Prof. Dr. Peter **von der Lippe** Universität Duisburg-Essen, Campus Essen

Einführende Übersicht zu den erzeugenden Funktionen

(probability – , moment – etc. – generating functions)

1. Funktionen von Zufallsvariablen[1]

Ist X eine ZV, dann ist auch eine Funktion g (X) = X^r, $(X - \mu)^r$, e^{tX} oder t^X eine ZV und hat damit eine Wahrscheinlichkeitsverteilung und einen Erwartungswert. Es gilt

Erwartungswert	Name
$E(X^r)$	r – tes Anfangsmoment (= M_k)
$E(X-\mu)^r$	r – tes zentrales Moment (Z_r)
$E(e^{tX}) = M_x(t)$	momentenerzeugende Funktion (MEF)
$E(e^{itX}) = \psi_x(t)$	charakteristische Funktion ($i=\sqrt{-1}$)
$E(t^X) = W_x(t)$	wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion (WEF)
$E(1+t)^X = W_x(1+t) = \rho_X(t)$	faktorielle momentenerzeugende Funktion (FMEF)

2. Ableitungen von $E(e^{tx})$, momentenerzeugende Funktion (MEF)

Wegen $e^x = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots$ gilt auch

$$E(e^{tx}) = E\left(\frac{X^0 t^0}{0!}\right) + E\left(\frac{Xt}{1!}\right) + E\left(\frac{X^2 t^2}{2!}\right) + \ldots = 1 + t\,E(X) + \frac{t^2}{2!}E(X^2) + \ldots = M_X(t)$$

Ableitungen nach t

$$M'_X(t) = E(X) + t\,E(X^2) + \frac{1}{2}t^2\,E(X^3) + \ldots$$

$$M''_X(t) = E(X^2) + t\,E(X^3) + \frac{1}{2}t^2\,E(X^4) + \ldots \text{ usw.}$$

Folglich ist die k-te Ableitung von $M_X(t)$ nach t an der Stelle t = 0 das k-te Anfangsmoment.

3. Charakteristische Funktion

Der Ausdruck $M_X(t)$ muss nicht notwendig existieren (konvergieren), anders dagegen $\psi_X(t) = E(e^{itX})$ mit $i = \sqrt{-1}$, die "charakteristische Funktion" der ZV X. Es gilt hier für die k-te Ableitung nach t bei t = 0:

$$\boxed{\frac{\psi_X^{(k)}(0)}{i^k} = E(X^k) = M_k}$$

4. MEF einer zweidimensionale ZV

Beispiel Trinomialverteilung $\frac{n!}{x_1!\,x_2!\,x_3!} p_1^{x_1}\, p_2^{x_2}\, p_3^{x_3}\ (x_3 = n - x_1 - x_2)$

$M_{x1,x2}(t_1, t_2) = p_1 e^{t_1} + p_2 e^{t_2} + p_3$ (oder mit der Notation π_i statt p_i).

[1] Weitere Informationen zu den Gegenständen dieses Papiers auch in v. d. Lippe, Induktive Statistik, Formel und Aufgabensammlung (Oldenbourg Verlag), S. 33 – 36 und in den Übersichten zu den entsprechenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen.

Randverteilungen sind Binomialverteilungen etwa $M_{x_1}(t_1,0) = \left[p_1 e^{t_1} + (1-p_1)\right]^n$ (die bisherige Notation wäre gewesen $p_1 = p$ und $1 - p_1 = q$). Die Momente $E(X_1^r)$ sind durch partielle Ableitungen nach t_1 bestimmt[2]. Die andere Funktion (MEF der Randverteilung) ist $M_{x2}(0, t_2)$.

5. **Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion** (WEF)**, lagerzeugende Funktion und faktorielle momenterzeugende Funktion** (FMEF)

Nur bei X als nicht negativer, ganzzahliger ZV

$W_X(t) = E(t^X) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \ldots$ $(x = 0, 1, 2,\ldots)$. Es gilt für die k-te Ableitung nach t

Ableitung	Bedeutung
$W_X^{(k)}(0) = k!p_k$	Wahrscheinlichkeiten p_k (für $x = x_k$)
$W_X^{(k)}(1) = E^*(X,k) = E[X(X-1)....(X-k+1)]$	$E^*(X,k)$ ist das k-te faktorielle Moment

Statt Ableitungen von $W_x(t)$ an der Stelle $t = 1$ zu betrachten, kann man auch die faktorielle momenterzeugende Funktion $\rho_x(t) = E[(1+t)^x]$ nach t ableiten und an der Stelle $t = 0$ betrachten $\rho_X^{(k)}(0) = W_X^k(1) = E^*(X,k)$

Anwendung:

Die *lagerzeugende* Funktion ist formal gleich der WEF.

Grenzübergänge $\lim\limits_{n\to\infty}(q_n + p_n t)^n = e^{\lambda(t-1)}$ dabei ist $(q+pt)^n$ die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion (WEF) der Binomialverteilung und $\exp[\lambda(t-1)]$ die WEF der Poissonverteilung. Die Taylor-Reihenentwicklung der WEF liefert

$$W_X(t) = W(0) + \frac{W'(0)}{1!}t + \frac{W''(0)}{2!}t^2 + \frac{W'''(0)}{3!}t^3 + \ldots \text{ und mit } W_X^{(k)}(0) = k!p_k \text{ erhält man}$$

$$W_X(0)\frac{t^0}{0!} + W'_X(0)\frac{t}{1!} + W''_X(0)\frac{t^2}{2!} + \ldots.. = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \ldots = E\left(t^X\right)$$

Die Taylor-Reihe der W-Funktion (WEF) in allgemeiner Form (oben war Fall $a = 0$)[3] liefert

$$W_X(t) = W(a) + \frac{W'(a)}{1!}(t-a) + \frac{W''(a)}{2!}(t-a)^2 + \frac{W'''(a)}{3!}(t-a)^3 + \ldots$$

Verifizieren des Zusammenhangs zwischen $W_X^k(1)$ und den faktoriellen Momenten $E^*(X,k)$ mit der Verteilung

x	0	1	2	3	4
Wahrsch. P(X = x)	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4

$W(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3 + p_4 t^4$ so dass $W(1) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$

$W'(t) = p_1 + 2p_2 t + 3p_3 t^2 + 4p_4 t^3$ so dass $W'(1) = 0p_0 + 1p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 = E(X)$

$W''(t) = 2p_2 + 6p_3 t + 12p_4 t^2$ so dass $W''(1) = 2p_2 + 6p_3 + 12p_4 = E(X^2)-[E(X)]^2 = E^*(X,1)$

denn $E(X^2) = p_1 + 4p_2 + 9p_3 + 16p_4$

---

[2] M $(t_1, 0)$ bezieht sich auf Binomialverteilung $p_2 = 0$, $p_3 = 1 - p_1 = q$ und $p_1 = p$. Man erkennt die Gestalt der momenterzeugenden Funktion der Binomialverteilung wieder $(pe^t + q)^n$.

[3] Dieser Fall $a = 0$ heißt auch MacLaurin Reihe (Potenzreihe).

W'''(t) = $6p_3 + 24p_4t$ so dass W''(1) = $6p_3 + 24p_4$ = E*(X,2)=E[X(X-1)(X-2)]=
$E(X^3) - 3E(X^2) + 2E(X)$ und es gilt
$E(X^3) = p_1 + 8p_2 + 27p_3 + 64p_4$, das sowie $3E(X^2)$ und 2E(X) eingesetzt erhält man für W'''(t) auch leicht $6p_3 + 24p_4t$.

6. Sätze zur momenterzeugenden Funktion (MEF)

Ähnliche Zusammenhänge gelten bei den anderen erzeugenden Funktionen

1. Die k-te Ableitung nach t an der Stelle t = 0 ist das k-te Anfangsmoment $M_k = E(X^k)$
2. Die MEF einer Summe unabhängiger ZVn ist das Produkt der MEFn (Anwendung bei
   a) Linearkombinationen (vgl. auch Gl.(*) unten) → Grenzwertsätzen und
   b) bei der Frage, ob eine Verteilung reproduktiv ist.
3. Gilt für zwei ZVn X und Y $M_X(t) = M_Y(t)$, dann sind auch die Wahrscheinlichkeitsverteilungen gleich (wichtig für Grenzwertsätze) wenn lim $M_X(t) = M_Y(t)$ ist f(y) die asymptotische Verteilung.

7. Übersicht

(vgl. auch Übers. 4.4 in meinem Lehrbuch "Induktive Statistik" im Oldenbourg Verlag)

Funktion	Definition	Bedeutung der k-ten Ableitung
wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion (WEF)	$W_X(t) = E(t^X)$ $x \in IN,\ \lvert t\rvert \le 1$	$W_X^{(k)}(0) = k!\, p_k$ mit $p_k = P(X = x_k)$ $W_x^{(k)}(1) = E^*(X,k) = E[X(X-1)...]$
faktorielle momenterzeugende Funktion (FMEF)	$\rho_X(t) = E[(1+t)^X]$	$\rho_X^{(k)}(0) = E^*(X,k)$
momenterzeugende Funktion (MEF)	$M_X(t) = E(e^{tX})$ $t \in IR$	$M_X^{(k)}(0) = d^k M_x(t)/dt^r\big\rvert_{t=0} = E(X^k)$
charakteristische Funktion	$\psi_X(t) = E(e^{itX})$	$\psi_X^{(k)}(0) = i^k E(X^k)$

Für die MEF bei einer Lineartransformation Y = a + b X gilt

$$\boxed{(*) \qquad M_Y(t) = e^{at} M_{bX}(t) = e^{at}[M_X(t)]^b.}$$

Gl. (*) wird benutzt in der folgenden Betrachtung bei Gl. (1).

8. Grenzwertsatz von Lindeberg-Levy (Beweisskizze mit vier Schritten)

Die charakteristische Funktion der Standardnormalverteilung lautet $\psi_X(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$.

Satz: Sind die ZVn $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängig identisch (aber beliebig) verteilt mit $E(X_i) = \mu$, $V(X_i) = \sigma^2$ $\forall$ i, dann ist $Y_n = X_1 + \ldots + X_n$ asymptotisch normalverteilt mit $\mu_y = n\mu$ und $\sigma_Y = \sigma\sqrt{n}$, so dass $\frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ asymptotisch N(0,1) verteilt ist (also standardnormalverteilt).

Schritt 1

Die ZVn $U_i = X_i - \mu$ (i = 1,…, n) haben die char. Fktn. $\psi_U(t)$ und es gilt wegen $E(U_i) = 0\ \forall_i$, dass die char. Fkt. von $V_i = \frac{U_i}{\sigma\sqrt{n}}$ lautet $\psi_V(t) = \psi_U(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})$. Dann hat $Z_n = \sum V_i$ (i = 1,…, n) die char. Fkt.

(1) $$\psi_Z(t) = \left[\psi_U\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n.$$

Schritt 2

Man logarithmiert Gl. 1 und entwickelt die McLaurin Reihe bis zum dritten Glied (nicht einschränkend)[4] bei t = 0.

(2) $$\ln\psi_Z(t) = n\ln\left[\psi_U(0) + \psi'_U(0)\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} + \psi''_U(0)\frac{1}{2!}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2\right]$$

Da $\psi_U(0) = 1, \psi'_U(0) = iE(U) = 0$ und $\psi''_U(0) = i^2E(U^2) = -\sigma^2$ gilt

(2a) $$\ln\ \psi_Z(t) = n\ln\left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)$$

Schritt 3

Die Reihenentwicklung dieses Ausdrucks ergibt

(3) $$\ln\left(1 - \frac{t^2}{2n}\right) = -\frac{t^2}{2n} - \frac{t^4}{2n^2} - \frac{t^6}{\frac{8}{3}n^3} - \ldots$$

(4) $$n\ln\left(1 - \frac{t^2}{2n}\right) = -\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{2n} - \frac{3t^6}{8n^2} - \ldots$$

Schritt 4

Grenzübergang $\lim\limits_{n\to\infty} n\ \ln\left(1 - \frac{t^2}{2n}\right) = -\frac{t^2}{2}$ somit ist

$\lim\limits_{n\to\infty} \psi_Z(t) e^{-t^2/2}$ was ja die char. Fkt. der Standard NV ist, so dass die Standard NV die asymptotische Verteilung der standardisierten Summe $Y = \sum X$ also von $\frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ ist (q.e.d.).

[4] In Schritt 4 wird deutlich, dass es unbedeutend ist, ob diese Reihe mit dem dritten, oder vierten oder … Glied abgebrochen wird.

9. Ergänzung für Hörer der Vorlesung im WS 2006/7

In der Vorlesung wurde ab Mitte Oktober bis Ende November 2006 behandelt

a) Momenterzeugende Funktionen

- Zweipunktverteilung, Binomialverteilung, geometr. Verteilung, Poissonverteilung
- Faltung (convolution) von Verteilungen (Beispiel Binomialverteilung, später auch Faltung von Lag-Verteilungen
- Aufg. 4.1.20 (Fall mit nicht existierendem E (X))
- Beispiele aus GS und Lehrbuch von Schira
- Reproduktivität der Poissonverteilung und der Binomialverteilung
- Normalverteilung (Momente, Reproduktivität)
- Grenzübergang Binomial $\rightarrow$ Poisson mit erzeugenden Funktionen

b) Hinweise auf Trinomialverteilung und charakteristische Funktion

c) Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion

b) Faktorielle Momenterzeugende Funktionen (FMEF)

Beispiel für faktorielle Momente und FMEF: **Poissonverteilung**

$W_X(t) = \exp[\lambda(t-1)] \Rightarrow$	$W_X^{(r)}(t) = \lambda^r e^{\lambda(t-1)} \Rightarrow$	$W_X^{(r)}(1) = d^r W_x(t)/dt^r \big\vert_{t=1} = E^*(X,r)$
FMEF	**r-te Ableitung**	**Zusammenhang mit faktor. Momenten**

Folglich gilt für die faktoriellen Momente das einfache Bildungsgesetz

$W_X^{'}(1) = E^*(X,1) = E(X) = \lambda^1$

$W_X^{''}(1) = E^*(X,2) = E[X(X-1)] = \lambda^2$

$W_X^{'''}(1) = E^*(X,3) = E[X(X-1)(X-2)] = \lambda^3$ usw.

(dagegen MEF der Poissonverteilung: $M_X(t) = \exp[-\lambda(1-e^t)]$, in der Vorlesung hergeleitet, auch per Grenzübergang von Binomialverteilung)

♦