag feiern. Das Alter (in vollendeten Jahren), das die fünf Pferde erreichten betrug leider nur:

Pferd	Alter
Egon (E)	0
Doris (D)	1
Boris (B),Clara	2
Augustus (A)	3



Man bestimme aus diesen Daten die Abgangsordnung l_x und die Altersverteilung der Kohorte (des Geburtsjahrgangs).
Das Beispiel soll im fol-

genden erweitert werden.

Lösung 12.7:

Abgangsordnung

Alter x	Pferde	l_x
0	A,B,C,D,E	5
1	A,B,C,D	4
2	A,B,C	3
3	A	1
4		0

Verteilung des Sterbealters

Von den l_0 = 5 Pferden erreichen d_x das Alter (Anzahl der vollendeten Jahre) von x Jahren:

x	d_x	(Pferd)
0	1	Egon
1	1	Doris
2	2	Boris,
3	1	Augustus

Fortführung des Beispiels 12.7:
Man stelle sich nun vor, Diplom-Kaufmann K aus E betreibe seine Pferdezucht weiter und jedes Jahr werden 5 Pferde A,...,E geboren, die in der gleichen Weise leider nur sehr kurz leben und spätestens (Pferd Augustus) kurz vor Erreichen des 4-ten Geburtstags sterben. Man erhält nun beginnend mit dem Jahr 1991 die folgende "Pferdebevölkerung" (die Geburtsjahrgänge [Kohorten, engl. vintages] werden mit 1,2,... bezeichnet).

Jahr	Pferde im Alter von ...Jahren			
		1	2	3
91	A_1,B_1,C_1,D_1,E_1			
92	A_2,B_2,C_2,D_2,E_2	A_1,B_1,C_1,D_1		
93	A_3,B_3,C_3,D_3,E_3	A_2,B_2,C_2,D_2	A_1,B_1,C_1	
94	A_4,B_4,C_4,D_4,E_4	A_3,B_3,C_3,D_3	A_2,B_2,C_2	A_1

Wie man sieht ist ab 1994 die Altersverteilung der Pferde und der Umfang der Pferdebevölkerung konstant. Es gilt für die Altersverteilung der $T^*{}_{,0}$ = Σl_x = 13 Pferde :

Altersverteilung des Bestands

Alter x	0	1	2	3	Summe
Pferde	l_0=5	l_1=4	l_2=3	l_3=1	$T^*_0=\Sigma\, l_x=13$

Wie man sieht gilt: Die Anzahl der Pferde des Alters x ist stets genau l_x. Bei einer stationären Bevölkerung hängt also der Bestand mit der Absterbeordnung eng zusammen (vgl. Satz 12.3). Es ist nun auch von Interesse, die Altersverteilung des Bestands mit derjenigen der Kohorte (der jedes Jahr stattfindenden Geburten und Todesfälle) zu vergleichen:

Altersverteilung der Kohorte

Alter x	0	1	2	3	Summe
Pferde	d_0=1	d_1=1	d_2=2	d_3=1	$l_0 = \Sigma d_x$=5

Es ist auch offensichtlich, dass das Durchschnittsalter der Lebenden (des Bestands) kleiner ist als das durchschnittliche Sterbealter (Durchschnittsalter der Gestorbenen).
Schließlich besteht zwischen den Größen l_x und d_x folgender Zusammenhang:

Absterbeordnung l_x und Anzahl der Gestorbenen d_x

Alter x	Anzahl der Überlebenden l_x	im Beispiel 12.7
0	$l_0 = d_0 + d_1 + d_2 + \ldots + d_w$	$d_0 + d_1 + d_2 + d_3 = 5$
1	$l_1 = d_1 + d_2 + \ldots + d_w$	$d_1 + d_2 + d_3 = 4$
2	$l_2 = d_2 + \ldots + d_w$	$d_2 + d_3 = 3$
...	... ...	...
w-2	$l_{w-2} = d_{w-1} + d_w$	$d_2 + d_3 = 3$
w-1	$l_{w-1} = d_w$	$d_3 = 1$

Es gilt also:

(12.15) $l_x = \Sigma\, d_y$ (mit $y \leq x$).

Satz 12.3:

1. Die stationäre Bevölkerung hat einen konstanten Umfang von $P_t = T_0^*$ (P = population) zu allen Zeitpunkten t, wobei

   (12.16) $T_0^* = \Sigma\, l_x \quad (x = 0,1,...,w)$.

   T_0^* ist die Summe der von der Kohorte von l_0 Einheiten (von l_0 Neugeborenen) insgesamt zu durchlebenden Jahre (eine Verweilsumme mit der Maßeinheit "Personenjahre" bzw. im Beispiel "Pferdejahre").

2. Ihre Altersverteilung ist gegeben durch die Abgangsordnung: dem Alter x ist die absolute Häufigkeit l_x zugeordnet.

3. Das durchschnittliche Sterbealter $\bar{x}_D = \Sigma x d_x / \Sigma d_x$ der Geburtskohorte (der gleichzeitig Geborenen) des Umfangs l_0 beträgt $\bar{x}_D = e_0^* - 1$ mit

   (12.17) $e_0^* = \dfrac{T_0^*}{l_0}$

(e_0^* ist die durchschnittliche Verweildauer, die Lebenserwartung eines [einer] Neugeborenen). Folglich gilt bei einer stationären Bevölkerung, dass der Bestand (Umfang) zu jedem Zeitpunkt konstant ist und zwar $T_0^* = e_0^* l_0$, also:

Bei einer stationären Bevölkerung ist der (konstante) Bevölkerungsstand gleich T_0^* und damit gleich dem Produkt der Zahl der Zugänge und der mittleren Verweildauer.

4. Das mittlere Alter der Lebenden (Mittelwert der Altersverteilung gem. Nr. 2) ist mit $\Sigma x l_x / \Sigma l_x$ in der Regel verschieden von der Lebenserwartung $e^*{}_{,0}$ (gem. Gl. 12.17). Im Beispiel 12.7 erhält man $\Sigma x l_x / \Sigma l_x = 1$ und $\Sigma x d_x / \Sigma d_x = 8/5 = 1{,}6$.

5. Zwischen der Altersverteilung des Bestands und derjenigen der Kohorte (der konstanten Zu- und Abgänge), also zwischen l_x und d_x gilt der Zusammenhang von Gl. 12.15.

Man beachte: bei der Definition des durchschnittlichen Sterbealters $\bar{x}_D$ (Nr. 3) und des durchschnittlichen Alters der Lebenden $\bar{x}_L$ (Nr.4) ist angenommen, dass jede der d_X Einheiten, die das Alter x (Anzahl der vollendeten Jahre) erreicht hat, praktisch gleich nach ihrem Geburtstag stirbt und bei e_0^* , dass sie praktisch kurz vor ihrem x+1ten Geburtstag stirbt. Später (vgl. Satz 12.5) wird die Definition des Sterbealters dahingehend modifiziert, dass die Sterbezeitpunkte als gleichmäßig über ein Altersjahr (Intervall [x, x+1]) angenommen werden.

Beispiel 12.8:

Es sei angenommen, dass jedes Jahr $l_0 = 6$ Zugänge (Einheiten A,..., F) zu verzeichnen sind, die wie folgt abgehen: $d_0 = 3$ Einheiten (D,E,F) im Alter x = 0 (also vor dem ersten Geburtstag), $d_1 = 2$ Einheiten (B, C) im Alter x = 1 und $d_2 = 1$ Einheit (A) im Alter x = 2. Man bestimme die Altersverteilung des (beginnend mit der dritten Kohorte) konstanten Bestands und der Abgänge.

Lösung 12.8:

Altersverteilung (j = Subskript der Kohorte):

des Bestands am Beginn des dritten Jahres:

Alter x	0	1	2
Lebende	$A_3,...,F_3$	A_2,B_2,C_2	A_1
Anzahl	$l_0=6$	$l_1=3$	$l_2=1$
Anteil	60%	30%	10%

der Abgänge am Ende des dritten Jahres:

Alter x	0	1	2
Gestorbene	D_3,E_3,F_3	B_2,C_2	A_1
Anzahl	$d_0=3$	$d_1=2$	$d_2=1$
Anteil	50%	33,3%	16,7%

Man verifiziert leicht, dass das Durchschnittsalter der Gestorbenen (durchschnittliches Sterbealter) $\bar{x}_D$ - was die Regel ist - größer ist als das Durchschnittsalter der Lebenden (des Bestands) $\bar{x}_L$ (es gilt $\bar{x}_D = 2/3$ und $\bar{x}_L = 0{,}5$) und dass gilt :

$\boxed{(12.15)\quad l_x = \Sigma d_y \quad (\text{mit } y \leq x):}$

$$\left.\begin{aligned} l_0 &= d_0 + d_1 + d_2 = 3 + 2 + 1 = 6 \\ l_1 &= \phantom{d_0 +{}} d_1 + d_2 = \phantom{3 +{}} 2 + 1 = 3 \\ l_2 &= \phantom{d_0 + d_1 +{}} d_2 = \phantom{3 + 2 +{}} 1 = 1 \end{aligned}\right\} \text{Bestand der Bevölkerung } \Sigma l_x = T_0^* = 10$$

Beispiel 12.9:

Es sei angenommen, dass jedes Jahr $l_0 = 4$ Zugänge (Einheiten A bis D) zu verzeichnen sind, die alle im Alter von x = 2 (nach Vollendung von 2 Jahren) abgehen (rechteckige Abgangsordnung). Man bestimme die Altersverteilung des konstanten Bestands und der Abgänge.

Lösung 12.9:

Altersverteilung (j = Subskript der Kohorte) am Beginn/Ende des dritten Jahres:

Beginn

Alter x	0	1	2
Lebende	A_3 - D_3	A_2 - D_2	A_1 - D_2
Anzahl	$l_0 = 4$	$l_1 = 4$	$l_2 = 4$

Ende

Alter x	2
Gestorbene	A_1 - D_1
Anzahl	$d_2 = 4$

Es gilt $d_0=d_1=0$ und $d_2=4$ so dass $l_0=l_1=l_2=4$.

Auch jetzt gilt, dass das Durchschnittsalter des Bestands $\bar{x}_L = 1$ kleiner ist als das durchschnittliche Sterbealter $\bar{x}_D = 2$ bzw. die Lebenserwartung eines Nulljährigen $e_0^* = 3$ (vgl. Satz 12.5).

b) Sterbetafel

Die folgenden Ausführungen setzten den ansonsten in der Deskriptiven Statistik noch nicht eingeführten Begriff der Wahrscheinlichkeit voraus.
Die einjährige Sterbewahrscheinlichkeit der x-jährigen Männer bzw. Frauen wird bestimmt aus der Anzahl P^*_{xj} der Personen (Männer bzw. Frauen) der Bevölkerung, die zum Zeitpunkt t_j zur Wohnbevölkerung gehören (Datenbasis für die Sterbetafel; in der Praxis verwendet man nicht ein, sondern meist drei benachbarte Jahre um die Wirkung von Zufallseinflüssen auf die Sterbewahrscheinlichkeiten zu verringern) und der Anzahl D_{xj} der Abgänge (Todesfälle) in der Altersgruppe x in einem Jahresintervall um t_j. Die alters-spezifischen Sterbeziffern lauten somit: $m_x = D_{xj} / P^*_{xj}$. Aus ihnen werden nach gewissen Korrekturen und Glättungen (z.B. Anpassung von Regressionsfunktionen, gleitende Durchschnitte, Spline-Funktionen usw.) die einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten q_x be-stimmt. Unter der Annahme, dass sich die Todesfälle im Altersintervall (x, x+1) gleichmäßig verteilen, so dass P^*_{xj} durch $P_{xj} = P^*_{xj} + ½D_{xj}$ zu ersetzen ist, erhält man $q_x = D_{xj} / P_{xj} = m_x / (1 + ½m_x)$.

<u>Def. 12.8: Tafelfunktionen q, p, l, L</u>

a) Die einjährige Sterbewahrscheinlichkeit q_x der x-jährigen ist die (bedingte) Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person, die das Alter von x erreicht hat, das Alter von x+1 nicht mehr erreichen wird (mit x = 0,1,...,w für das Alter in vollendeten Jahren).

b) Die einjährige Überlebenswahrscheinlichkeit p_x ist demzufolge $p_x = 1 - q_x$, denn eine x-jährige Person kann in ihrem nächsten Lebensjahr entweder sterben oder dieses überleben. Auch die einjährige Überlebenswahrscheinlichkeit p_x ist eine bedingte Wahrscheinlichkeit, das Alter x zu überleben (x+1 zu erleben), **wenn** (bedingt dadurch, dass) man bis x gelebt hat.

c) Sämtliche Sterbetafelfunktionen sind allein Funktionen des Alters x und sie sind mit der Folge der Sterbewahrscheinlichkeiten q_x und dem willkürlich gewählten Anfangsbestand (Geburten) l_0 eindeutig gegeben:

- die Absterbeordnung l_x bezeichnet die Anzahl der Personen, die mindestens das Alter x erreichen. Sie ist ausgehend von einem fiktiven Anfangsbestand von l_0 = 100.000 Personen rekursiv zu berechnen mit

$$\boxed{(12.18)\quad l_{x+1} = l_x p_x = l_x(1 - q_x).}$$

- Entsprechend ist die Anzahl d_x der im Altersintervall (x, x+1) gestorbenen Personen gegeben mit

$$\boxed{(12.19)\quad d_x = l_x q_x = l_x - l_{x+1} \geq 0}$$

da die Abgangsordnung l_x monoton fallend ist ($l_{x+i} \leq l_x$).

d) Mit L_x wird die Anzahl der von allen überlebenden x-jährigen Personen bis zum Alter x+1 durchlebten Jahre (die Anzahl der im Intervall (x,x+1) verlebten Personenjahre) bezeichnet.

(12.20) $L_x = ½(l_x + l_{x+1})$.

Zur Begründung für diese Modifikation der Abgangsordnung vgl. Bem. Nr. 2 zu dieser Definition.

e) Für einige Zwecke ist es auch sinnvoll, mehrjährige unbedingte Überlebenswahrscheinlichkeiten vom Alter 0 bis zu einem bestimmten Alter x als Produkt einjähriger Überlebenswahrscheinlichkeiten zu definieren mit

(12.21) $p^*_{0x} = p_0 p_1 p_2 \cdots p_{x-1}$,

so dass gilt:

(12.22) $l_x = l_0 p^*_{0x} = l_0 p_0 p_1 \ldots p_{x-1}$,

d.h. die Folge der einjährigen Sterbe- und damit auch Überlebenswahrscheinlichkeiten bestimmt zusammen mit der willkürlichen Anzahl l_0 der Geburten (der fiktiven Kohorte) eindeutig die gesamte Absterbeordnung und damit auch die gesamte Sterbetafel.

Bemerkungen zu Def. 12.8:

1. Alle Sterbetafelfunktionen q_x, p_x, l_x, d_x und L_x sowie die noch zu definierenden Funktionen T_x und e_x (Def. 12.8) sind bei gegebenem (fiktiven) Anfangsbestand l_0 der angenommenen Geburtskohorte Funktionen des Alters x und allein abhängig von q_x.

2. Der Berechnung von L_x als ungewogenes Mittel von l_x und l_{x+1} liegt der Gedanke zugrunde, dass die l_{x+1} Personen, die auch ihren x+1-ten Geburtstag erleben, zu L_x ein volles Lebensjahr beitragen, dagegen diejenigen, die zwar das Alter (Anzahl der vollendeten Jahre) x, nicht aber das Alter x+1 Jahre erreichen, im Mittel nur ein halbes Jahr beitragen, so dass gilt:
$L_x = 1 \cdot l_{x+1} + ½ \cdot d_x = l_{x+1} + ½(l_x - l_{x+1}) = ½(l_x + l_{x+1})$.

3. Berechnet man die mit der Sterbetafel gegebene Lebenserwartung einer x-jährigen Person (vgl. Def. 12.8) auf der Basis der Folge der l_x-Werte (in Def. 12.8 dann e^*_x statt e_x genannt) statt der L_x - Werte, so ist die Lebenserwartung jeweils (für alle x) um ein halbes Jahr größer: $e^*_x = e_x + ½$.

Beispiel 12.10:

Gegeben sei die monoton steigende Folge von Sterbewahrscheinlichkeiten q_x und Überlebenswahrscheinlichkeiten $p_x = 1 - q_x$:

x	0	1	2	3
q_x	1/5	1/4	2/3	1
p_x	4/5	3/4	1/3	0

Bestimmen Sie ausgehend von einer fiktiven Kohorte von $l_0 = 5$ Personen (A,B,C,D und E) die Absterbeordnung l_x und alle weiteren bisher besprochenen Tafelfunktionen (d_x,l_x), sowie die noch zu definierenden Funktionen (vgl. Def. 12.9) T_x und e_x (bzw. T_x^* und e_x^*)!

Lösung 12.10:

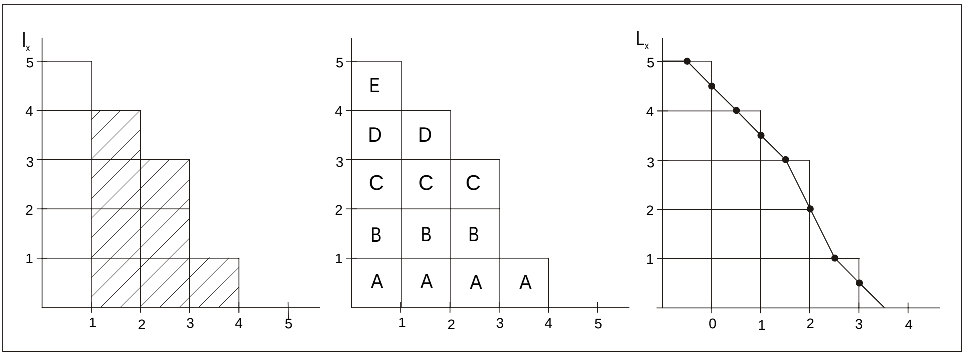
Wie man leicht sieht, handelt es sich hinsichtlich der Abgangsordnung um die gleichen Zahlen, wie in dem ausführlich behandelten Beispiel 12.7. Die folgende Tabelle[1)] enthält die Tafelfunktionen.

x	Personen	l_x	d_x	(Pers.)	L_x	T_x	e_x	$T^*{,}_x$	$e^*{,}_x$
0	A,B,C,D,E	5	1	E	4,5	10,5	2,1	13	2,6
1	A,B,C,D	4	1	D	3,5	6	1,5	8	2
2	A,B,C	3	2	B,C	2	2,5	0,833	4	1,333
3	A	1	1	A	0,5	0,5	0,5	1	1
4	-	0							

1) es gilt: $e^*{,}_x = T^*{,}_x / l_x$ und $e_x = T_x / l_x$

Zur graphischen Darstellung einiger Tafelfunktionen vgl. Abb. 12.5. In den Bemerkungen zur Def. 12.9 wird auf die Interpretation der Tafelfunktionen dieses Beispiels eingegangen.

Abb. 12.5: Zur Interpretation der Verweilsummen T_x und T_x^* (Bsp. 12.10)



Satz 12.4:

Es gilt:

$$\text{(12.23)} \quad \Sigma\, d_x = l_o \qquad (x = 0,1,\ldots,w)$$

(was nur den trivialen Sachverhalt ausdrückt, dass die gesamte Kohorte vom Umfang l_0 bis Erreichung des Maximalalters w vollständig abstirbt).

Beweis:

Für Partialsummen, etwa für $\Sigma d_x = d_0 + d_1 + d_2$ $(x = 0,1,2)$, läßt sich unter Verwendung von Gl. 12.21 leicht herleiten

$$\sum_{x=0}^{2} d_x = l_0(1 - p_0 p_1 p_2) = l_0\,(1 - p_{03}^*) = l_0 - l_3.$$

Dieser Zusammenhang gilt allgemein, so dass

$$\sum_{x=0}^{w} d_x = l_0 - l_{w+1} = l_0 \text{ gilt,}$$

da $p_w = 0$ und deshalb $l_{w+1} = 0$ (keiner erreicht das Alter w+1).

Def. 12.9: Tafelfunktionen T, e

a) Die Tafelfunktion T_x, die Zahl der von den Überlebenden des Alters x noch zu durchlebenden Jahre ist die Summe der Größen L_x, L_{x+1}, $L_{x+2}, \ldots, L_w$.

$$\text{(12.24)} \quad T_x = \sum_{y=x}^{w} L_y \qquad x \le y \le w.$$

Häufig ist es auch sinnvoll, von der Größe

$$(12.25) \qquad T_x^* = \sum_{y=x}^{w} l_y = T_x + ½l_x$$

auszugehen. Die Größen T_x und T_x^* sind Verweilsummen; Maßeinheit: "Personenjahre".

b) Dividiert man T_x^* durch die Anzahl der Überlebenden des Alters x, also durch l_x, so erhält man mit

$$(12.26) \qquad e_x = \frac{T_x}{l_x} = \frac{T_x^*}{l_x} - ½ = e_x^* - ½$$

die (mittlere, durchschnittliche weitere) Lebenserwartung einer x-jährigen Person (spricht man von "der" Lebenserwartung, so ist e_0 gemeint).

Bemerkungen zu Def. 12.9:

1. Die Größen T_x^* sind die von unten (d.h. vom Maximalalter w an) aufkumulierten Werte l_x. Dies zeigt sich im Beispiel 12.10 etwa bei (w=3)
   $T_1^* = l_3 + l_2 + l_1 = 1 + 3 + 4 = 8$.
   Die Interpretation als die Gesamtzahl der von den $l_1 = 4$ Personen (bzw. Pferde) "noch zu durchlebenden Jahre" läßt sich wie folgt verdeutlichen: D lebt noch 1 Jahr, B und C leben noch jeweils 2 Jahre und A noch 3 Jahre (8 = 1+2+2+3). Entsprechend erhält man $T_0^* = l_4 + l_3 + l_2 + l_1 = 13$. Auch dies ist eine Verweilsumme. Es ist jeweils ein Jahr hinzuzurechnen, also A noch 4, B und C noch 3, D noch 2 und A ein Jahr, zusammen also 4 + 3 + 3 + 2 + 1 = 13 Jahre.

2. Diese Interpretation von T_x^* als Verweilsumme lässt sich auch graphisch veranschaulichen: T_x^* ist in Abb. 12.5 die schraffierte Fläche unter der Abgangsordnung (als Treppenfunktion) von rechts (Alter w) nach links (Alter x) gesehen.

3. Die Verweilsumme T_x ist die Fläche unter der Abgangsordnung als Polygonzug (Abb. 12.5 rechts) von rechts (Alter w) nach links (Alter x) gesehen. Auch L_x ist eine Verweilsumme und Fläche unter der Abgangsordnung.

4. Wenn $l_1 = 4$ Personen zusammen noch $T_1 = 6$ Jahre leben, dann liegt es nahe, die durchschnittliche weitere Lebenserwartung jeder einzel-

nen Person als $e_1 = T_1/l_1 = 6/4 = 1{,}5$ Jahre anzusetzen.

5. Berücksichtigt man, dass die Personen nicht jeweils kurz vor Erreichen ihres x+1 Geburtstags, sondern über das (Alters-) Jahr gleichmäßig verteilt sterben (vgl. Bem. 2 zu Def. 12.8), so erhält man T_x, also beispielsweise $T_1 = L_3 + L_2 + L_1 = 0{,}5 + 2 + 3{,}5 = 6$ Personenjahre (bzw. Pferdejahre). D lebt noch 0,5 Jahre (statt 1 Jahr), B und C leben noch jeweils 1,5 Jahre (statt 2 Jahre) und A noch 2,5 Jahre (statt 3 Jahre).

6. Man kann T_x auch in Abhängigkeit von den Größen l_x darstellen. Danach gilt:

$$(12.27) \quad \boxed{T_x = \sum_{y=x}^{w} l_y - \tfrac{1}{2} l_x = T_x^* - \tfrac{1}{2} l_x .}$$

Daraus folgt, dass - wie erwähnt (Bem. 3 zu Def. 12.8) - die Verwendung von L_x anstelle von l_x zu einer um ein halbes Jahr kürzeren Lebenserwartung bei allen Altersklassen x = 0,1,...,w führt.

7. Einem verbreiteten Mißverständnis zufolge, nimmt die Lebenserwartung in dem Maße ab, in dem man älter wird, so dass gilt $e_{x+d} = e_x - d$. Man kann jedoch leicht zeigen, dass dies nicht der Fall ist, es sei denn, es gelte:

$$q_x = \begin{cases} 1 & \text{für } x = w \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

was eine rechteckige Absterbeordnung impliziert. Die Lebenserwartung e_x ist auch (anders als die Abgangsordnung l_x) nicht notwendig monoton fallend, sie kann sogar vorübergehend ansteigen. Ein Ansteigen der Lebenserwartung (so dass $e_{x+1} > e_x$) ist möglich, wenn

$$(12.28) \quad q_x e_{x+1}^* > 1.$$

Ansteigende Lebenserwartungen kommen in jungen Jahren vor. Hat man ein kritisches Alter, im Bereich der Säuglingssterblichkeit oder im Bereich von 18 bis 19 Jahren (Verkehrstote!) überschritten, so kann die Lebenserwartung (meist nur) für ein Jahr ansteigen.

8. Der Zusammenhang

$$(12.29) \quad e_{x+1}^* - e_x^* = e_{x+1}^* \, q_x - 1$$

ergibt sich leicht aus der folgenden Überlegung: Man erhält mit
$T_x^* = T_{x+1}^* + l_x$ sowie $l_{x+1} = l_x p_x$
$e_x^* = 1 + e_{x+1}^* \, p_x$. Ferner gilt wegen $e_x^* = e_x - \tfrac{1}{2}$ auch

$$(12.30) \quad p_x = \frac{e_x - \tfrac{1}{2}}{e_{x+1} + \tfrac{1}{2}}$$

9. Zwischen der mehrjährigen Überlebenswahrscheinlichkeit p_{xy}^* und der Lebenserwartung besteht folgender Zusammenhang: Aus
$T_x^* = l_x (1 + p_x + p_x p_{x+1} + p_x p_{x+1} p_{x+2} + \ldots + p_x p_{x+1} \cdots p_{w-1})$ folgt

(12.31) $e_x^* = e_x + ½ = 1 + \sum p_{x,y}^*$ mit $y = x+1, x+2, ...w$

Die Lebenserwartung wird also durch die Summe von Überlebenswahrscheinlichkeiten von x bis zum Maximalalter w bestimmt.

10. Nach Satz 12.1 gilt $T_0 = l_0 e_0$, d.h. bei einer stationären Bevölkerung ist der Bevölkerungsstand zur Zeit t, der P_t genannt sei, für alle t gleich T_0 und gleich dem Pro-dukt aus den Zugängen und der durchschnittlichen Verweildauer. Er setzt sich zusammen aus den Geburten (Zugängen) der Vorperioden Z_{t-x} "gewogen" mit den Überlebenswahrscheinlichkeiten

$$P_t = \sum_{x=0}^{x=w} Z_{t-x}\, p_{0x}^* \ ,$$

denn von der Kohorte Z_{t-x} ist noch ein Anteil von p_{0x}^* nach x Jahren (zur Zeit t) am Leben. Da alle Kohorten vom gleichen Umfang l_0 sind und die Überlebenswahr-scheinlichkeiten von den Zeitpunkten t unabhängig sind, ist der Umfang der Bevölkerung durch die Summe der Überlebenden l_x (bzw. L_x) also durch T_x^* (bzw. T_x) gegeben. Er hängt somit allein ab von e_0 und von der Stärke der Kohorten (Geburten) Z_t. Da für alle t gilt $Z_t = l_0$, ist die Geburtenrate $b_t = Z_t / P_t = l_0 / T_0 = (e_0)^{-1}$ und da die stationäre Bevölkerung nicht wächst, ist die konstante rohe Geburtenrate zugleich die (konstante rohe) Todesrate.

Bei einer stationären Bevölkerung ist die rohe Geburtenrate b_t und die rohe Todesrate gleich dem reziproken Wert der Lebenserwartung e_0.

Anders als die empirische Geburtenrate einer (nichtstationären) Bevölkerung ist die Geburtenrate einer stationären Bevölkerung nicht abhängig von Schwankungen des Altersaufbaus, die es ja bei einer stationären Bevölkerung ex definitione nicht gibt.

11. Der konstante Altersaufbau der stationären Bevölkerung (die Folge $l_0, l_1, l_2, ..., l_w,$ also die Abgangsordnung) ist allein durch die Überlebenswahrscheinlichkeiten gegeben. Für das Durchschnittsalter der Lebenden $\bar{x}_L$ und das durchschnittliche Sterbealter (Durchschnittsalter der Gestorbenen) $\bar{x}_D$ gilt (Summen von x=0 bis x=w):

(12.33) $$\bar{x}_L = \frac{\Sigma(x+½)l_x}{\Sigma l_x}$$

(12.34) $$\bar{x}_D = \frac{\Sigma(x+½)d_x}{\Sigma d_x} = e_0 \ .$$

Man beachte, dass bei dieser Definition von $\bar{x}_L$ und $\bar{x}_D$, anders als bei der Betrachtung in Ziff. 3ff von Satz 12.3 und Bsp. 12.8f., die Korrektur um 1/2 für die gleichmäßige Verteilung der Sterbezeitpunkte auf das Intervall [x,x+1] vorgenommen wurde.

Satz 12.5:

Man kann die Lebenserwartung eines Nulljährigen e_0 (auch "mittlerer Sterbezeitpunkt" genannt) als durchschnittliches Sterbealter $\overline{x}_D$ interpretieren, d.h. es gilt Gl. 12.34

Beweis:

Es gilt

$$\begin{aligned} T_0^* &= l_0 + l_1 + ... + l_w \\ &= l_0 + (l_0-d_0) + (l_0-d_0-d_1) + ... + (l_0-d_0-...-d_{w-1}) \\ &= (w+1)l_0 - wd_0 - (w-1)d_1 - (w-2)d_2 - ...- 2d_{w-2} - 1d_{w-1}. \end{aligned}$$

Mit Satz 12.2 erhält man hieraus

$$\begin{aligned} T_0^* &= l_0 + 0\cdot d_0 + 1\cdot d_1 + 2\cdot d_2 + ...+ w\cdot d_w = l_0 + \Sigma x d_x = l_0[1+(\overline{x}_D-½)] = \\ &= l_0(\overline{x}_D+½), \end{aligned}$$

da $\overline{x}_D = [\Sigma(x+½)d_x]/\Sigma d_x$ (mit x=0,1,...,w), so dass

$e_0^* = T_0^*/l_0 = \overline{x}_D + ½$ und wegen $e_0^* = e_0 + ½$ gilt $e_0 = \overline{x}_D$.

Satz 12.5 besagt auch: Die Fläche T_0 unter der Abgangsordnung (Polygonzug) ist das l_0-fache durchschnittliche Sterbealter. Man verifiziert diesen Zusammenhang leicht anhand des obigen Beispiels 12.10:

Person(en)	Sterbealter
E	0,5
D	1,5
C	2,5
B	2,5
A	3,5
Summe	10,5.

Somit ist: $\overline{x}_D = 10,5/5 = 2,1 = e_0$.