2. Indexzahlen

Indexzahlen (Indizes) sind Maßzahlen (beschreibende Kennzahlen) für den Vergleich einer Gesamtheit von Erscheinungen, Maße der *aggregierten* Veränderung. So ist z.B. ein Preisindex i.d.R. ein summarisches (zusammengefaßtes) Maß von Preisveränderungen (im zeitlichen Vergleich)[1], etwa ein Mittelwert von Preis- Meßzahlen für i = 1,2,...,n Waren.

2.1 Prinzipien der Konstruktion von Indexformeln

Indexformel

direkter Vergleich von zwei Perioden 0 und t, motiviert mit

Kettenindizes (Abschn. **2.2**)

axiomatischen Forderungen (Abschn. **2.1**)

der (mikro-) "ökonomischen Theorie der Indexzahlen"*

Nur hierauf beziehen sich

a) die folgende **Definition** eines Preisindexes

(2.1) $P_{0t} = P(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{p}_t, \mathbf{q}_t)$ als Funktion von Preis- und Mengenvektoren und

b) die **Axiome** von Übers. 2.3

* wird hier nicht behandelt

2.1 Direkte Indexformeln

2.1.1. Traditionelle Indexformeln: Laspeyres, Paasche

Vorläufer der heute üblichen Indizes waren ungewogene Indizes. Man erkennt an ihnen welche Konstruktionsprinzipien erforderlich sind, damit Indexformeln bestimmte Minimimalforderungen an Indizes ("Axiome", vgl. Übers. 2.3) erfüllen. Die Preisindexformel von Dutot (D)

(2.2) $$P_{0t}^{D} = \frac{\bar{p}_t}{\bar{p}_0} = \frac{\sum p_{it}}{\sum p_{i0}}$$

ist nicht sinnvoll, weil sie die Kommensurabilität, (Axiom P5) nicht erfüllt[2]. Es gilt

Eine Meßzahl von Mittelwerten (und alle [ungewogene] Summen von Preisen verwendende Indexformeln) ist nicht kommensurabel, wohl aber ein Mittelwert von Meßzahlen.

Ein solches Mittel (ungewogens arithmetisches Mittel) von Preismeßzahlen ist

(2.3) $P_{0t}^{C} = \frac{1}{n}\sum \frac{p_{it}}{p_{i0}}$, die Preisindexformel von (C =) **Carli**.[3]

Ungewogene Indizes können der unterschiedlichen Bedeutung der Waren nicht Rechnung

[1] zumindest direkte Indizes werden auch für den interregionalen (z.B. internationalen) Vergleich benutzt.
[2] Es macht dann einen Unterschied, ob Preise als Kilo- oder als Pfundpreise notiert werden.
[3] Ein ungewogenes geometrisches Mittel von Preismeßzahlen ist die Formel von Jevons.

tragen, haben keine Ausgabeninterpretation und eignen sich nicht zur Deflationierung.

Preisindizes nach Laspeyres und Paasche haben eine doppelte Interpretation, als

- gewogenes Mittel von Preismeßzahlen (**Meßzahlenmittelwertformel**) und als
- Verhältnis von Ausgaben- bzw. Einnahmenaggregate (**Aggregatformel**)[4].

Zur Vereinfachung ist im folgenden das Subskript i (Warenart) weggelassen worden. Die Vektorschreibweise zeigt, daß die Indizies *lineare* Indizes sind (Preisindizes linear in den Preisen, Mengenindizes linear in den Mengen):

Formel von	**Meßzahlenmittelwertformel**	**Aggregatformel**
Laspeyres (L)	(2.3) $P_{0t}^L = \sum \frac{p_t}{p_0} \frac{p_0 q_0}{\sum p_0 q_0}$ gewogenes **arithmetisches** Mittel Gewichte: Ausgabenanteile zur **Basis**zeit	(2.5) $P_{0t}^L = \frac{\sum p_t q_0}{\sum p_0 q_0} = \frac{\mathbf{p}_t' \mathbf{q}_0}{\mathbf{p}_0' \mathbf{q}_0}$ Zähler: fiktives Ausgabenaggregat Nenner: tatsächliche Ausgaben
Paasche (P)	(2.4) $P_{0t}^P = \sum \frac{p_t}{p_0} \frac{p_0 q_t}{\sum p_0 q_t}$ oder: gewogenes **harmonisches** Mittel, Gewichte: Ausgabenanteile zur **Berichts**zeit	(2.6) $P_{0t}^P = \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_0 q_t} = \frac{\mathbf{p}_t' \mathbf{q}_t}{\mathbf{p}_0' \mathbf{q}_t}$ Zähler: tatsächliche Ausgaben, Nenner: fiktives Ausgabenaggregat

In manchen Lehrbüchern (nicht in der Praxis) spielt auch der Preis- (oder gar der Mengen-) index nach **Lowe** eine gewisse Rolle. Ein solcher Index kann jedoch nicht kommensurabel sein. Schon wegen der Unmöglichkeit, kg-, Liter-, Stück-Mengen usw. zu einer "Gesamtmenge" zu addieren, sind Durchschnittsmengen auch meist gar nicht definiert.

Wertindex (z.B. Lebenshaltungskostenindex im Unterschied zum Preisindex für die Lebenshaltung nach Laspeyres)

(2.7) $$W_{0t} = \frac{\sum p_{it} q_{it}}{\sum p_{i0} q_{i0}} \text{ oder einfach } W_{0t} = \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_0 q_0}$$

Mengenindizes gewinnt man aus Preisindizes durch Vertauschen von Mengen und Preisen (vgl. Übers. 2.2):

(2.5a) $Q_{0t}^L = \frac{\sum q_t p_0}{\sum q_0 p_0}$ (**Laspeyres**) und (2.6a) $Q_{0t}^P = \frac{\sum q_t p_t}{\sum q_0 p_t}$ (**Paasche**).

Wertindex als Indexprodukt

(2.7a) $$W_{0t} = P_{0t}^L Q_{0t}^P = P_{0t}^P Q_{0t}^L .$$

Diese grundlegende Formel ist Basis der Preisbereinigung. Danach erfüllt das Paar P^L,Q^P bzw. P^P/Q^L den Produkttest, nicht jedoch die anspruchsvollere (und in ihrer Bedeutung meist völlig überschätzte) Faktorumkehrbarkeit, denn es ist meist $P^L Q^L > W$ und $P^P Q^P < W$[5].

[4] Der berühmte "Idealindex" von I. Fisher oder auch Kettenindizes aller Art besitzen keine der beiden Interpretationen.

[5] Das folgt aus Gl. 2.8 bei negativer Kovarianz (C < 0, was häufiger sein dürfte als C > 0).

2.2 Übersicht über die Indexformeln von Laspeyres und Paasche

Preise p, Mengen q, Subskripte t = Berichtszeit, 0 = Basiszeit, Summierung über alle n Waren

Wertindex $W_{0t} = \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_0 q_0}$

Laspeyres Preisindex $P^L_{0t} = \frac{\sum p_t q_0}{\sum p_0 q_0}$	**Paasche** Preisindex $P^P_{0t} = \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_0 q_t}$

Verwendung für: spezielle Preisniveaus (z.B. Preisindizes für die Lebenshaltung)

Verwendung: Preisbereinigung (Deflationierung, z.B. des Sozialprodukts)

Vertauschung von Preisen und Mengen in den Formeln führt zu Mengenindizes

Laspeyres Mengenindex $Q^L_{0t} = \frac{\sum q_t p_0}{\sum q_0 p_0}$	Paasche Mengenindex $Q^P_{0t} = \frac{\sum q_t p_t}{\sum q_0 p_t}$

Preisbereinigung (Deflationierung; auch Realwert- oder Volumenrechnung genannt)

aus einem	ist zu errechnen ein	Vorgehensweise
Wert = $\sum p_t q_t$ (einer ***nominalen*** Größe, zu ***jeweiligen*** Preisen)	***Volumen*** = $\sum p_0 q_t$ (eine ***reale*** Größe, zu ***konstanten*** Preisen des Basisjahres)	Division des Werts durch einen[1)] Paasche Preisindex liefert $\sum p_0 q_t$ (Volumen)
Wertindex $W_{0t} = \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_0 q_0}$	Laspeyres-Mengenindex[2)] $Q^L_{0t} = \frac{\sum q_t p_0}{\sum q_0 p_0}$	Division durch einen[1)] Paasche Preisindex liefert $Q^L_{ot} = \frac{W_{0t}}{P^P_{0t}}$ [2)]

1) sich auf das gleiche Aggregat beziehende
2) als Maß für die Veränderung von Volumen

Formel von Ladislaus v. Bortkiewicz

(Größenrelation zwischen Laspeyres- und Paasche-Preisindex) Die Kovarianz von Preis- (b_i) und Mengenmeßzahlen (c_i) mit den Gewichten g_i (Ausgabenanteile zur Basiszeit) lautet: $C = \sum \left(b_i - P^L\right)\left(c_i - Q^L\right)g_i = Q^L\left(P^P - P^L\right)$.

Daraus folgt $W = P^L Q^L + C$, denn mit $g_i = \frac{p_{i0}q_{i0}}{\sum p_{i0}q_{i0}}$, $b_i = \frac{p_{it}}{p_{i0}}$, und $c_i = \frac{q_{it}}{q_{i0}}$ gilt $P^L_{0t} = \sum g_i b_i$ und $Q^L_{0t} = \sum g_i c_i$ sowie $W_{0t} = \sum b_i c_i g_i = P^L Q^P = P^P Q^L$. Dann gilt

(2.8) $C = Q^L(P^P - P^L) = P^L(Q^P - Q^L)$ also

wenn negative Kovarianz $C < 0$ dann $P^L > P^P$ und $Q^L > Q^P$
wenn positive Kovarianz $C > 0$ dann $P^L < P^P$ und $Q^L < Q^P$

2.1.2. Axiome und Axiomensysteme

Zu einigen fundamentalen Forderungen an sinnvolle Indexformeln (Index-"axiome") vgl. Übers. 2.3. Wichtige Axiome, die erst in neuerer Zeit mehr beachtet werden, sind insbesondere Aggregationseigenschaften, wie z.B. strukturelle - und additive Konsistenz (Übers. 2.4). Eine große Rolle spielen auch immer noch Axiome (oder "Proben", "Tests"), die aus der Indexphilosophie von Irving Fisher stammen, wie dessen "reversal tests".

Übersicht 2.3: Axiomensystem von Eichhorn und Voeller

Notation:
Preis- und Mengenvektoren (jeweils n Komponenten [Waren]) $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{q}_0$, $\mathbf{p}_t$, $\mathbf{q}_t$. Die Indexfunktion P: $R^{4n} \Rightarrow R$ sollte danach die folgenden Axiome erfüllen (Ein Großteil der Axiome kann man auch ohne Bezugnahme auf Mengen darstellen. Die Funktion ist dann $R^{2n} \Rightarrow R$. Bezieht man Mengen in die Definition des Axioms ein, dann ist z.T. zu unterscheiden zwischen der strengen und der schwachen [wenn $\mathbf{q}_t = \mathbf{q}_0$] Forderung):

P1	***Monotonie:*** a) in Berichtspreisen $P(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_t^*) > P(\mathbf{p}_0 . \mathbf{p}_t)$, wenn $p_{it}^* \geq p_{it}$ und für mindestens eine Ware i gilt: $p_{it}^* > p_{it}$ b) in Basispreisen $P(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_t) > P(\mathbf{p}_0^* . \mathbf{p}_t)$ wenn analog gilt: $p_{i0}^* \geq p_{i0}$ und $p_{i0}^* > p_{i0}$ für mindestens ein i (eine Ware)
P2	***Lineare Homogenität:***[a)] $P(\mathbf{p}_0, \mu\mathbf{p}_t) = \mu P(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_t)$ mit $\mu \in R_+$ (nicht zu verwechseln mit Proportionalität: $P(\mathbf{p}_0, \mu\mathbf{p}_0) = \mu$, wobei $p_{it} = \mu p_{i0}$ für alle i)
P3	***Identität:***[b)] $P(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_t) = 1$ wenn $p_{it} = p_{i0}$ für alle i also $\mathbf{p}_t = \mathbf{p}_0$
P4	***Dimensionalität:*** $P(\mu\mathbf{p}_0, \mu\mathbf{p}_t) = P(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_t)$ mit $\mu \in R_+$ (Unabhängigkeit von der Währungseinheit der Preise)
P5	***Kommensurabilität:*** $P(L\mathbf{p}_0,\ L\mathbf{p}_t,\ L^{-1}\mathbf{q}_0,\ L^{-1}\mathbf{q}_t) = P(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_t, \mathbf{q}_0, \mathbf{q}_t)$ mit $L = \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ und $\lvert\lambda_i\rvert > 0$ (Unabhängigkeit von der Mengeneinheit, auf die sich die Preisnotierung bezieht).

a) Unter Homogenität vom Grade -1 versteht man die Forderung $P(\mu\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_t) = \mu^{-1}P(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_t)$. Sie ist erfüllt, wenn P2 und P4 gelten.

b) Axiome P2 und P3 stellen zusammen sicher, daß die sog. Proportionalitätsprobe erfüllt ist.

Anmerkung:
Das System ist konsistent (widerspruchsfrei, erfüllbar) und unabhängig (nicht-redundant). Ein schwächeres System von Eichhorn und Voeller kommt mit vier Axiomen aus: statt P3 und P5 strikte Proportionalität.

Strukturelle Konsistenz (der Deflationierung)

Gilt für nominale Teilaggregate $W = W_1 + W_2 + ... + W_m$ und soll für die realen Teilaggregate $V_j = W_j/P_j$ (j = 1, 2, ..., m) gelten $\frac{W}{P} = V = \frac{W_1}{P_1} + ... + \frac{W_m}{P_m} = V_1 + ... + V_m$, dann muß

$$P^{-1} = \sum \frac{W_j}{W} P_j^{-1}, \tag{2.9}$$

d.h. der Gesamt-Deflator P ein harmonisches Mittel der m Teil-Deflatoren sein (Gewichte $W_j/\Sigma W_j = W_j/W$), also ein direkter Paasche Preisindex. Deflationierung mit einem anderen

Index als P^P liefert strukturell inkonsistente Ergebnisse (Volumen addieren sich nicht in gleicher Weise wie Werte, das Ergebnis der Deflationierung ist abhängig vom Aggregationsgrad).

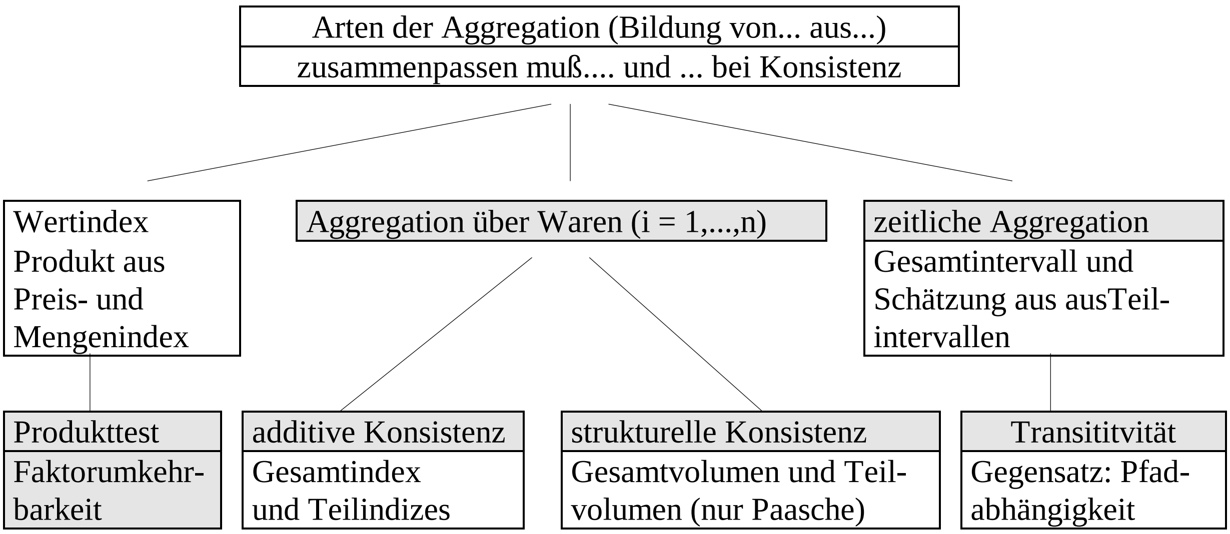
Additive Konsistenz (Konsistenz der Indexformel)

Wenn ein Gesamtaggregat zu Teilaggregaten j = 1, ... , m zerlegt werden kann, dann soll sich der Gesamtindex aus den Teilindizes in der gleichen Weise zusammensetzen, wie der Gesamtindex aus den Meßzahlen. Im Falle von P^L gilt z.B. der folgende Zusammenhang

$$(2.10) \qquad P_{0t}^{L} = \sum_j \frac{W_{j,o}}{\sum W_{j,o}} P_{j,0t}^{L}$$

d.h. der Gesamtindex P_{0t}^L ist das arithmetisches Mittel der m Teil-Indizes $P_{j,0t}^L$ mit den Wertanteilen zur Basiszeit als Gewichte (analog Gl. 2.3). Lineare (= additive) Indizes (s.u.), wie P^L oder P^P sind auch additiv konsistent. Die Umkehrung gilt nicht.

Übersicht 2.4: Konsistenzforderungen bei bestimmten Aggregationsarten



Faktorumkehrprobe (factor reversal test, F)

Die Wertsteigerung kann in das Produkt einer *nach der gleichen Indexformel* berechneten Preis- und Mengenkomponente zerlegt werden. Fisher's "Idealindex"

$$(2.11) \qquad P_{0t}^{F} = \sqrt{P_{0t}^{L} P_{0t}^{P}}$$

ist das geometrische Mittel aus der Laspeyres- und Paasche Preisindexformel (bei Mengenindizes analog Q^F als geometr. Mittel aus Q^L und Q^P). Der "Idealindex" erfüllt F (und Z, nicht aber T), denn $W_{0t} = P^F_{0t} Q^F_{0t}$.

Zeitumkehrbarkeit (time reversal test, Z)

Vertauschung von Basis- und Berichtsperiode führt zum reziproken Preisindex $P_{0t}P_{t0} = 1$.

Nicht erfüllt vom Paar Laspeyres/Pasasche, denn $P^L_{0t}P^P_{t0} = P^P_{0t}P^L_{t0} = 1$.

Zirkularität (Verkettbarkeit, Transitivität, T)

Nach dieser Forderung (auch "Rundprobe" ["circular test"]) soll für ***beliebige*** Einteilungen des Intervalls in zwei Teilintervalle [0,t) in [0,s) und [s,t) also für ***jedes*** s gelten:

(2.12) $P_{0t} = P_{0s}P_{st}$.

Das bedeutet z.B., daß das Ergebnis für ein Jahr konsistent ist mit dem, was man durch "Aggregation" der beiden Halbjahresergebnisse erhält. Die Forderung gilt entsprechend bei Einteilung in mehr als zwei Teilintervalle[6]. Wenn Identität gilt, dann folgt Z aus T (die Umkehrung gilt nicht).

Umbasierung (rescaling) **und Verkettung** (splicing)

Von Zeitumkehrbarkeit und Verkettbarkeit als Axiome sind die entsprechenden Rechenoperationen zu unterscheiden, die analog Übers. 1.3 durchgeführt werden, auch wenn sie genau genommen (fehlende Verkettbarkeit) nicht gerechtfertigt sind: Verkettung gem. Gl. 2.12, Umbasierung mit (2.12a) $P_{st} = \frac{P_{0t}}{P_{0s}}$

Additivität (= Linearität) der Indexfunktion

(als spezielle Form der Monotonie) bedeutet in der Notation der Übersicht 2.3 bei **P1**a:

$P(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_t^*) = P(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_t) + P(\mathbf{p}_0, \Delta\mathbf{p}_t^*)$ wenn für $\mathbf{p}_t^*$, $\mathbf{p}_t$ und $\Delta\mathbf{p}_t^*$ gilt: $\mathbf{p}_t^* = \mathbf{p}_t + \Delta\mathbf{p}_t^*$, und bei **P1**b

$[P(\mathbf{p}_0^*, \mathbf{p}_t)]^{-1} = [P(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_t)]^{-1} + [P(\Delta\mathbf{p}_0^*, \mathbf{p}_t)]^{-1}$ wenn entsprechend gilt: $\mathbf{p}_0^* = \mathbf{p}_0 + \Delta\mathbf{p}_0^*$.

Äquivalent ist: Indizes sind additiv, wenn sie als Quotient von Skalarprodukten $\frac{\mathbf{a}'\mathbf{p}_t}{\mathbf{b}'\mathbf{p}_0}$ darstellbar sind, wie die Preisindizes von Laspeyres (P_{0t}^L: $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{q}_0$) und Paasche ($\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{q}_t$).

2.1.3. Neuere Vorschläge für Indexformeln

Im folgenden werden einige über die traditionelle Betrachtung von Laspeyres und Paasche hinausgehende Formel-Vorschläge vorgestellt. Die Auflistung ist nicht vollständig, umfaßt jedoch vier Denkrichtungen, die (älteren) Versuche Formeln zu mitteln[7], die Betrachtung "idealer" Indizes und Indizes auf der Basis geometrischer Mittel sowie der Ansatz von Divisia.

1. Kompromißformeln (vgl. Übers. 2.5)

Es war lange üblich und vor allem in der Tradition von Irving Fisher begründet, nach neuen Indexformeln zu suchen, indem man bekannte Formeln bzw. Gewichtungsschemen mittelt.

2. Suche nach Formeln, die Faktorumkehrbarkeit erfüllen (ideale Indizes; vgl. Übers. 2.6)

Es ist eines der Rätsel der Indextheorie, warum man so viel Mühe verwendete, Formeln zu finden, die Faktorumkehrbarkeit erfüllen, andererseits aber wenig Mühe verwendete, zu begründen, warum es wünschenswert sein sollte, daß ein Preis- (P) - Mengenindex (Q) - Paar diese äußerst restriktive Forderung erfüllt. Der Idealindex von Fisher erfüllt sie, weil in der multiplikativen Zerlegung von W_{0t} (Notation von Übers. 1.5)

---

[6] Gl.2.12 wird oft dahingehend mißverstanden, daß ein als Produkt definierter Index, wie der Kettenindex "verkettbar" sei. Dabei wird jedoch vergessen, daß bei Gl. 2.12 betont werden muß "für *jedes* s" (und genau das ist bei einem Kettenindex, der stets pfadabhängig ist *nicht* der Fall).

[7] Fisher sprach von crossing und rectifying. Die Mittelungen waren auch motiviert mit der Suche nach Formeln, die reversal tests erfüllen. Insofern überschneiden sich die Denkrichtungen Nr. 1 und 2. Mit den log-change indices (Nr.3) sind auch zahlreiche Formeln "wiederentdeckt" worden.

$$W_{0t} = \frac{\mathbf{p}_t'\mathbf{q}_t}{\mathbf{p}_0'\mathbf{q}_0} = \left(\frac{\mathbf{p}_t'\mathbf{q}_0}{\mathbf{p}_0'\mathbf{q}_0}\right)\left(\frac{\mathbf{q}_t'\mathbf{p}_0}{\mathbf{q}_0'\mathbf{p}_0}\right)\left(\frac{\mathbf{p}_t'\mathbf{q}_t}{\mathbf{p}_t'\mathbf{q}_0}\,\frac{\mathbf{p}_0'\mathbf{q}_0}{\mathbf{p}_0'\mathbf{q}_t}\right) = E_P E_Q S$$

quasi jeweils die "halbe" Strukturkomponente (S) der reinen Preis- (E_P), bzw. reinen Mengenkomponente (E_Q) zugeschlagen wird, denn es gilt

$P_{0t}^F = E_P\sqrt{S} = P_{0t}^L\sqrt{S}$ und $Q_{0t}^F = E_Q\sqrt{S} = Q_{0t}^L\sqrt{S}$.

Übersicht 2.5: Einige bekannte "Kompromißformeln"

angegeben sind die Formeln für Preisindizes, die Formeln für Mengenindizes sind hieraus einfach zu entwickeln

Mittelung von	artihmetisches Mittel	geometrisches Mittel
Mengen	Marshall und Edgeworth $P_{0t}^{ME} = \frac{\sum p_{it}(q_{i0}+q_{it})}{\sum p_{i0}(q_{i0}+q_{it})}$	Walsh* $P_{0t}^{W} = \frac{\sum p_{it}\sqrt{q_{i0}q_{it}}}{\sum p_{i0}\sqrt{q_{i0}q_{it}}}$
Formeln	Drobisch $P_{0t}^{DR} = \frac{1}{2}\left(P_{0t}^L + P_{0t}^P\right)$	Fisher $P_{0t}^F = \sqrt{P_{0t}^L P_{0t}^P}$

* man könnte dies auch "Walsh-I" Index nennen, denn es gibt auch einen "Walsh-II" Index (vgl.Übers. 2.*)

Übersicht 2.6: Neuere Indexformeln, speziell "ideale" Indizes[1)]

Indexformeln auf der Basis einer Zerlegung der Wertänderung

additives Model ($\Delta W = \Delta P + \Delta Q$)

multiplikatives Model ($W_{0t} = P_{0t}\,Q_{0t}$) mit Zeitvariable t

Formeln von

Stuvel
Banerjee[2)]

diskret

stetig
Divisia Index

Funktionen von Preismeßzahlen [3)] wie z.B. die Indizes P_{0t}^L und P_{0t}^P

Funktionen von logarithmierten Preismeßzahlen (= log change indices); vgl. Übers. 2.7

z.B. Indexformel von Fisher

Vartia-I und Vartia-II

andere log-change- indices, z.B. Index von Törnqvist[4)]

1) "ideale" Indizes sind durch Schattierung hervorgehoben.
2) auf Banerjee's factorial approach soll hier nicht weiter eingegangen werden.
3) als arithmetishe oder andere Mittelwerte (log-change indices kann man als geometrische Mittel von Preismeßzahlen darstellen).
4) auch Indizes, die nicht aus einem Dekompositionsmodell hergeleitet sind, wie z.B. der Cobb-Douglas Index (der transitiv ist, vgl. Gl.2.12) oder Verfeinerungen der Törnqvist Formel um besser Faktorumkehrbarkeitzu approximieren (Formeln von Theil, Sato usw.).

Die Formeln von **Stuvel**[8] (Preisindex P^{ST} und Mengenindex Q^{ST}) lauten

(2.13) $$P_{0t}^{ST} = \frac{P_{0t}^{L} - Q_{0t}^{L}}{2} + \sqrt{\left(\frac{P_{0t}^{L} - Q_{0t}^{L}}{2}\right)^2 + W_{0t}}\ ,$$

(2.13a) $$Q_{0t}^{ST} = \frac{Q_{0t}^{L} - P_{0t}^{L}}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q_{0t}^{L} - P_{0t}^{L}}{2}\right)^2 + W_{0t}}\ .$$

3. Log-change indices

Sie beruhen auf einer Mittelung der logarithmierten Preis- bzw. Mengen- und Wertmeßzahlen. Mit der Notation $v_{it} = p_{it}q_{it}$ (für *absolute* Werte[9], v_{i0} entsprechend) und $w_{it} = v_{it}/\Sigma v_{it} = v_{it}/V_t$ für *relative* Werte (Ausgabenanteile) sowie

$Dp_{i,0t} = \ln\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right)$, und $Dq_{i,0t}$ und $Dv_{i,0t}$ entsprechend definiert, ist generell (deshalb Symbol *) ein Log-change Preis-Index aufgebaut nach dem Muster $\ln\left(P_{0t}^{*}\right) = \sum_i g_i \left(Dp_{i,0t}\right)$,

so daß $P_{0t}^{*} = \prod \left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right)^{g_i}$ mit $0 \le g_i \le 1$ und $\sum_i g_i = 1$ (Mengenindex analog). Die folgenden Spezialfälle sind relativ bekannt

Name des Index	Gewicht g	Formel[1)]
Cobb-Douglas P^{CD}	$g_i = \alpha_i$ (beliebige Konstanten, keine Ausgabenanteile)	$P_{0t}^{CD} = \prod\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right)^{\alpha_i}$
logarithmic Laspeyres $DP^{L\ 2)}$	$g_i = w_{i0}$ (Ausgabenanteile der Basisperiode)	$\ln\left(DP_{0t}^{L}\right) = \sum \ln\left(p_{it}/p_{0t}\right) w_{i0}$
logarithmic Paasche DP^{P}	$g_i = w_{it}$ (Ausgabenanteile der Berichtsperiode)	$DP_{0t}^{P} = \prod\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right)^{w_{it}}$

* in der Form ln(DP*) oder DP*
** verschiedentlich auch unter anderem Namen vorgeschlagen (z.B. von W. A. Jöhr).

Der Cobb Douglas Index ist der *einzige* Index, der Transitivität (Verkettbarkeit) und die fünf fundamentalen Axiome der Über. 2.3 erfüllt[10]. So wie Fisher's ideal index P_{0t}^{F} das geometrische Mittel der (gewöhnlichen) Laspeyres und Paasche Formel ist (also von P_{0t}^{L} und P_{0t}^{P}) ist (entsprechend Q_{0t}^{F}), so ist der Törnqvist Index (oder Törnqvist - Theil Index)

(2.14) $$P_{0t}^{T} = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right)^{\overline{w}_i} \quad \text{mit } \overline{w}_i = \tfrac{1}{2}\left(w_{i0} + w_{it}\right),\ Q_{0t}^{T} \text{ entsprechend}$$

das geometrische Mittel von DP_{0t}^{L} und DP_{0t}^{P}, also der entsprechenden log-change Indizes

[8] Sie erscheinen auch als Spezialfälle im Ansatz von Banerjee.
[9] Sie wurden oben (zur Unterscheidung von Volumen) mit W_i bezeichnet.
[10] Das ist eines der in der axiomatischen Theorie so beliebten "uniqueness theorems".

($P_{0t}^{T} = \sqrt{DP_{0t}^{L} DP_{0t}^{P}}$). Beide Indizes (Fisher und Törnqvist) spielen eine große Rolle in der "ökonomischen Theorie der Indexzahlen". Es gibt gewisse Parallelitäten, jedoch erfüllt das Paar P_{0t}^{T}, Q_{0t}^{T} nicht die Faktorumkehrbarkeit. Der Quotient $Q = W_{0t} / P_{0t}^{T}$ kann auch nicht als Mengenindex angesehen werden, denn für ln(Q) gilt wegen

$$\ln(W_{0t}) = \ln\left(\frac{V_t}{V_0}\right) = \sum\left(\ln\left(\frac{v_{it}}{v_{i0}}\right)\frac{L(w_{it}, w_{i0})}{\sum L(w_{it}, w_{i0})}\right) = \sum \ln\left(\frac{p_{it} q_{it}}{p_{i0} q_{i0}}\right) \cdot \lambda_i$$

(λ_i sind die Gewichte des Vartia-II Indexes)

(2.14a) $$\ln(Q) = \ln(W_{0t}) - \ln(P_{0t}^{T}) = \sum \ln\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right)(\lambda_i - \overline{w}_i) + \sum \ln\left(\frac{q_{it}}{q_{i0}}\right) \cdot \lambda_i,$$

so daß sich Q (wegen des ersten Summanden, der $\ln(P^{W2}) - \ln(P^{T})$ ist) verändern kann, ohne daß sich auch nur eine Menge ändert (also für alle i gelten kann $q_{it} = q_{i0}$.[11].

Es ist offensichtlich, daß für die einzelne Ware i jeweils gilt[12] $Dv_{i,0t} = Dp_{i,0t} + Dq_{i,0t}$ oder $\ln(v_{it} / v_{i0}) = \ln(p_{it} / p_{i0}) + \ln(q_{it} / q_{i0})$, daß aber die entsprechende Relation für die Gesamtheit der n Waren (i = 1,...,n)

$$\sum g_i \ln(v_{it} / v_{i0}) = \sum g_i \ln(p_{it} / p_{i0}) + \sum g_i \ln(q_{it} / q_{i0})$$

nur bei ganz bestimmten Gewichten g_i erfüllt ist. Vartia fand die Gewichte gem. Übers. 2.7 des Vartia-I Indexes (P_{0t}^{V1}) und des Vartia-II Indexes (P_{0t}^{V2}), so daß diese Indexformeln jeweils die Faktorumkehrbarkeit erfüllen. Das folgt für den Vartia-II Index auch aus Gl. 2.14a, denn es gilt $\ln(Q_{0t}^{V2}) = \sum \ln\left(\frac{q_{it}}{q_{i0}}\right) \cdot \lambda_i$ und $\ln(P_{0t}^{V2}) = \sum \ln\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right) \cdot \lambda_i$.

4. Stetige Zeitvariable (Divisia Indizes)

Wenn für alle Waren (i = 1, ... , n) zu jedem Zeitpunkt stetige (t: stetig) Preis- und Mengenfunktionen $p_i(t)$ und $q_i(t)$ gegeben[13] sind, dann ist die Wertfunktion (absoluter Wert) nach Definition

(2.15) $V(t) = \sum_{i=1}^{n} p_i(t) q_i(t)$ und damit auch

(2.16) $$\frac{dV(t)}{V(t)} = \frac{\sum_i q_i(t)\, dp_i(t)}{\sum_i q_i(t)\, p_i(t)} + \frac{\sum_i p_i(t)\, dq_i(t)}{\sum_i q_i(t)\, p_i(t)}.$$

Entsprechend kann man zum Zeitpunkt t ein absolutes Preis- und Mengenniveau P(t) und Q(t) postulieren, so daß gilt $V(t) = P(t)\, Q(t)$.[14] Es liegt nahe, die Ausdrücke $dP(t)/P(t)$ und $dQ(t)/Q(t)$ mit den beiden Summanden auf der rechten Seite von Gl. 2.16 gleichzusetzen. Somit kann der Divisia-Preisindex P_{0t}^{Div} über seine (stetige) Wachstumsrate

[11] Das bedeutet, daß der Törnqvist Index noch nicht einmal den (gegenüber der Faktorumkehrbarkeit) schwächeren Produkttest erfüllt.
[12] vgl. Übers.1.2, Faktorumkehrprobe bei Meßzahlen!
[13] Hieran scheitert meist die praktische Umsetzbarkeit des Ansatzes von Francois Divisia (1925).
[14] Man beachte, daß damit nicht Faktorumkehrbarkeit "angenommen" wird oder sich als besondere Leistung dieses Ansatzes herausstellt, sondern einfach folgt aus Gl. 2.1 für infinitesimal kleine Zeitintervalle von t bis t + dt. Ist das Intervall hinreichend klein, dann gibt es einfach keinen Platz für eine Strukturkomponente neben der reinen Preis- und Mengenkomponente.

(2.17) $$\frac{dP(t)/dt}{P(t)} = \frac{d\ \ln\ P(t)}{dt} = \sum_i \left(\frac{q_i(t)p_i(t)}{\sum q_i(t)p_i(t)} \right) \frac{dp_i(t)/dt}{p_i(t)}$$

definiert werden (der Mengenindex Q_{0t}^{Div} entsprechend). Der eingeklammerte Ausdruck auf der rechten Seite von Gl. 2.17 ist der Ausgabenanteil $w_i(t)$ der Ware i im Zeitpunkt t. Die Wachstumsrate von P(t) ist also ein gewogenes Mittel der Wachstumsraten der $p_i(t)$.[15] Der Preisindex $P_{0t}^{Div} = \frac{P(t)}{P(0)}$ ergibt sich dann durch Integration

(2.18) $$P(t) = P(0) \exp\left(\int_0^t \sum w_i(\tau) \frac{d \ln p_i(\tau)}{d\tau} d\tau \right).$$

Übersicht 2.7: Wägungsschemen bei einigen log-change Indizes

Log change index allgemein
$\ln\left(P_{0t}^*\right) = \sum_i g_i\left(Dp_{i,0t}\right)$

Gewichte g_i auf der Basis (von Funktionen) absoluter Werte (z.B. Ausgaben) v_i		Gewichte g_i auf der Basis relativer Werte (Ausgabenanteile) w_i [2]	
mit nicht normiertern Gewichten[1]	mit normiertern Gewichten $\Sigma g_i = 1$	arithmetisches Mittel’	logarithmisches Mittel[3]
Walsh - Vartia	Walsh II	Törnqvist	Vartia II
$\frac{\sqrt{v_{i0}v_{it}}}{\sqrt{(\sum v_{i0})(\sum v_{it})}}$	$\frac{\sqrt{v_{i0}v_{it}}}{\sum \sqrt{v_{i0}v_{it}}}$	P_{0t}^T (Gl. 2.14)	$\frac{L\left(w_{i0}, w_{it}\right)}{\sum L\left(w_{i0}, w_{it}\right)}$
Vartia I	Theil		
$\frac{L\left(v_{i0}, v_{it}\right)}{L\left(\sum v_{i0}, \sum v_{it}\right)}$	$\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}(v_{i0}+v_{it})v_{i0}v_{it}}}{\sum \sqrt[3]{\frac{1}{2}(v_{i0}+v_{it})v_{i0}v_{it}}}$		

1) im allgemeinen gilt $\sum_i L\left(v_{i0}, v_{it}\right) \neq L\left(\sum v_{i0}, \sum v_{it}\right)$ und $\sum_i \sqrt{v_{i0}v_{it}} \neq \sqrt{\sum v_{i0} \cdot \sum v_{it}}$, so daß sich die Gewichte nicht zu 1 addieren.
2) zu nenen wäre auch die wenig bekannte Formel von Rao mit relativierten *harmonischen* Mitteln als Gewichte $g_i = w_{i0}w_{it}(w_{i0}+w_{it}) / \sum w_{i0}w_{it}(w_{i0}+w_{it})$.
3) es gilt $\sqrt{w_0 w_t} \leq L(w_0, w_t) \leq \frac{1}{2}\left(w_0 + w_t\right) = \overline{w}$.

---

und Q_{0t}^{Div} entsprechend. Das Problem ist, daß das Integral in Gl.2.18 (entprechend bei Q(t) zur Bestimmung von $Q_{0t}^{Div} = Q(t)/Q(0)$) im Unterschied zu dem von V(t) bei Bestimmung

---

[15] Es hat sich eingebürgert, eine Größe G immer dann "Divisia" zu nennen (z.B. eine "Divisia Geldmenge"), wenn die Wachstumsrate von G als gewogenes Mittel definiert ist.

$W_{0t} = V(t)/V(0)$ pfadabhängig[16] ist und daß es für die in der Praxis stets notwendige Approximation bei diskreter Zeit sehr unterschiedliche Möglichkeiten gibt. Es scheint, daß auch im Falle des Divisia "Integralindex" (wie so oft in der Indextheorie) ein Ansatz gerne maßlos überschätzt wird.

Ähnlich wie bei Kettenindizes wird ein Zwei-Perioden-Vergleich für die Eckpunkte eines Intervalls von 0 bis t bei Divisia gewonnen durch Betrachtung des Prozesses in den Zwischenzeitpunkten τ mit $0 \le \tau \le t$. Bei genügend kleinen Intervallen (oder Preisbewegungen) sind die Unterschiede zwischen Indizes auf der Basis von

Preismeßzahlen $\frac{p_{it}}{p_{i0}}$, log changes $\ln\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right) \approx \frac{p_{it}}{p_{i0}} - 1$ und Preisdifferentialen $\frac{d \ln p_i(\tau)}{d\tau}$

trotz unterschiedlicher konzeptioneller Grundlagen gering. Liegen aber 0 und t weiter auseinander, kann es erhebliche Unterschiede geben.

2.2 Kettenindizes

Die Standardkritik am direkten Preisindex nach Laspeyres P_{0t}^{L} (als Maß der Inflation) bzw. an Volumen, die man als Ergebnis einer Deflationierung mit einem (direkten) Paasche Preisindex erhält, ist, daß in P_{0t}^{L} die Mengen, bzw. in P_{0t}^{P} die Preise (allgemein die Gewichte) für eine gewisse Zeit (im Interesse des reinen Preisvergleichs) konstant gehalten werden und daß das Wägungsschema veraltet. Es müsse statt dessen jeweils mit möglichst aktuellen ("relevanten", "repräsentativen") Gewichten gerechnet werden. Nicht viel mehr als dies steckt hinter der in neuerer Zeit vehement wiederbelebten Forderung nach Kettenindizes[17].

Die Definition eines Kettenindexes umfaßt stets **zwei** Elemente (Übers. 2.8),

- die **Kette** $\overline{P}_{0t}^{C}$ (C = chain), das konstante Element: Zwei-Periodenvergleich (zwischen 0 und t) indirekt als Produkt $P_{0t} = P_{01}P_{12}....P_{t-1,t}$.(analog zur Verkettung)
- (das variable Element) das **Kettenglied** $P_{t}^{C} = P_{t-1,t}$ (link), das je nach verwendeter Indexformel unterschiedlich ist, z.B. nach Laspeyres, Paasche usw. (Übers. 2.8)

Befürworter von Kettenindizes vergleichen meist P_{t}^{C} (statt $\overline{P}_{0t}^{C}$) mit P_{0t}. Dem Vorteil, daß $\overline{P}_{0t}^{LC}$ (auch) von den aktuelleren Mengen q_{t-1} abhängt, nicht nur von den "veralteten" Mengen q_0 wie in P_{0t} stehen folgende gravierende **Nachteile** gegenüber:

1. Kettenindizes erlauben keine **Interpretation** im Sinne des reinen Preisvergleichs, als Meßzahlenmittelwert oder als Verhältnis von Aggregaten. Axiome sind auf sie nicht anwendbar: Trotz gleicher Preise in Periode 0 und 2 muß nicht gelten $P_{02} = 1$ (Identität verletzt, ebenso können Monotonie und andere Axiome von Übers. 2.3 verletzt sein).
2. Verkettung als Form der zeitlichen Aggregation ist **pfadabhängig**: ein Kettenindex ist kein Zwei-Perioden-Vergleich, sondern ein summarisches Maß für die Gestalt einer Zeitreihe (für einen **Verlauf**). Das Ergebnis für das Intervall von 0 bis t ist i.d.R. unterschiedlich, je nach dem, wie es in Teilintervalle zerlegt wird und wie sich Preise und Mengen in den Zwischenperioden 1,...,t-1 entwickeln. Bei zyklischer Bewegung der Preise (der Verlauf

[16] Eine ähnliche Erscheinung gibt es bei Kettenindizes, zu deren Rechtfertigung gerne (zu unrecht) auf den Divisia Index verwiesen wird.

[17] Sie sind (leider) in internationalen Empfehlungen für die Verwendung in der amtlichen Statistik vorgeschrieben worden.

zwischen 0 und t wiederholt sich) kann die Kette für Periode 2t, 3t, ... im Wert ständig zunehmen (wenn der Index $\overline{P}_{0t} > 1$ ist, denn dann ist $\overline{P}_{0,2t} = \left(\overline{P}_{0t}\right)^2 > \overline{P}_{0t}$) oder abnehmen (wenn $\overline{P}_{0t} < 1$), selbst dann wenn die Preise in 0, t, 2t,... alle gleich sind.

Übersicht 2.8: Definition von Kettenindizes

Kettenindex

Definition der **Kettenglieder** (links)	Verkettung zur **Kette**
$P_t^C = P_{t-1,t}$ ein Index (genügt Axiomen)	$\overline{P}_{0t}^C = P_1^C \, P_2^C \ldots P_t^C$ kein Index[1)]
Beispiele: Laspeyres $P_t^{LC} = \dfrac{\sum p_t q_{t-1}}{\sum p_{t-1} q_{t-1}}$, Paasche $P_t^{PC} = \dfrac{\sum p_t q_t}{\sum p_{t-1} q_t}$	Beispiele: $\overline{P}_{0t}^{LC} = P_1^{LC} P_2^{LC} \ldots P_t^{LC}$ $\overline{P}_{0t}^{PC} = P_1^{PC} P_2^{PC} \ldots P_t^{PC}$
ein Warenkorb q_{t-1} bzw. q_t [2)]	**viele** Warenkörbe q_0, q_1,...

1) d.h. diese Größe muß nicht (und wird i.d.R. auch nicht) Axiome (z.B. im Sinne von Übers. 2.3) erfüllen, selbst wenn das einzelne Kettenglied dies tut.
2) bei unterjährigem Vergleich zum Vorjahr (ein Monat verglichen mit dem gleichem Monat im Vorjahr) wird jedoch schon beim einzelnen Kettenglied mit **zwei** Warenkörben gerechnet.

3. Ungünstige Aggregationseigenschaften: keine **additive** - und (bei Deflationierung) **strukturelle Konsistenz**.Volumen V_t nicht nur abhängig von q_t und p_0, sondern auch von allen Preisen p_1, ..., p_t., so daß man kaum von "in *konstanten*" Preisen p_0 sprechen kann.
4. Erheblicher **Mehraufwand** für Datenbeschaffung (häufigere Feststellung des Wägungsschemas [der Warenkörbe], der i.d.R. ohnehin aufwendigere Teil der Indexberechnung).

Es werden trotz dieser Nachteile weiter vehement Kettenindizes gefordert, offenbar deshalb, weil vielen an Indexformeln nichts auch nur annähernd so wichtig zu sein scheint, wie die Aktualität der Gewichte.