Spurious Inflation und

Spurious Growth

(Scheininflation und Scheinwachstum)

Anmerkungen zu einem Aufsatz von Ludwig von Auer:
"Spurious Inflation: The Legacy of Laspeyres and others" ,in:
Quarterly Review of Economic and Finance, 42 (2002), pp. 529-542.

Gliederung

- **Permutations- und Inversionstest**
- **Mit der Preisbewegung korrespondierende Mengenbewegung**
- **Inversionstest und andere Tests**
  - Kettenindizes und unkorrelierte Preis- und Mengenbewegung
  - Time Reversal Test (TRT, Zeitumkehrbarkeit)
  - Quantity Reversal Test (QRT,Symmetrie bzgl. der Mengen)
- **Abschließende Bemerkungen, Ketten-indizes**

Tabelle 1: Erste zirkuläre Permutation (in einem Dreiwarenszenario)
Permutationstest (PT) zweite zirkuläre P. ist Tab. 3

Ware	p_{i0}	q_{i0}	$p_{i0}q_{i0}$	p_{it}	q_{it}	$p_{it}\, q_{it}$
1	**6**	**6**	**36**	**6**	**2**	**12**
2	**6**	**2**	**12**	**3**	**4**	**12**
3	**3**	**4**	**12**	**6**	**6**	**36**

Waren werden wie folgt getauscht : 1 $\rightarrow$ 3, 2 $\rightarrow$ 1, 3 $\rightarrow$ 2
Es gilt $V_{00} = \Sigma p_0 q_0 = V_{tt} = \Sigma p_t q_t = 36 + 24 = 60$

Aber $V_{t0} = \Sigma p_t q_0 = 66$ und $V_{0t} = \Sigma p_0 q_t = 54 \Rightarrow$
Laspeyres 66/60 = 1,10   und Paasche 60/54 = 1,111

1.2. Swap Permuation, Inversionstest (IT)

"there is no logical reason to claim that a change in the average price level has occured" (v.A.)
"measurement bias"

Tabelle 2: Swap Permutation (in einem Dreiwarenszenario)
Inversionstest (PT) 1 = 1, 2 > 3, 3 > 2 Vertauschung paarweise (simple swap)

Ware	p_{i0}	q_{i0}	$p_{i0}q_{i0}$	p_{it}	q_{it}	$p_{it}\ q_{it}$
1	**6**	**6**	**36**	**6**	**6**	**36**
2	**6**	**2**	**12**	**3**	**4**	**12**
3	**3**	**4**	**12**	**6**	**2**	**12**

Jetzt P^L wie bisher (Tab. 1; es hat sich auch nur q_t geändert) und
$P^P = 1/P^L = 1/1{,}1 = 0{,}909$, so dass $P^F = 1$

1.3. Folgerungen aus dem Inversionstest (IT)

Es gilt für das Paar j, k (j $\rightarrow$ k und k $\rightarrow$ j)

$p_{j0} = p_{kt}$, $q_{j0} = q_{kt}$ und $p_{k0} = p_{jt}$, $q_{k0} = q_{jt}$

und für das gleichbleibende Gut m
(bzw. für die gleichbleibenden Güter)

$p_{m0} = q_{mt,}\ q_{m0} = q_{mt}$, also $p_{m0}\, q_{m0} = p_{mt}\, q_{mt} = p_{m0}\, q_{mt} = p_{mt} q_{m0} = R$

<u>Daraus läßt sich folgern (schon bei v.A.)</u>

1. $V_{tt} = V_{00}$ und $V_{t0} = V_{0t}$ und damit $\mathbf{P^P = 1/P^L}$ und wegen

$$p_{kt}\sqrt{q_{k0}q_{kt}} + p_{jt}\sqrt{q_{j0}q_{jt}} = p_{j0}\sqrt{q_{j0}q_{jt}} + p_{k0}\sqrt{q_{k0}q_{kt}}$$

2. IT wird erfüllt von **Fisher**, **Marshall-Edgeworth**, **Törnquist** **Walsh** und beide **Vartia** Indizes

1.4. keine Scheininflation mit P^L wenn ...

Und weiter

3. Nichttrivialer Fall von $P^L = 1$ wenn $q_{j0}=q_{k0}$, damit auch $q_{kt}=q_{jt}$ (also auch $P^P = 1$) dann auch $P^D = 1$ (Dutot average prices);

Daraus folgt: IT macht Sinn wenn

- **Mengen spielen keine Rolle!**
- **Wenn aber Mengen unterschiedlich sind oder sich ändern, kann man nicht von Ausgaben auf das Preisniveau schließen**

\# **Sind P^L und P^P mit Recht nicht 1 ?**
Weil sich die Mengen verändert haben
(Q^P und Q^L sind nicht 1) quantity movement **not** spurious

Laspeyres und Paasche zeigen bei Tab. 2 (IT) mit Recht eine Mengenbewegung an

Ware	p_{i0}	q_{i0}	$p_{i0}q_{i0}$	p_{it}	q_{it}	$p_{it}\, q_{it}$
1	**6**	**6**	**36**	**6**	**6**	**36**
2	**6**	**2**	**12**	**3**	**4**	**12**
3	**3**	**4**	**12**	**6**	**2**	**12**

$$Q^L_{0t} = 66/60 = 1{,}1 = 1/P^P_{0t} = P^L_{0t}$$

$$Q^P_{0t} = 60/66 = 0{,}909 = 1/P^L_{0t} = P^P_{0t}$$

$$Q^F_{0t} = 1$$

$$\boxed{P^L > P^P}$$

Ware	q_{it}	q_{i0}	p_{i0}	p_{it}	$d_i = q_{it} - q_{i0}$	$d_i\, p_{i0}$	$d_i\, p_{it}$
1	**6**	**6**	**6**	**6**	**0**	**0**	**0**
2	**4**	**2**	**6**	**3**	**+ 2**	**+ 12**	**+ 6**
3	**2**	**4**	**3**	**6**	**- 2**	**- 6**	**-12**
Summe						**+ 6**	**- 6**

$$Q^L_{0t} = \frac{+6}{\sum q_0 p_0} + 1 = 1{,}1$$

$$Q^P_{0t} = \frac{-6}{\sum q_0 p_t} + 1 = 0{,}909$$

$\Sigma q_0 p_0 = 60$ und $\Sigma q_0 p_t = 66$

2.2. Spiegelbildliche Mengenbewegungen (beim IT)

- **Gleiche Mengenänderungen beim IT sollten nicht gleich "gezählt" werden**
  - **+ 2** bei Ware 2 und **– 2** bei Ware 3 kann man nicht gegeneinander aufrechnen
  - Mengen immer nur über Preise aggregierbar
  - Alternative p_0 ($p_{20} = 2p_{30}$ also $P^L = 1{,}1 > 1$) oder p_t ($p_{2t} = p_{3t}/2$ also $P^P = 0{,}909 < 1$)
  - Gründe für Bevorzugung von p_0 (Laspeyres)

- **Anders beim Permutationstest (Tab. 1) Mengenänderungen wie immer "bewertet" sind dann eindeutig negativ (positiv)**

2.3. Eindeutige Mengenbewegung **beim PT**

- **Laspeyres und Paasche zeigen bei Tab. 1 (PT) mit noch mehr Recht eine Mengenbewegung an**

Ware	q_{it}	q_{i0}	p_{i0}	p_{it}	$d_i = q_{it} - q_{i0}$	$d_i\, p_{i0}$	$d_i\, p_{it}$
1	**2**	**6**	**6**	**6**	**- 4**	**- 24**	**- 24**
2	**4**	**2**	**6**	**3**	**+ 2**	**+ 12**	**+ 6**
3	**6**	**4**	**3**	**6**	**+ 2**	**+ 6**	**+12**
Summe						**- 6**	**- 6**

$$Q_{0t}^{L} = \frac{-6}{\sum q_0 p_0} + 1 = 0{,}9$$

$$Q_{0t}^{P} = \frac{-6}{\sum q_0 p_t} + 1 = 0{,}909$$

Auch hier ist $\Sigma q_0 p_0 = 60$ und $\Sigma q_0 p_t = 66$

bei T**ab. 1 (PT)** liegt **eindeutig** eine Abnahme der Mengen vor

$$Q_{0t}^{L} = 54/60 = 0{,}9 = 1/P_{0t}^{P} \neq P_{0t}^{L} = 66/60 = 1{,}1$$

$$Q_{0t}^{P} = 60/66 = 0{,}909 = 1/P_{0t}^{L} \neq P_{0t}^{P} = 60/54 = 1{,}11$$

$$Q_{0t}^{F} = \sqrt{0{,}9} = 0{,}949 = \frac{1}{P_{0t}^{F}}$$

$$\boxed{P^{L} < P^{P}}$$

2.4. Interpretation der Mengenindizes (Tab.1: PT, Tab.2: IT)

Tab. 1 (erste zirkuläre Permutation)

Ware	$d_i = q_{it} - q_{i0}$	$d_i\, p_{i0}$	$d_i\, p_{it}$
1	**- 4**	**- 24**	**- 24**
2	**+ 2**	**+ 12**	**+ 6**
3	**+ 2**	**+ 6**	**+12**
Summe		**- 6**	**- 6**

$Q^L_{0t} = 0{,}9$ $\quad Q^P_{0t} = 0{,}909$

$Q^L < Q^P$ also auch $P^L < P^P$

Eindeutige Mengen-bewegung

auch bei der zweiten zirkulären Permutation

Tab. 2 (einfache Vertauschung)

Ware	$d_i = q_{it} - q_{i0}$	$d_i\, p_{i0}$	$d_i\, p_{it}$
1	**0**	**0**	**0**
2	**+ 2**	**+ 12**	**+ 6**
3	**- 2**	**- 6**	**- 12**
Summe		**+ 6**	**- 6**

$Q^L_{0t} = 1{,}1$ $\quad Q^P_{0t} = 0{,}909$

$Q^L > Q^P$ also auch $P^L > P^P$

keine eindeutige Mengenbewegung

2.5. Die zweite zirkuläre Permutation

Tabelle 3: Zweite zirkuläre Permutation 1→2, 2 →3, 3 →1

erste Permutation 1→2, 2 →3, 3 →1

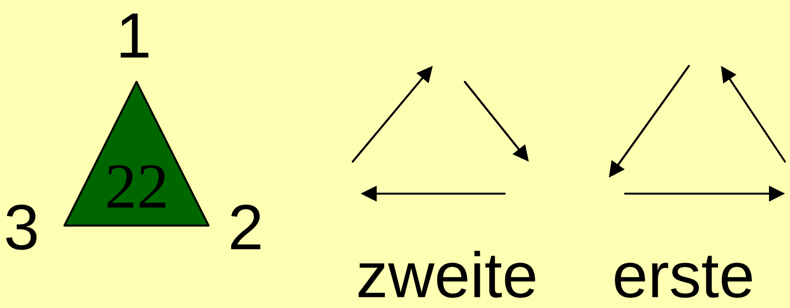


Tabelle 3

Ware	p_{i0}	q_{i0}	p_{it}	q_{it}
1	**6**	**6**	**3**	**4**
2	**6**	**2**	**6**	**6**
3	**3**	**4**	**6**	**2**

C =Kovarianz: nächste Seite

Permu-tation	P^L	P^P	Q^L	Q^P	C	Menge verändert sich eindeutig
erste	**1,1**	**1,11**	**0,9**	**0,91**	**+0,01**	**steigend**
zweite	**0,9**	**0,91**	**1,1**	**1,11**	**+0,01**	**sinkend**

\# **Preis- und Mengenbewegungen sind korreliert**
Formel von v. Bortkiewicz

$$C = \sum \left(r_i - P_{0t}^L\right)\left(m_i - Q_{0t}^L\right)w_i = V_{0t} - P_{0t}^L Q_{0t}^L$$

Angewendet auf die Beispiele von Tab. 1 (P) und 2 (IT)

1	$P^L = 66/60 = 1{,}1$ $Q^L = 54/60 = 0{,}9$	$P^P = 60/54 = 1{,}11$ $Q^P = 60/66 = 0{,}91$	$C = 1-0{,}99 = +\ 0{,}01$	$\mathbf{P^L < P^P}$
2	$P^L = 66/60 = 1{,}1$ $Q^L = 66/60 = 1{,}1$	$P^P = 60/66 = 0{,}91$ $Q^P = 60/66 = 0{,}91$	$C = 1-(1{,}1)^2 = -\ 0{,}21$	$\mathbf{P^L > P^P}$

\# **Interessanter Fall: IT wenn sich die Vertauschungen inner-halb zweier Paare neutralisieren 2 ↔ 3 und 4 ↔ 5 so dass C = 0**

- **Preis- und Mengenmeßzahlen beim IT**
  auch diese werden einfach vertauscht $r_2 = m_3$, $r_3 = m_2$

	Beim IT		Dagegen beim PT			
	Tab. 2		Tab. 1		Tab. 3	
Ware	r_i	m_i	r_i	m_i	r_i	m_i
1	**1**	**1**	**1**	**1/3**	**1/2**	**2/3**
2	**1/2**	**2**	**1/2**	**2**	**1**	**3**
3	**2**	**1/2**	**2**	**3/2**	**2**	**1/2**

Neutralisierung bei IT

$$(r_2)^{a_2}(r_3)^{a_3} = 1$$

$$r_2 b_2 + r_3 b_3 = 0$$

- **Konsequenz:**
  IT erfüllt bei a- und b-Gewichten als bestimmte Funktionen von v_{00} und v_{tt}
  - Daher IT erfüllt bei Törnquist und Walsh (Walsh I)

Rückgängig gemachte Inversion

Situation 2 = Situation 0 $\rightarrow$ $P^L \neq 1$ "a nonsensical result"

Zyklische Bewegung bei Unkorreliertheit C = 0

$$P_{01}^{L} = P_{01}^{P} = P_{12}^{L} = P_{12}^{P} = 1$$

Ware	p_{i0}	q_{i0}	p_{i1}	q_{i1}	p_{i2}	q_{i2}	von 0 zu 1		von 1 zu 2	
							r_i	m_i	r_i	m_i
1	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**1**	**1**	**1**	**1**
2	**6**	**2**	**3**	**4**	**6**	**2**	**1/2**	**2**	**2**	**1/2**
3	**3**	**4**	**6**	**2**	**3**	**4**	**2**	**1/2**	**1/2**	**2**
4	**9**	**10**	**6**	**8**	**9**	**10**	**2/3**	**4/5**	**3/2**	**5/4**
5	**6**	**8**	**9**	**10**	**6**	**8**	**3/2**	**5/4**	**2/3**	**4/5**

IT und Time Reversal Test (TR) schon bei v.A.

	IT +	IT -
TR +	P^F	P^{CD}
TR -	P^A	P^L, P^P

Notation $v_{rs} = p_r q_s$, $V_{rs} = \Sigma v_{rs}$

$$P_{0t}^{A} = \frac{1}{2}\left(\frac{V_{tt}}{V_{00}} + \frac{V_{t0}}{V_{0t}}\right) = 1$$

CD = Cobb-Douglas

Bei IT stets $V_{tt} = V_{00}$ (schon bei PT) und $V_{0t} = V_{t0}$

IT und Quantity Reversal Test (QR)

$P(\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_t,\mathbf{q}_t) = P(\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_t,\mathbf{p}_t,\mathbf{q}_0)$

Invarianz gegenüber Vertauschung von q_0 und q_t; Symmetrie bzgl. der Mengen

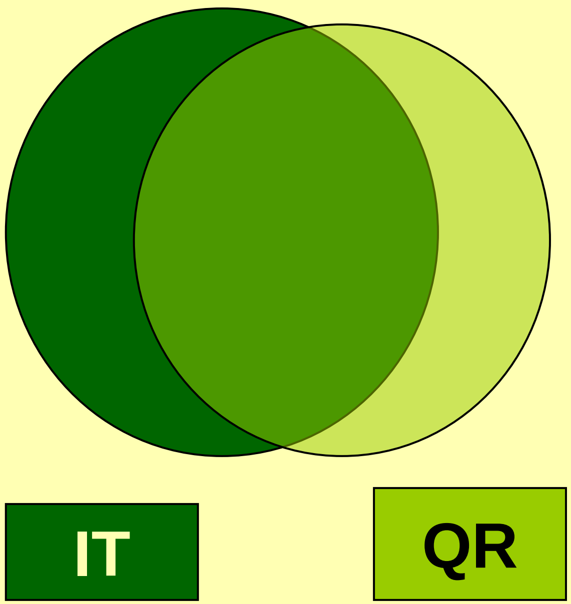
QR immer erfüllt* wenn Index symmetrisch ist in $v_{00} = p_0 q_0$ und $v_{0t} = p_0 q_t$ (Vektoren $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{v}_t$) also gilt: $P(\mathbf{v}_t,\mathbf{r},\mathbf{v}_0) = P(\mathbf{v}_0,\mathbf{r},\mathbf{v}_r)$ (Beispiel Walsh 1) $\rightarrow$

* Wenn Kommensurabilität erfüllt

3.3. Symmetriebedingungen für IT undQR

Index ist symmetrisch in	Beispiel
IT: v_{00} und v_{tt}, $v_{0t} = p_0q_t$ und $v_{t0}= p_tq_0$ aber nicht QR	Törnquist $\ln\left(P_{0t}^{T}\right) = \ln r_i \left(\frac{v_{00}}{V_{00}} + \frac{v_{tt}}{V_{tt}}\right) \Big/ 2 = \ln r_i \left(\frac{v_{00}}{V_{00}} + \frac{r_i v_{0t}}{V_{tt}}\right) \Big/ 2$
QR: $v_{00} = p_0q_0$ und $v_{0t}= p_0q_t$ aber nicht IT	Quadrat. Mittel $P_{0t}^{QM} = \sqrt{\sum r_i \frac{v_{00} + v_{0t}}{V_{00} + V_{0t}}}$
beides	Walsh 1 $P_{0t}^{W1} = \frac{\sum p_t \sqrt{q_0 q_t}}{\sum p_0 \sqrt{q_0 q_t}} = \frac{\sum \sqrt{v_{t0} v_{tt}}}{\sum \sqrt{v_{00} v_{0t}}} \frac{\sum r_i \sqrt{v_{00} v_{0t}}}{\sum \sqrt{v_{00} v_{0t}}}$

3.4. Quantity Reversal Test (QR) und IT sind unabhängig



	IT +	IT -
QR+	P^{F}, P^{ME}, P^{W1}, P^{W2}, P^{A} (Folie 15)	P^{QM} (vgl. Folie 16)
QR-	P^{WV}, P^{T}, P^{V1}, P^{V2}, P^{ST}, P^{BA}, P^{TH}	P^{L}, P^{P}

F	Fisher	T	Törnquist	L	Laspeyres
ME	Marshall Edgeworth	V1/2	Vartia 1, Vartia 2	P	Paasche
W1/2	Walsh 1, Walsh 2	ST	Stuvel	QM	Quadrat. Mittel
WV	Walsh-Vartia	BA	Banerjee		

4. Schlußbemerkung

Inversionstest (IT)	Folgerung
wird erfüllt von vielen Formeln	viele sehr verschiedene IT(+) zeichnet einen Index wenig aus
korrespondierende Mengenbewegung	wird ignoriert; ist dann IT(-) ein spurious growth??
Unabhängigkeit von (Beziehung zu?)	symmetrische Behandlung von Mengen q_0 und q_t, Reversal Tests
Inversion inhaltlich kaum motiviert	schwer zu sagen inwiefern IT(-) ein Nachteil und IT(+) ein Vorteil

Danke für die Aufmerksamkeit