

Beispiele für Aufgaben in der Ökonometrieklausur in Duisburg

Die Aufgaben sind (z.T. modifizierte) tatsächlich gestellte Aufgaben unterschiedlichen Schwierigkeitsgrads und daher auch mit unterschiedlicher Punktzahl

Aufgabe 1

In einem Modell wird die Aktienrendite y_t wie folgt mit der Rendite des Marktportfolios x_t ($t = 1, \dots, T$) erklärt

$$y_t = \alpha + \beta_1 x_t + u_t$$

und mit $T = 100$ Monatswerten mit folgenden Resultaten geschätzt:

$$\bar{y} = 0.2, \quad \bar{x} = 0.1, \quad \sum_{t=1}^T x_t y_t = 4, \quad \sum_{t=1}^T x_t^2 = 2, \quad \sum_{t=1}^T y_t^2 = 10,$$

wobei \bar{x} und \bar{y} die Mittelwerte der Variablen bezeichnen. Die Renditen sind in Dezimalzahlen gemessen (d.h. $0.1 = 10$ Prozent).

- Bestimmen Sie die KQ-Schätzer¹ für α und β .
- Der Korrelationskoeffizient zwischen x_t und y_t beträgt 0.8165. Berechnen Sie das Bestimmtheitsmaß R^2 und interpretieren Sie dieses. Welchen Wert hat R^2 , wenn die Werte der beiden Variablen x_t und y_t in allen Perioden verdoppelt werden?
- Schätzen Sie die Varianz der Störgröße. Welche Eigenschaften besitzt die von Ihnen verwendete Schätzfunktion?

Aufgabe 2

(setzt matrixalgebraische Behandlung voraus, die nicht in jedem Semester gelehrt wird)
Gegeben seien die folgenden Daten:

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 8 & 36 & 16 \\ 36 & 204 & 80 \\ 16 & 80 & 40 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \begin{pmatrix} 0.809 & -0.074 & -0.176 \\ -0.074 & 0.029 & -0.029 \\ -0.176 & -0.029 & 0.154 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}'\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 45 \\ 227 \\ 101 \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie die KQ-Schätzer für α , β_1 und β_2 .
- Berechnen Sie die Varianz-Kovarianz-Matrix. Die Summe der quadrierten Residuen sei gegeben mit $\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}} = 3.39$.

Aufgabe 3

Im linearen Regressionsmodell $y_t = \alpha + \beta_1 x_t + u_t$ liegt Autokorrelation 1. Ordnung vor, d.h. es gilt $u_t = \rho u_{t-1} + e_t$.

- Welche Annahmen treffen Sie über den Störterm e_t ?
- Schätzen Sie ρ mit Hilfe der KQ-Methode und interpretieren Sie das Ergebnis. Nutzen

Sie die folgenden Angaben: $\sum_{t=2}^T \hat{u}_t \hat{u}_{t-1} = 21.6$, $\sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2 = 40$, $\hat{u}_T^2 = 4$, $\hat{u}_1^2 = 4$.

- Wie kann man das Modell schätzen, wenn ρ unbekannt ist. Nennen Sie kurz zwei Verfahren.

¹ Methode der Kleinsten Quadrate (KQ) auch als LS bzw. OLS (ordinary least squares) abgekürzt.

- d) Erläutern Sie kurz das Prinzip des Durbin-Watson-Tests auf positive Autokorrelation. Wie ändert sich die Teststatistik, wenn Sie auf negative Autokorrelation testen?

Aufgabe 4

Richtig (R) oder Falsch (F)? Bitte übertragen Sie Ihre Ergebnisse auf Ihr Lösungspapier.

1	Beim Bestimmtheitsmaß und dem Korrelationskoeffizienten werden x und y als Zufallsvariablen aufgefasst.	
2	Der F-Test auf Gesamtsignifikanz eines Modells prüft, ob der R^2 Wert signifikant von Null verschieden ist.	
3	Die Prüfgröße $(\hat{\beta} - \beta_0) / \sigma_{\hat{\beta}}$ ist normalverteilt.	
4	Die Kovarianz zwischen α und β bei der Einfachregression ist positiv.	
5	Die Varianz des Prognosefehlers im einfachen Regressionsmodell ist am Mittelwert der erklärenden Variablen am geringsten.	
6	Der geschätzte Steigungsparameter im einfachen linearen Regressionsmodell ist unabhängig von der gewählten Skalierung der erklärenden Variablen.	
7	Zur Bestimmung der KQ-Schätzer ist die Annahme normalverteilter Störgrößen nicht erforderlich.	
8	Das Konfidenzintervall $\text{Konf}(\hat{\beta} - t_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{\beta}} \leq \beta \leq \hat{\beta} + t_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{\beta}}) = 0.95$ bedeutet, dass der wahre Parameter β mit 95% Wahrscheinlichkeit in das aufgrund der Stichprobe aufgestellt Intervall fällt.	
9	Bei der Varianzzerlegung wird die Gesamtvarianz in die erklärte Varianz und die Varianz der Störgröße zerlegt.	
10	Ausgelassene relevante Variablen führen zu verzerrten KQ-Schätzern, wenn Sie mit den eingeschlossenen Variablen korreliert sind.	

Aufgabe 5

Gegeben sei der folgende EViews-Output :

Dependent Variable: Y
 Method: Least Squares
 Date: 07/04/05 Time: 10:45
 Sample: 1 33
 Included observations: 33

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	102192.4	12799.83	7.983891	0.0000
N	-9074.674	2052.674	-4.420904	0.0001
P	0.354668	0.072681	4.879810	0.0000
I	1.287923	0.543294	2.370584	0.0246
R-squared	0.618154	Mean dependent var		125634.6
Adjusted R-squared	0.578653	S.D. dependent var		22404.09
S.E. of regression	14542.78	Akaike info criterion		22.12079
Sum squared resid	6.13E+09	Schwarz criterion		22.30218
Log likelihood	-360.9930	F-statistic		
Durbin-Watson stat	1.758193	Prob(F-statistic)		0.000003

Dabei seien die Variablen definiert als:

Y = Verkaufsvolumen eines Woody- Restaurants'

N = Anzahl direkter Konkurrenten in einem 2- Meilen Radius eines Woody- Restaurants'

P = Anzahl der Einwohner in einem 3- Meilen Radius eines Woody-Restaurants'

I = Durchschnittliches Haushaltseinkommen der Einwohner (Variable P)

- Schreiben Sie das Modell auf und fügen Sie jeder exogenen Variablen das erwartete Vorzeichen hinzu! Begründen Sie kurz Ihre Mutmaßungen über die „richtigen“ Vorzeichen!
- Berechnen Sie den fehlenden Wert für die F-Statistik und interpretieren Sie diese kurz. *Hinweis:* Die F-Statistik berechnet sich aus $\frac{ESS/K}{RSS/(T-K-1)}$.
- Geben Sie ein 90% Konfidenzintervall für β_P an.

ESS = explained sum of squares = $S_{\hat{y}\hat{y}}$ und RSS = residual sum of squares = $S_{\hat{u}\hat{u}}$

Aufgabe 6

In einem Aufsatz über ein multiregionales Modell der chinesischen Volkswirtschaft² findet man folgende Angaben zu einer Regressionsgleichung

$$y = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \gamma_1 z_1 + \gamma_2 z_2 + \dots$$

(die Variablen z_1, z_2, \dots sind Dummies [0-1-Variablen]), y ist die (logarithmierte) staatliche Investition, x_1 und x_2 sind die (logarithmierten) Variablen GDP (Bruttoinlandsprodukt) und Beschäftigung. Die Ergebnisse der Berechnungen lauten

	coefficient	t-Statistic
x_1	0.1561	1.9839
x_2	0.1344	2.8358

$$R_{\text{adj}}^2 = \bar{R}^2 = 0.9951, \text{ number of observations } T = 378.$$

- Sind die Koeffizienten signifikant von Null verschieden (Signifikanzniveau 1 %)?
- Man bestimme ein zweiseitiges Konfidenzintervall für β_1 und β_2 und vergleiche das Ergebnis mit der Testentscheidung (der Irrtumswahrscheinlichkeit von 1 % bei einem zweiseitigen symmetrischen Konfidenzintervall entspricht ein t-Wert von 2,59).
- Der entsprechende Wert für ein Signifikanzniveau von 5 % ist 1,96. Zu welchem Ergebnis käme man, wenn man mit 5% statt 1% Signifikanzniveau rechnen würde? (Verbale Antwort genügt, die Rechnung muss nicht durchgeführt werden).
- Das korrigierte Bestimmtheitsmaß R_{adj}^2 unterscheidet sich vom unkorrigierten R^2 durch:

Aufgabe 7

- Welche Schätzeigenschaften der Schätzer (für die Regressionskoeffizienten) $\hat{\alpha}, \hat{\beta}_1, \dots$ nach der Methode der kleinsten Quadrate (KQ) sind mit folgenden Aussagen gemeint (der entsprechende Fachausdruck soll in das mittlere Feld eingetragen werden). In das rechte Feld

² Qingyang Gu and Kang Chen, Economic Modelling Vol. 22 (Dec. 2005) pp. 1020 – 1063.

soll eingetragen werden, welche stochastische Voraussetzung b_1, \dots, b_4 bzw. Voraussetzungen a_1, \dots, c_1, \dots angenommen werden muss, damit diese Schätzeigenschaft erfüllt ist.

	Name der Schätzeigenschaft	Hierfür notwendige Voraussetzung
$\hat{\beta} = f(y_1, y_2, \dots, y_r)$		
$E(\hat{\beta}) = \beta$		
$V(\hat{\beta}_{KQ}) < V(\hat{\beta}_{AS})$ AS heißt alternatives Schätzverfahren		
$\lim_{n \rightarrow \infty} V(\hat{\beta}) = 0$		

- b) Unter welchen Voraussetzungen ist die Stichprobenverteilung von $\hat{\beta}$ die t-Verteilung mit $T - k$ Freiheitsgraden? Was bedeutet k hierbei? Warum ist es wichtig, die genaue Gestalt der Stichprobenverteilung (ist sie z.B. eine Normalverteilung oder eine t-Verteilung usw.?) zu kennen?
- c) Was bedeutet das "Gauss Markoff Theorem"? Für welches Schätzverfahren gilt es? Kennen Sie auch andere Schätzverfahren? Wenn ja, welche?
- d) Welche Schätzeigenschaften werden berührt, wenn (bitte in den Kasten eintragen)

Zu wenige Regressoren in die Gleichung einbezogen werden (Fehlen relevanter Regressoren)?	
Zu viele (auch irrelevante) Regressoren in die Gleichung einbezogen werden? (überladenes Modell)	

Aufgabe 8

- a) Das Grundmuster für den F-Test lautet: die Prüfgröße hat die Gestalt

$$F = \frac{\dots\dots\dots\text{Varianz}}{\dots\dots\dots\text{Varianz}} \text{ ist } F_{v_1, v_2} \text{ verteilt}$$

Geben Sie die genauere Bezeichnung der Varianzen (erklärte -, nicht erklärte -, Residual - oder Gesamt-varianz) in Zähler und Nenner von F an, und geben Sie die Anzahl der Freiheitsgrade v_1 und v_2 , wenn gilt bei jeweils $T = 50$ Beobachtungen und

$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_4 = 0$ für das restringierte Modell mit nur 3 Regressoren X_3, X_5 und X_6 im Vergleich zu

$$\hat{y} = \alpha + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_6 x_6 \text{ (das volle [unrestringierte] Modell mit 6 Regressoren),}$$

d.h. es geht bei H_0 um die Hypothese, dass die Variablen X_1, X_2 und X_4 keinen Einfluss haben.

Beschreiben Sie den F-Test für die Hypothese:

- der Irrelevanz *aller* Regressoren X_1, \dots, X_6 also von $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = 0$
- der Signifikanz (zusätzlicher Erklärungsbeitrag) der zu X_3, X_5 und X_6 *hinzukommenden* Regressoren X_1, X_2 und X_4 (was mit obiger Hypothese $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_4 = 0$ getestet wird)

b) Welche Verteilung taucht in welchem Fall auf: (bitte Name der Verteilung in die freie Stelle in dem Kasten eintragen)

	eine Linearkombination *	mehrere Linearkombinationen**
Wahre Varianz σ^2 der Störgröße bekannt		
Wahre Varianz nicht bekannt. Zu schätzen mit $\hat{\sigma}^2$		

* Beispiel: $\beta_k = 0$ oder $\beta_1 + \beta_2 = q$

** Beispiel: $\beta_1 = \beta_2 = 0$ oder $\beta_1 + \beta_2 = q$ und $\beta_3 = 0$

Aufgabe 9

Ist die Störgröße u_t in $y_t = \alpha + \beta x_t + u_t$ *autokorreliert* in der Weise, dass $u_t = \rho u_{t-1} + e_t$ mit e_t als einer Zufallsvariable, die den stochastischen Standardannahmen genügt, dann gilt

1) $E(u_t) =$

2) das Korrelogramm hat bei $\rho < 0$ die folgende Gestalt

3) für die Schätzung von σ_u^2 durch $\hat{\sigma}^2 = \text{S}\hat{u}\hat{u} / (T - 2)$ gilt: sie ist

4) für die Schätzung von $\hat{\beta}$ (bzw. für das Testen von Hypothesen über β) gilt

5) was kann man tun um Probleme unter 4 zu "beheben"

Aufgabe 10

40	23	01	
<p>Gegeben sei das interdependente Modell mit (1) einer linearen Angebots- und (2) einer linearen Nachfragefunktion (y = Menge, x = Preis)</p> <p>(1) $y_{St} = \alpha + \beta x_t + u_t$ (Angebotsfunktion)</p> <p>(2) $y_{Dt} = \gamma + \delta x_t + v_t$ (Nachfragefunktion)</p> <p>(3) Gleichgewichtsbedingung $y_{St} = y_{Dt}$ (für all $t = 1, \dots, T$)</p> <p>a) Zeigen Sie dass das Modell unteridentifiziert ist und dass man mit weiteren Regressoren, etwa x_{1t} (Kosten in Gl. 1) und x_{2t} (Einkommen in Gl. 2) das Modell identifizierbar machen kann!</p> <p>b) wie lautet beim ursprünglichen und bei dem entsprechend erweiterten Modell die reduzierte Form und was bedeutet ILS (indirect least squares)?</p>			

Beispiele für Multiple Choice Fragen (nur ein Kreuz!)

40	13	01	
<p>Ein nicht-konstruktiver Test</p> <p>a) gibt bei Ablehnung von H_0 keinen Hinweis darüber welche Alternativhypothese H_1 gelten könnte</p> <p>b) erlaubt es bei Ablehnung von H_0 nicht zu sagen, dass H_0 tatsächlich falsch ist</p> <p>c) es gilt a, Antwort b gilt bei jedem Test, auch bei einem "konstruktiven"</p> <p>d) es gilt b, bei einem nichtkonstruktiven Test ist die H_1 nicht "konstruiert".</p>			

<p>Die Anwendbarkeit des Durbin-Watson-Tests setzt voraus, dass in der Regressionsgleichung</p> <p>a) ein Absolutglied und keine verzögerte endogene Variable erscheint</p> <p>b) wie a aber außerdem auch die Störgröße einem AR (1) Prozess folgt und nicht einem autoregressiven Prozess höherer Ordnung</p> <p>c) wie b aber außerdem u auch homoskedastisch ist</p> <p>d) wie c aber außerdem auch das Korrelogramm keine negativen Werte enthält</p>			
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--	--	--

<p>Mit dem Jarque Bera (JB) Test prüft man</p> <p>a) die Annahme B3 auf Nichtvorhandensein von Autokorrelation</p> <p>b) mit einer χ^2 – verteilten Prüfgröße ob man durch eine geeignete Transformation der Variablen Symmetrie erhält</p> <p>c) ob Momente (Schiefe und Wölbung) der Häufigkeitsverteilung der geschätzten Störgröße im Einklang sind mit der Annahme, dass die Störgröße normalverteilt ist</p> <p>d) alle Antworten a bis c sind falsch</p>			
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--	--	--

Dass in einer Gleichung die Störgröße mit dem Regressor (der erklärenden Variable) korreliert ist, kann

- a) entstehen wenn der Regressor zufällig schwankt (also Annahme C1 verletzt ist) oder selbst auch eine endogene Variable ist wie die mit der Gleichung zu erklärende Variable y auf der linken Seite
- b) zur Folge haben, dass die Schätzung der Parameter der Gleichung nicht konsistent ist
- c) beide Antworten a und b sind richtig
- d) beide Antworten a und b sind falsch.

Ein asymptotisch erwartungstreuer Schätzer

- a) hat eine kleinere Varianz als ein verzerrter Schätzer
- b) ist immer mit dem zu schätzenden Parameter der Grundgesamtheit identisch
- c) hat einen Erwartungswert, der nur bei großem Stichprobenumfang mit dem zu schätzenden Parameter der Grundgesamtheit identisch ist
- d) keine der Antworten a) bis c) ist richtig.

Ein erwartungstreuer Schätzer

- a) hat eine kleinere Varianz als ein verzerrter Schätzer
- b) hat einen Erwartungswert, der mit dem zu schätzenden Parameter der Grundgesamtheit identisch ist
- c) ist nur bei großem Stichprobenumfang mit dem zu schätzenden Parameter der Grundgesamtheit identisch
- d) keine der Antworten a) bis c) ist richtig

Ein konsistenter Schätzer

- a) hat eine kleinere Varianz als ein verzerrter Schätzer
- b) hat eine Varianz, die mit zunehmendem Stichprobenumfang abnimmt
- c) ist nur bei großem Stichprobenumfang mit dem zu schätzenden Parameter der Grundgesamtheit identisch
- d) keine der Antworten a) bis c) ist richtig

Bei einem überladenen (overfitted) Modell gilt für den Erwartungswert der Störgröße $E(\hat{u}_t^*)$ und die Varianz des geschätzten Regressionskoeffizienten $\text{var}(\hat{\beta}_t^*)$ im Verhältnis zu den entsprechenden Größen im richtigen Modell (ohne *) folgendes

	$\text{var}(\hat{\beta}_t^*) > \text{var}(\hat{\beta}_t)$	$\text{var}(\hat{\beta}_t^*) = \text{var}(\hat{\beta}_t)$
$E(\hat{u}_t^*) \neq E(\hat{u}_t) = 0$	a	c
$E(\hat{u}_t^*) = E(\hat{u}_t) = 0$	b	d

Der richtige Buchstabe a, ..., d ist anzukreuzen