Kapitel 1: Gegenstand und Grundbegriffe der Statistik

1. Gegenstand der Statistik

Statistik ist die Lehre von Methoden zur Gewinnung, Charakterisierung und Beurteilung von zahlenmäßigen Informationen über die Wirklichkeit (Empirie).

Zu den Bestandteilen dieser Definition sei folgendes bemerkt:

- **Information** ist hier im sehr weiten Sinne gemeint. Alle Sachverhalte, die zähl- oder meßbar und systematisch zu beobachten sind, können Gegenstand der Statistik sein. Dabei ist zu berücksichtigen, dass "messbar" im Alltagssprachgebrauch meist enger definiert wird, als in der Statistik (vgl. Abschn. 3).

- Unter **Gewinnung** von Information wird neben der eigentlichen Datenerhebung auch die Operationalisierung und Systematisierung von Konzepten verstanden, was v.a. ein Problem der Wirtschaftsstatistik[1] ist, sowie die Planung der Datenerhebung (design of experiments, design of surveys). Gegenstand der Statistik ist somit nicht nur die Auswertung bereits vorliegender Daten.

- Unter **Charakterisierung** soll hier zunächst die graphische und tabellarische Darstellung von Daten sowie die Berechnung von zusammenfassenden, den empirischen Sachverhalt beschreibenden Kennzahlen, verstanden werden. Dies ist primär Gegenstand der Deskriptiven Statistik. Die Möglichkeiten der statistischen Auswertung gehen aber über das weit hinaus, was üblicherweise im Rahmen der Deskriptiven Statistik an Methoden bereitgestellt wird (z.B. Multivariate Analyse).

- **Beurteilung** kann z.B. erfolgen durch Schlüsse auf der Basis unvollständiger Informationen (z.B. Schlüsse von der Stichprobe auf die ihr zugrundeliegende Grundgesamtheit), bzw. allgemeiner auf der Basis

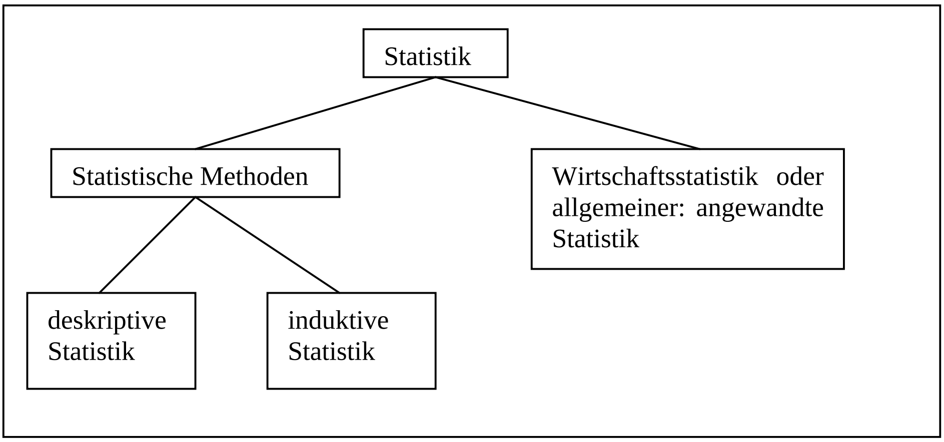
---

[1] Vgl. hierzu: v.d. Lippe, Peter, Wirtschaftsstatistik, in dieser Reihe (UTB Bd. 209).

unsicherer Informationen unter Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Das ist Gegenstand der Induktiven Statistik.

Mithin ergibt sich die traditionelle Aufteilung der "Statistik", wie sie in Übersicht 1.1 dargestellt ist.

Übersicht 1.1 Aufbau des Faches Statistik



Leider wird in vielen Lehrbüchern und ganzen Studiengängen der Inhalt des Faches Statistik fast ausschließlich auf die Induktive Statistik eingeengt.

Statistik kann für empirische Untersuchungen nützlich sein bei:

a) der Berechnung zusammenfassender Kennzahlen im Rahmen der Deskriptiven Statistik,
b) Fragen der Verallgemeinerungsfähigkeit statistischer Aussagen (Induktive Statistik) und bei
c) der Beurteilung der Aussagefähigkeit statistischer Daten und Ergebnisse aufgrund der ihnen zugrundeliegenden Erhebungen und Konzepte (Wirtschaftsstatistik).

Die Statistik dient damit drei Zwecken, nämlich deskriptiven (Beschreibung, Bestandsaufnahme), analytischen (Verallgemeinerung, Erklärung) und operativen (Entscheidung) Zwecken. Sie kann auf allen drei Stufen der empirischen Arbeit eingesetzt werden, nämlich bei der:

- Formulierung von Hypothesen, Modellbildung, concept formation
- Planung und Durchführung von Erhebungen und Versuchen und
- bei der Überprüfung von Hypothesen.

Die Methoden der Statistik sind allgemein anwendbar, d.h. sie sind nicht beschränkt auf bestimmte inhaltliche Fragestellungen. Dies heißt aber nicht notwendig, dass sie auch in jedem Fall sinnvoll angewendet werden.

Es ist deshalb wohl das wichtigste Ziel der Beschäftigung mit der Disziplin "Statistik", beurteilen zu lernen, bei welcher Fragestellung und auf welche Daten eine bestimmte statistische Methode sinnvoll angewendet werden kann.

Die Frage, welche Folgerungen aus empirischen Daten gezogen werden sollten ist kein Gegenstand der Statistik, weshalb die Statistik auch offen ist für jede Art von Mißbrauch. Für diese Frage ist aber die Aussagefähigkeit der Daten wesentlich (bzw. sollte es sein) und es gibt erhebliche Unterschiede bei Anwendern der Statistik hinsichtlich der Bereitschaft und Fähigkeit, sich hiermit auseinanderzusetzen.

2. Einheiten, Masse, Merkmal

Def. 1.1: Einheit, Masse

a)	Statistische Einheiten (Elemente, Merkmalsträger) sind Träger von Informationen, bzw. Eigenschaften, die im Rahmen einer empirischen Untersuchung von Interesse sind.
b)	Eine statistische Masse (Kollektiv, Population) ist eine hinsichtlich sachlicher, räumlicher und zeitlicher Kriterien sinnvoll gebildete Gesamtheit von statistischen Einheiten.
c)	Unter dem Umfang einer Masse versteht man die Anzahl ihrer Einheiten (Elemente).

Bemerkungen zur Def. 1.1:

1. Beispiel für Einheiten sind Personen, Personengruppen, Fälle bzw. Ereignisse (z.B. Verurteilung, Eheschließung, Erkrankung), Gegenstände (Kranfahrzeuge oder Gebäude bei einer Gebäudezählung), Wirtschaftszweige, Regionen usw. Zu unterscheiden sind evtl. Erhebungs-, Zähl-, Darstellungs- oder Auswertungseinheiten.
2. Das Begriffspaar "Masse - Einheit" entspricht dem Begriffspaar "Menge - Element" aus der Mathematik.
3. Eine Masse muss sachlich, zeitlich und räumlich eindeutig definiert (abgegrenzt) sein. Dies kann erfolgen durch Aufzählung der Einheiten oder durch Angabe eines Prinzips, nach dem über die Zugehörigkeit eines Elements zur Masse entschieden wird, d.h. durch Identifikationsmerkmale (die zu unterschieden sind von den Untersuchungsmerkmalen [Def. 1.2]).

4. Die sachliche Abgrenzung von Massen und Einheiten kann schwierig sein (Einzelheiten hierzu gehören in die Wirtschaftsstatistik). Hierfür zwei Beispiele:

   - für Einheiten: Sollen Unternehmen, Betriebe, Arbeitsstätten oder fachliche Einheiten der Erhebung zugrundegelegt werden?
   - für Massen: Soll "Bevölkerung" im Sinne der Wohnbevölkerung, der ortsanwesenden Bevölkerung oder der Staatsangehörigkeit (rechtlicher Bevölkerungsbegriff) definiert werden?

Arten von Massen (zu unterscheidende Begriffspaare):

a) Nach dem Umfang bzw. der Vollständigkeit der untersuchten Masse (Objektmenge) unterscheidet man zwischen **(Grund-)gesamtheit** (oder Kollektiv, Population) und **Teilgesamtheit**.

   Eine Teilgesamtheit kann durch **Auswahl** von Einheiten aus der Grundgesamtheit oder durch eine **begriffliche Ausgliederung** entstehen. Im zweiten Sinne, d.h. durch Begriffshierarchien (Systematiken, Klassifikationen) mit Oberbegriffen und Unterbegriffen ist z.B. die Erwerbsbevölkerung eine Teilmasse der Wohnbevölkerung. Wird die Teilgesamtheit durch Zufallsauswahl gewonnen, so spricht man von einer **Stichprobe**. Von vielen Autoren wird jede Art der Teilerhebung (auch eine nicht-zufällige Auswahl) als Stichprobe bezeichnet (ein Sprachgebrauch, dem wir uns nicht anschließen wollen).

b) Nach der Verweildauer der beobachteten Einheiten einer Masse unterscheidet man **Bestandsmassen** (stocks) und **Bewegungsmassen** (vgl. Kapitel 12):

c) Man kann auch zwischen **realen** und **hypothetischen Gesamtheiten** unterscheiden.

   Reale (beobachtete) Gesamtheiten, die allein Gegenstand der Deskriptiven Statistik sind, sind stets endlich. Hypothetische, d.h. durch Abstraktion gebildete Massen sind dagegen meist unendlich (z.B. die Menge aller möglichen Würfe mit einer Münze). Sie stehen in der Induktiven Statistik im Vordergrund des Interesses.

Def. 1.2: Merkmal

Ein **Merkmal** ist eine Eigenschaft einer statistischen Einheit, die bei einer statistischen Untersuchung interessiert. Es hat endlich und unendlich viele **Merkmalsausprägungen** (mögliche Realisationen, Modalitäten). Ein Merkmal ist somit eine Menge von Merkmalsausprägungen. Ein **Merkmalswert** ist eine an einer statistischen Einheit ermittelte Merkmalsausprägung. Werden Merkmalswerten Zahlen zugeordnet, so spricht man auch von **Variablen**

Bemerkungen zu Def. 1.2:

1. Es sind Identifikationsmerkmale zur Abgrenzung einer Masse (vgl. Bem. 3 zu Def. 1.1) und Untersuchungsmerkmale, die Gegenstand einer Erhebung sind, zu unterscheiden. Nur letztere sind in Def. 1.2 gemeint.

2. Ein Merkmal stellt eine Abbildung der Masse, d.h. der Menge empirischer Einheiten in der Menge der Merkmalsausprägungen dar. Jeder statistischen Einheit wird eine und nur eine Ausprägung zugeordnet (Ausnahme: häufbare Merkmale). Im folgenden wird i.d.R. ein Merkmal mit großen Buchstaben (etwa X) und eine Merkmalsausprägung mit kleinen Buchstaben (etwa x_i) symbolisiert.

3. Gegenstand der Statistik sind stets Aussagen über Massen in bezug auf bestimmte Merkmale (z.B. Aussagen über die Einkommensverteilung der Haushalte in der Bundesrepublik Deutschland 1990), nicht Aussagen über einzelne Einheiten und auch nicht Aussagen ohne Bezugnahme auf genau definierte Merkmale der Einheiten.

   Einheiten (z.B. Haushalte) interessieren nur in ihrer Eigenschaft als Merkmalsträger, d.h. nicht in ihrer Totalität (mit "allen" ihren Kennzeichen) und Individualität (Statistik ist nie eine Einzelfalluntersuchung; im Zuge der Auswertung interessieren nur anonyme Daten).

4. Ein Merkmal muss **operational definiert** sein, d.h. es muss bei der Beobachtung einer Einheit entscheidbar sein, welche Merkmalsausprägung vorliegt. Wird das Merkmal "Bildung" gemessen durch die Anzahl der Jahre des Schulbesuchs, so ist die Bildung damit zwar sehr eng und nicht notwendig auch sachgerecht, dafür aber operational definiert. Unterscheidet man dagegen die Ausprägungen "hochgebil-det", "gebildet", "ungebildet" (nach welchen Kriterien?), so liegt keine operationale Definition vor.

5. Bei quantitativen Merkmalsausprägungen ist der Begriff **Variable** üblich. Man kann dann mehrere Merkmalsausprägungen zu einer Klasse (**Größenklasse**) zusammenfassen.

Beispiele für Merkmale und Merkmalsausprägungen:

Merkmal:	Merkmalsausprägungen:
Alter (operational definiert als: Anzahl der vollendeten Jahre)	15 Jahre (einzelne Ausprägung) 10 bis unter 20 Jahre (Altersklasse)
Staatsangehörigkeit	deutsch, französisch, englisch usw.
Geschlecht *)	männlich, weiblich

*) ein dichotomes Merkmal, d.h. mit zwei Ausprägungen

<u>Arten von Merkmalen:</u>

a) Nach dem Informationsgehalt der Merkmalsausprägung wird von einigen Autoren unterschieden: qualitative, komparative (intensitätsmäßige) und quantitative Merkmale (vgl. Bem. 3 zu Übersicht 1.3).

b) Wenn bei mehreren Einheiten nicht die Summe der Merkmalswerte, sondern nur ein durchschnittlicher Merkmalswert sinnvoll interpretierbar ist, spricht man von einem **intensiven** Merkmal (z.B. Intelligenz), andernfalls von einem **extensiven** Merkmal (z.B. Einkommen).

c) Nach der Art der Messung kann man **manifeste** (direkt beobachtbare) und **latente Merkmale** unterscheiden. Letztere werden indirekt gemessen, bzw. konstruiert. In diesem Sinne schließt man von (manifesten) Meinungsäußerungen (opinions) auf latente Einstellungen (attitudes) oder von der (manifesten) Fähigkeit bestimmte Aufgaben zu lösen und Fragen zu beantworten auf die "dahinterstehende" "Intelligenz" (als ein latentes Konstrukt) usw.

d) Hinsichtlich der Anzahl möglicher Merkmalsausprägungen kann man bei quantitativen Merkmalen (Variablen) zwischen diskreten und stetigen Merkmalen unterscheiden (vgl. Def. 1.3).

Def. 1.3: diskret und stetig

Eine Variable X mit den Ausprägungen $x_1, x_2, ..., x_m$ heißt diskret, wenn X nur endlich viele oder abzählbar unendlich viele reelle Werte x_j annehmen kann, und in jedem endlichen Intervall $a < x < b$ der reellen Zahlengeraden nur endlich viele Werte liegen können. Gilt entsprechend "überabzählbar unendlich viele Werte", so liegt eine stetige (kontinuierliche) Variable vor.

Bemerkungen zur Def. 1.3:

1. Diskret sind alle Merkmale, denen ein Zählvorgang zugrundeliegt; bei stetigen Merkmalen (Variablen) ist es ein Meßvorgang, der beliebig genau ist bzw. (theoretisch) beliebig genau sein könnte.
2. In der Deskriptiven Statistik treten i.d.R. nicht stetige Merkmale als solche auf, sondern nur in Form klassierter Daten (Kap. 3), d.h. aufeinanderfolgende Ausprägungen des Merkmals werden im Zuge der Erhebung oder Aufbereitung der Daten in Größenklassen (Intervallen) zusammengefaßt. Diese Klassenbildung (Klassierung) ist natürlich auch bei diskreten Daten durchführbar und üblich. Nach Klassierung kann ein stetiges Merkmal wie ein diskretes Merkmal behandelt werden.
3. Der methodisch entscheidende Unterschied ist: die Realisationsmöglichkeiten einer diskreten Variable sind isolierte Zahlen (nicht notwendig ganze Zahlen), bei einer stetigen Variable dagegen Intervalle (evtl. infinitesimal kleine Intervalle).

Beispiel 1.1:

Die Pizzeria P (des Eigentümers P) hat zwei Lokale (L_1 und L_2), bei denen man Mittag- und Abendessen (M,A) einnehmen kann, wobei es jedoch jeweils nur die folgenden Gerichte gibt: Pizza, Spaghetti, Ravioli und Canneloni. Es ergab sich, dass von den 4764 Gästen der Pizzeria insgesamt 5000 Gerichte im letzten Monat (April) wie folgt bestellt wurden:

	L_1		L_2		
	M	A	M	A	insgesamt
Pizza	400	600	600	800	2400
Sonstige	700	1100	400	400	2600
Summe	1100	1700	1000	1200	5000

1. Wieviele Merkmale werden in dieser Statistik dargestellt, wie heißen sie und welche Merkmalsausprägungen werden in der Tabelle dargestellt?

2. Was (Masse, Einheit, Merkmal usw.) ist im Falle dieser Statistik

   a) die in der Statistik mitgezählte Pizza, die Herr Schulze am 16.April zum Abendessen im Lokal L_1 gegessen hat?
   b) die Angabe "Pizza"?
   c) die Angabe des Eigentümers P der Pizzeria?
   d) die Zahl 5000?
   e) das Lokal L_2?
   f) die insgesamt 1700 + 1200 = 2900 Gerichte, die abends ausgegeben wurden?
   g) die insgesamt 2800 Gerichte im Lokal L_1?
   h) der Monat April?

<u>Lösung 1.1:</u>

<u>zu 1:</u>

Es werden drei qualitative (artmäßige, kategoriale) Merkmale mit jeweils zwei Merkmalsausprägungen (dichotome Merkmale) dargestellt, nämlich

Merkmal	**Merkmalsausprägungen**
Art des Gerichts	Pizza, Sonstige*)
Art des Lokals**)	Lokal L_1 , Lokal L_2
Zeit der Mahlzeit	Mittagessen (M), Abendessen (A)

*) nur zwei Ausprägungen in der Tabelle aber bei der Erhebung Unterscheidung nach den oben genannten vier Gerichten,

**) gemeint ist quasi die Zweigstelle (ein Betrieb) des Unternehmens P.

<u>zu 2:</u>

a) das ist eine Einheit (eine der 5000 in der Masse gezählten Einheiten, d.h. einzelnen Gerichte). Ferner sind jeweils

c und h) Identifikationsmerkmale (zur Abgrenzung der Masse),

b und e) Merkmalsausprägungen,

f und g) Teilgesamtheiten (Teilmassen), 2900 bzw. 2800 sind die jeweiligen Umfänge dieser Teilgesamtheiten und d) ist der Umfang der Masse (Gesamtmasse).

3. Messen, Skalen

a) Messung

Es gilt im folgenden den Begriff der Messung zu definieren. Hierfür und für die damit zusammenhängende Unterscheidung verschiedener Skalenarten ist aus der Schulmathematik der Begriff der Relation vorauszusetzen. Von den Relationen, die auf die Elemente m_1 , m_2 ,..., m_n einer Menge M definiert sein können interessieren vor allem zwei zweistellige (binäre) Relationen für jeweils zwei der Elemente von M, etwa für m_1 und m_2, nämlich:

1. die **Äquivalenzrelation** (=): Sie ist symmetrisch, d.h. aus $m_1=m_2$ folgt $m_2=m_1$, reflexiv ($m_1=m_1$) und transitiv (d.h. aus $m_1=m_2$ und $m_2=m_3$ folgt $m_1=m_3$) und
2. die **Ordnungsrelation** (>,<): Sie ist dagegen asymmetrisch, irreflexiv und transitiv.

<u>Def. 1.4: Messung</u>

Mit den folgenden zwei vorangestellten Definitionen kann man den Begriff der Messung definieren.

1. Es sei A eine Menge von empirischen Objekten und es seien $R_1,R_2,...R_s$ auf A definierte Relationen. Dann heißt die Menge **A** = $(A,R_1,R_2,...R_s)$ ein empirisches relationales System oder ein **empirisches Relativ**.
2. Ist X eine Menge von Zahlen oder Vektoren und sind $S_1,S_2,...S_m$ auf X definierte Relationen, dann heißt **X** = $(X,S_1,S_2,...,S_m)$ ein **numerisches Relativ** (oder numerisches relationales System). **X** ist eine Zahlenmenge (z.B. die Menge der natürlichen Zahlen oder die Menge der reellen Zahlen).

Damit erhält man die folgende **Definition**:

Unter einer **Messung** versteht man die Abbildung eines empirischen Relativs in ein numerisches Relativ, d.h. die Zuordnung von Zahlen zu Merkmalsausprägungen, so dass die für die Merkmalsausprägungen der empirischen Objekte geltenden Relationen auch für die hierfür verwendeten Zahlen gelten.

Bemerkungen zur Def. 1.4:

1. Empirische Objekte können Personen, Unternehmungen, Maschinen usw., kurz alle Arten von statistischen Einheiten sein. Diese stehen hinsichtlich einer oder mehrerer Eigenschaften in Beziehung zueinander, z.B. in Abb. 1.1 die Personen P_1 (links) und P_2 (rechts) hinsichtlich des Merkmals Körpergröße oder Haarfarbe. Das Vorhandensein eines empirischen Relativs, d.h. einer Menge empirischer Objekte, die in bezug auf bestimmte Eigenschaften in beobachtbaren Relationen zueinander stehen, ist Voraussetzung für eine Messung. Man beachte: Gegenstand der Messung sind nicht Objekte (also z.B. Personen) sondern immer nur Eigenschaften (Personen interessieren nicht in ihrer Einzigartigkeit, Gesamtheit, Individualität, sondern immer nur als Träger von bestimmten, genau definierten Eigenschaften).

Abb. 1.1: Empirisches Relativ

2. Abb. 1.1 stellt ein Beispiel für ein empirisches Relativ dar, denn:
   - die Menge A enthält die Personen P_1 und P_2 (linke und rechte Person)
   - die Personen P_1 und P_2 stehen hinsichtlich der Eigenschaft "Körpergröße", "Alter", "Haarfarbe" usw. in Beziehung zueinander und diese Beziehungen sind zweifelsfrei beobachtbar.

3. Man kann an diesem Beispiel leicht demonstrieren, was "Messung" bedeutet:

   - Es soll zunächst die Körpergröße K betrachtet werden: Für K soll die Ordnungsrelation "ist größer als" definiert werden. Empirisch (in Abb. 1.1) läßt sich die Relation "P_1 ist größer als P_2" beobachten. Eine sinnvolle Messung wäre dann $k_1 = 250$ (k_1 ist der Meßwert des Objekts P_1 auf der Skala K für das Merkmal K) und $k_2 = 35$ da $250 > 35$ (es soll noch nicht an eine Messung mit der Maßeinheit cm gedacht werden). Ebenso sinnvoll wäre aber auch $k_1 = 17{,}2$ und $k_2 = -3{,}25$, weil ja 17,2 ebenfalls größer ist als -3,25. Jedes Zahlenpaar, bei welchen k_1 größer ist als k_2 ist gleichermaßen "sinnvoll", weil hier bei der Körpergröße nur eine Ordnungsrelation (**Ordinalskala**) betrachtet werden soll.
   - Betrachten wir sodann die Haarfarbe H der beiden Personen von Abb. 1.1: Normalerweise kann man nicht mehr als die "qualitative" Unterscheidung zwi-

schen blond und dunkelhaarig treffen. Das bedeutet, dass für das Merkmal Haarfarbe nur die Äquivalenzrelation festgestellt werden kann: die Haarfarbe von P_1 ist anders (nicht z.B. besser oder mehr) als die von P_2 (es liegt "nur" eine **Nominalskala** vor). Folglich wären z.B. die Zahlen (Codierungen) $h_1 = 3$ und $h_2 = 8$ oder auch $h_1 = 7{,}3$ und $h_2 = -1{,}8$ gleich sinnvolle Messungen des Merkmals Haarfarbe.

4. Man beachte, dass in Def. 1.4 über die Anzahl n von empirischen Objekten keine Aussage gemacht wird. Für die Anzahl z_i der Stellen der Relation R_i muss natürlich gelten $z_i < n$. Im Beispiel wurde unterschieden:
   R_1: "ist größer als" ist eine zweistellige Relation bezüglich der Eigenschaft Körpergröße
   R_2: Haarfarbe: beispielsweise "ist blond" ist eine einstellige Relation bezüglich der Eigenschaft Haarfarbe.

5. Der anschauliche Begriff "Messen" oder "**messbar**" (im Alltagssprachgebrauch) ist enger als der hier verwendete. Man versteht darunter das wiederholte Anlegen eines Maßstabes (z.B. ein Meter). In diesem Sinne ist z.B. die Länge einer Wand 5m, weil der Metermaßstab fünfmal angelegt (addiert) werden kann. Diese Art Messung setzt eine metrische Skala voraus.

6. Eine **Dimension** ist eine durch eine Zahl zu beschreibende Eigenschaft (z.B. Länge), wobei dieser Zahl meist eine Maßeinheit (z.B. Meter) beigegeben ist. Eindimensionalität ist durch Transitivität gekennzeichnet. Gilt für die Eigenschaft X bei drei Objekten $x_1 < x_2$ und $x_2 < x_3$ aber $x_3 < x_1$ so ist dies ein Hinweis darauf, dass die Eigenschaft X mehrdimensional ist, also mehrere Zahlen und nicht nur eine Zahl zur Charakterisierung eines Objekts hinsichtlich X erforderlich sind.

b) Skalenarten

Mit einer **Skala** wird die Zahlenmenge (das numerische Relativ) definiert, die (das) zur Bezeichnung von Merkmalsausprägungen verwendet werden kann. Für die Zwecke der Statistik ist die Unterscheidung von fünf Skalentypen gem. Übers. 1.2 ausreichend.

Anmerkungen zu Übers. 1.2:

1. Kennzeichnend für den Skalentyp ist:

a) welche Rechenoperationen mit der Skala "sinnvoll" und "sinnlos" sind

Übersicht 1.2: Skalentypologie

Skala (Name)	**definiert ist zusätzlich**	**zulässige Transformation**	**Beispiel**	**Mittelwerte**[a)]
Nominal-skala	Äquivalenzrelation	ein-eindeutige	Postleitzahlen, Steuerklasse	$\bar{x}_M$
Ordinal-skala	Ordnungsrelation	streng monoton steigend	Windstärke (Beaufort)	$\bar{x}_M$, $\tilde{x}_{0,5}$
Intervall-skala	Maßeinheit u. Nullpunkt [b)]	Linear $y_v = a + bx_v$	Temperatur in Grad Celsius	$\bar{x}_M$, $\tilde{x}_{0,5}$, $\bar{x}$
Ratio- bzw. Verhält-nisskala	natürl. Nullpunkt (Maßeinheit noch willkürlich)	proportional $y_v = bx_v$ $(a = 0)$[c)]	Temperatur in Kelvin, Körpergröße	alle Mittelwerte
Absolut-skala	auch natürliche Maßeinheit	identisch $y_v = x_v$ $(b = 1)$	Häufigkeiten	alle Mittelwerte

a) Zur. Notation vgl. Bem. 5.
b) beides (Nullpunkt und Maßeinheit) noch willkürlich.
c) d.h. der Nullpunkt ist nicht mehr willkürlich (er kann nicht durch $a \neq 0$ verschoben werden), wohl aber die Maßeinheit (weshalb $b \neq 1$ sein kann). Man kann sinnvoll Verhältnisse x_1 / x_2 (Proportionen, engl. "ratios") bilden (denn $y_1 / y_2 = x_1 / x_2$).

b) welche Transformationen "zulässig" (im noch definierten Sinne) sind.

Zwei Beispiele zeigen, wie man mit Hinweis auf a) und b) darlegen kann welcher Skalentyp vorliegt:

- Postleitzahlen sind Zahlenwerte einer Nominalskala (bei der Zahlen nur stellvertretend für Namen sind):
  a) es macht keinen Sinn zu sagen, der Mittelwert aus den Städten Oberhausen (Postleitzahl 42) und Münster (44) sei Essen (43) und
  b) die Zahlen -7 , 2432 und 489 könnten den gleichen Zweck erfüllen wie die Postleitzahlen 42,43 und 44;

- Zensuren sind Messungen auf einer Ordinalskala:
  a) die Abstände zwischen den Zensuren (Noten) 1,2,3,4 und 5 sind nicht (oder nicht notwendig) gleich und
  b) die durch eine monotone (ordnungserhaltende) Transformation gewonnenen Zahlen -2, 10, 13, 28 und 64 könnten den gleichen Zweck erfüllen.

2. Metrik:

Die ersten beiden Skalen der Übers. 1.2 (Nominal- und Ordinalskala) heißen auch "topologische Skalen", die letzten drei "metrische Skalen". Eine "Metrik" auf die Menge der Zahlen x_1, x_2, x_3 definieren (was bei der Nominal- und Ordinalskala noch nicht erfolgt) heißt ein Maß $d(x_i,x_j)$ [d: anschaulich interpretiert eine Distanz] festzulegen, für das gilt:

(1) $d(x_i,x_i) = 0$ (i,j,k = 1,2,...)
(2) $d(x_i,x_j) = d(x_j,x_i)$ und
(3) $d(x_i,x_j) + d(x_j,x_k) \geq d(x_i,x_k)$ (Dreiecksungleichung).

Größenmäßig ordnen lassen sich nicht nur metrisch-, sondern auch ordinal skalierte Merkmale. Bei letzterer sind aber die Abstände nicht definiert. Nominalskalierte Merkmale lassen sich nicht nach der Größe, sondern nur nach dem Sachzusammenhang ordnen, was in Klassifikationen oder Systematiken erfolgt (z.B. Berufssystematik, Klassifikation der Wirtschaftszweige usw.).

3. Skalentyp und Merkmalsarten. Man kann unterscheiden:

- klassifikatorische (qualitative) Merkmale oder "Attribute" mit einer abzählbaren Menge nur artmäßig unterschiedener Ausprägungen bei einer Nominalskala,
- komparative (intensitätsmäßig abgestufte) Merkmale bei einer Ordinalskala und
- metrische (quantitative) Merkmale im Falle einer metrischen Skala.

Der Begriff qualitativ wird auch für die ersten beiden Merkmalstypen verwendet. Klassifikatorische Merkmale verlangen z.T. Methoden unterschiedlicher Art (z.B. Verhältniszahlen statt Mittelwerte oder in der Induktiven Statistik spielt das Begriffspaar "homograd"/"heterograd" eine wichtige Rolle). Ferner sind zwei spezielle Typen klassifikatorischer Merkmale von besonderem Interesse:

- **Dichotome Merkmale** (Alternativ-, binäre Merkmale): sie haben zwei Ausprägungen, die mit 0 und 1 codiert werden können. Im Zusammenhang mit der Assoziationsmessung (Kap. 7) oder mit Verhältniszahlen (Kap. 9) wird hierauf besonders eingegangen.
- **Häufbare Merkmale**: ein Merkmal ist **häufbar**, wenn eine Einheit gleichzeitig mehrere Ausprägungen realisieren kann (z.B. Beruf, Beschäftigung, Studienfach); normalerweise sind Merkmale **nicht-häufbar** (z.B. Alter, Geschlecht).

4. Bemerkungen zu den "zulässigen Transformationen" in Übers. 1.2:

Unter einer Transformation der Skala X in die Skala Y versteht man eine Funktion f, die jedem Wert von x_v einen (und nur einen) Wert y_v zuordnet. "Zulässig" heißt, dass die Skala Y den gleichen Informationsgehalt hat, wie die Skala X. Man kann verschiedene Arten von (zunehmend spezieller werdenden) Transformationen unterscheiden:

- Im einfachsten Fall einer **ein-eindeutigen (bijektive) Transformation** bedeutet X in Y zu transformieren nur, dass zwei verschiedenen Werten x_1 und x_2 zwei verschiedene Werte y_1 und y_2 zugeordnet werden. Eine speziellere Transformation ist die
- **streng monoton steigende Transformation:** ist $x_1 < x_2$, so muss auch $y_1 < y_2$ sein (bei "monoton" wäre auch zugelassen y_1 ú y_2; der Zusatz "steigend" ist notwendig, wenn die Reihenfolge erhalten bleiben soll, denn "fallend" würde bei $x_1 < x_2$ zu $y_1 > y_2$ führen).
- Die noch speziellere **lineare Transformation** (Lineartransformation) liegt vor, wenn gilt:

  $$\boxed{(1.1) \quad y_v = a+bx_v}$$

  mit a und b als reellen Konstanten (das wird anhand der "Umrechnung" einer Temperaturmessung von "Grad Celsius" [x_v] in "Grad Fahrenheit" [y_v] in Beispiel 1.2 demonstriert).
- Eine **proportionale Transformation** liegt dann vor, wenn man in Gl. 1.1 a = 0 setzt (was bedeuetet, dass der Nullpunkt festliegt und nicht verändert werden darf); ein Beispiel hierfür ist die Umrechnung von Währungseinheiten, etwa von DM in US-$.
- Wird noch spezieller b = 1 gefordert, so dass $y_v = x_v$, so liegt eine **identische Transformation** vor, d.h. die Skala x kann überhaupt nicht mehr verändert werden, insbesondere ist wegen b = 1 auch die Maßeinheit fest (man würde im Alltagssprachgebrauch wohl gar nicht mehr von einer "Transformation" sprechen).

Wie man hieran sieht, stellen die Skalen der Übers. 1.2 eine **Hierarchie** dar hinsichtlich der zulässigen Transformationen und Rechenoperationen: speziellere Transformationen heißt mehr Informationsgehalt der Skala und damit mehr Möglichkeiten der sinnvollen rechnerischen Verarbeitung der Daten.

5. Bemerkungen zu den Mittelwerten in Übers. 1.2 und zur praktischen Bedeutung der Skalentypologie:

Auf die in Spalte 5 der Übers. 1.2 angegebenen zulässigen Mittelwerte wird in Kap. 4 eingegangen. Zu den Abkürzungen:

$\bar{x}_M$ = Modus
$\tilde{x}_{0,5}$ = Median
$\bar{x}$ = arithmetisches Mittel (Durchschnitt)

Es ist gerade am Beispiel der Mittelwerte die praktische Bedeutung der Unterscheidung der Skalenarten leicht einzusehen:

- Bei einer Nominalskala ist bereits der Modus sinnvoll anzuwenden, bei einer Ordinalskala Modus und Median, bei einer Intervallskala Modus, Median und arithmetisches Mittel usw.
- Ferner gilt:

> Was bei gegebenen Daten jeweils sinnvoll zu berechnen ist, ist abhängig von
> a) der Qualität der Daten, insbesondere der Skalenart (je höher die Skalenart, desto mehr Mittelwerte sind sinnvoll zu berechnen) und
> b) der Fragestellung (Beispiel: Geschwindigkeiten [dort ist nicht das arithmetische, sondern das harmonische Mittel anzuwenden]).

6. Nicht eingegangen werden kann hier auf die **Skalierungsverfahren**. Hierbei geht es um Methoden, mit denen man in der Praxis komplexe und subjektive Eigenschaften messen kann, wie z.B. die Intensität von Sinneswahrnehmungen oder Gefühlen, die Messung der Intelligenz, des Sozialstatus, der Lebensqualität usw., die v.a. für Anwendungen der Statistik in der Psychologie und Soziologie von Interesse sind.

Beispiel 1.2:

Man zeige, dass eine Temperaturmessung in "Grad Celsius" auf einer Intervallskala, eine Messung in "Kelvin" dagegen auf einer Ratioskala erfolgt.

Lösung 1.2:

Man kann den Nachweis auf zwei Arten führen, indem man zeigt:

a) welche Rechenoperationen bei Messungen in "Grad Celsius" [^oC] bzw. in "Kelvin" [K] sinnvoll sind und
b) welche Transformationen zulässig sind.

zu a)
Man kann bei ^oC (anders als bei K) nicht sagen: 20^oC ist "doppelt so warm" wie 10^oC, wohl aber, dass der "Abstand" zwischen 10^oC und 20^oC genauso groß ist wie derjenige zwischen 20^oC und 30^oC.

zu b)
Die Temperaturmessung von "Grad Celsius" [x_v] ist von der gleichen Qualität, wie die Messung in "Grad Fahrenheit" [y_v]. Die Umrechnung erfolgt nach der Formel $y_v = 32 + 1{,}8x_v$, die eine Lineartransformation gem. Gl. 1.1 darstellt mit a = 32 und b = 9/5; so entsprechen sich beispielsweise 0^oC und 32^oF. Es gelten die folgenden Umrechnungen:

^oC	0	10	20	30	40
^oF	32	50	68	86	104

Das erklärt auch das Problem unter a) denn

- $20^oC/10^oC = 2$ aber $68^oF/50^oF = 1{,}36$, andererseits gilt aber
- die Abstände zwischen 10^oC, 20^oC, 30^oC usw. sind jeweils 10^oC und die entsprechenden Abstände zwischen 50^oF, 68^oF, 86^oF usw. sind ebenfalls gleich, nämlich 18^oF, wobei $18 = \frac{9}{5} \cdot 10$

Die Größe a bewirkt eine Verschiebung des Nullpunkts (Translation), der bei ^oC und ^oF willkürlich ist, bei der absoluten Temperaturmessung in Kelvin dagegen unveränderlich -273^oC ist und die Größe b bewirkt eine Streckung (wenn b > 1) oder Stauchung (b < 1) des Maßstabs.

Das Beispiel zeigt übrigens auch

- dass es nicht "in der Natur der Sache" liegt, mit welcher Skala ein Merkmal gemessen wird, sondern dass dies allein vom Stand der Messtechnik abhängt und
- dass durch Transformationen das Skalenniveau nicht gesteigert werden kann (die Intervallskala ^oC wird durch die Transformation in ^oF nicht zu einer Skala anderen Typs).