

Aufgabe 1

Bestandsmassen sind: Anlagevermögen, landwirtschaftliche Nutzfläche, Sparvolumen, Schulden
Rest sind Bewegungsmassen

Aufgabe 2

Quotenauswahl ist keine Zufallsauswahl, weil Auswahl der Befragten im Rahmen der Quote dem Interviewer selbst überlassen bleibt; Wahrscheinlichkeitsfehler nicht anwendbar, um den Auswahlfehler abzuschätzen

Aufgabe 3

Alter (R), Familienstand (N), Staatsangehörigkeit (N), Beruf (N), Stellung im Beruf (N), Schulbildung (N,O?), Stellung zum Erwerbsleben (N), Wochenarbeitszeit (R)

Aufgabe 4

Zentralwert: vorher 53
nachher 53

arithm. Mittel: vorher 54,2
nachher 48,8

Aufgabe 5

40 km/h (harmonisches Mittel); nicht 45 (arithmetisches Mittel)

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{60} \right) = 45$$

Zeiten: hin mit 30 km/h für 4 km = 8 Min
Zurück mit 60 km/h für 4 km = 4 Min

⇒ zusammen 12 Min (1/5 Std) für 8 km, also pro Stunde $5 \cdot 8 = 40$

Aufgabe 6

Hin 10 km mit 30 km/h heißt 20 Min; Hin und zurück mit 60 km/h bedeutet bei $2 \cdot 10 = 20$ km auch 20 Min. Mit 30 km/h kann man also keine Durchschnittsgeschwindigkeit von 60 schaffen.

(falsch wäre: zurück 90 km/h; Mittel aus 30 und 90 ist 45, nicht 60!!)

Aufgabe 7

Monotone (monoton steigende) Funktion (Transformation);

Ordinalskala;

Modus N, Median O, arithm. Mittel I, geometr. Mittel V

Aufgabe 8

a) Modus (weil Art des Films eine Nominalskala darstellt)

b) Diskret, nominalskaliert

Aufgabe 9

Natürlich weniger.

Mittlere Wachstumsrate ist also nicht $[(+20\%) + (-20\%)] / 2 = 0\%$, sondern

$\sqrt{1,2 \cdot 0,8} - 1 = -0,0202$ also $-2,02\%$

Aufgabe 10

Preis von A hat sich verdoppelt (2), von B verachtelt (8); ein veranschaulichendes Mittel wäre

jetzt eine Vervielfachung; das wäre das geometrische Mittel $G = \sqrt{2 \cdot 8} = 4$

(natürlich wäre eine mittlere Preissteigerung anders zu rechnen \rightarrow Kapitel Indexzahlen)

Aufgabe 11

Keine Intervallskala, deshalb wäre Kreisdiagramm angemessen: Winkel $G = 180^\circ$, $H = 60^\circ$,

$N = 120^\circ$

Aufgabe 12

Linearkombination $y_i = 10 + 1,1 \cdot x_i$

Bei $\bar{x} = 2200$ ergibt das $\bar{y} = 2430$

Aufgabe 13

$$\bar{x} = \frac{40}{8} = 5; s^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{8} (4 + 1 + 1 + 1 + 9) = 2$$

Aufgabe 14

$$\bar{x} = 31,6$$

Summe der negativen und der positiven Abweichungen ist gleich (290,8)

Aufgabe 15

$$Z = 6; \bar{x} = 6; s^2 = 24/9 = 2,\bar{6}; s = 1,633$$

Aufgabe 16

Weil alle Verteilungen symmetrisch sind ist \bar{x} jeweils 30. Man rechnet mit Klassenmittelwerten 10, 30 und 50, so dass die Abweichungen vom Mittelwert $-20, 0$ und $+20$ sind. Man rechne ohne interne Varianzen und erhält für Verteilung A:

$$s^2 = (-20)^2 \cdot \frac{1}{8} + 0^2 \cdot \frac{3}{4} + (+20)^2 \cdot \frac{1}{8} = 100 \rightarrow s = 10$$

Entsprechend ist bei B und C die Varianz 200 bzw. 400

Aufgabe 17

Der Median ist bei $n = 8$ Werten (die lauten, wenn sie der Größe nach geordnet sind: 20, 35, 50, 60, 75, 120, 130 und 150) der 4,5te Wert; er liegt also zwischen 60 und 75 (akzeptable Schätzung $\tilde{x}_{0,5} = 67,5$).

$\bar{x} = 640/8 = 80$, so dass man die Varianz leicht errechnen kann mit:

$$(-60)^2 + (-45)^2 + (-30)^2 + (-20)^2 + (-5)^2 + (40)^2 + (50)^2 + (70)^2 = 15950$$

also $s^2 = 15950/8 = 1993,75$ (Standardabweichung 44,65)

Aufgabe 18

Varianzen bei A: $(4+1+9)/3 = 4,67$

bei B: $8/3 = 2,67$

bei C = $2/3$ und

bei D = 0

Aufgabe 19

$\bar{x} = 1500 \cdot 0,4 + 2500 \cdot 0,6 = 2100$ so dass man für die externe Varianz erhält:

$0,4 (1500-2100)^2 + 0,6(2500-2100)^2 = 240.000$ und die interne Varianz ist:

$0,4 \cdot 200^2 + 0,6 \cdot 300^2 = 70.000$; so dass man für die Gesamtvarianz erhält:

$s^2 = 310.000$ und damit die Standardabweichung 556,78

Aufgabe 20

Formel lautet: $y_i = x_i + \frac{3}{7}(x_i - \bar{x}) = \frac{10}{7}x_i - \frac{3}{7}\bar{x}$

bei $\bar{x} = 600$ ist dann $\bar{y} = a + b \cdot \bar{x}$

$a = -\frac{3}{7}\bar{x} = -\frac{3}{7} \cdot 600$ und $b = \frac{10}{7}$ also $\bar{y} = \bar{x} = 600$; $s_y^2 = \left(\frac{10}{7}\right)^2 s_x^2$

Antwort b ist richtig

Aufgabe 21

Lineartransformation $y_i = a + bx_i$

$\bar{x} = 120, s_x = 25, a = 30, b = 0,4 \rightarrow y_i = 30 + 0,4x_i$

$\bar{y} = 30 + 0,4\bar{x} = 78$; $s_y = b \cdot s_x = 0,4 \cdot 25 = 10$; Varianz $s_y^2 = b^2 \cdot s_x^2 = 0,16 \cdot (25)^2 = 100$

Aufgabe 22

- a) vier Merkmale. Art der Niederlassung (A bzw. B) definiert die Darstellbarkeit. Jeweils Kreisdiagramm (n) oder Balkendiagramm
- b)
- c) n_A, n_B sind absolute Häufigkeiten, n_E, G und K sind Merkmalssummen
- d) $0,4 \cdot 1560 + 0,6 \cdot 1720 = 1656$
- e) Rentabilität in A: $300/2000 = 0,15$; in B: 0,4 und insgesamt (ein gewogenes Mittel aus A und B) $1100/4000 = 0,275$ ($(0,15+0,4)/2$ gewogen mit Kapitalanteilen)

Aufgabe 23

Tatsächliche Mittelwerte:

- $800/80 = 10$ (bei Klasse von 0 bis unter 20)
- $1800/60 = 30$ (bei der zweiten Größenklasse)
- 85
- 200

Gesamtmittel (bzgl. Umsatz) $10.000/200 = 50$.

Externe Varianz: $(10 - 50)^2 \cdot 0,4 + (30 - 50)^2 \cdot 0,3 + (85 - 50)^2 \cdot 0,2 + (200 - 50)^2 \cdot 0,1 = 3255$

Interne Varianz: $0,4 \cdot 4 + 0,3 \cdot 64 + 0,2 \cdot 400 + 0,1 \cdot 1600 = 260,8$

Gesamtvarianz also 3515,8.

Aufgabe 24

D_G ändert sich in beiden Fällen von 0 zu $\frac{1}{6}$.

Aufgabe 25

Die relevanten Häufigkeiten sind einfach 0,4, 0,3, 0,25 und 0,05.

Das arithmetische Mittel ist $\bar{x} = 3$.

Varianz, das zweite zentrale Moment ist $(2 - 3)^2 \cdot 0,4 + (4 - 3)^2 \cdot 0,25 + (6 - 3)^2 \cdot 0,05 = 1,1$

Daraus folgt $s = \sqrt{1,1} = 1,0488$

Drittes zentrales Moment: $(2 - 3)^3 \cdot 0,4 + (4 - 3)^3 \cdot 0,25 + (6 - 3)^3 \cdot 0,05 = 0,3$

Schiefe: $0,3/1,0488 = 0,286$, da >0 linkssteile Verteilung (positive Schiefe)

Aufgabe 26

Demonstrationsbeispiel für die Lorenzkurve (vgl. Vorlesung und Skript)

Ginis Maß: $R = 1 - 0,73 = 0,27$

Aufgabe 27

H_i	0,5	1,0
Q_i	1/3	1,0

Zuerst Mädchen (ihr Anteil ist 1/3)

Ginis Maß beträgt $D_G = 1/6$.

Aufgabe 28

D_G bei Land A: $0,7 - 0,1 = 0,6$ und bei Land B $0,8 - 0,2 = 0,6$, also D_G in beiden Ländern gleich groß.

Aufgabe 29

H_i	0,6	0,9	1,0
Q_i	0	0,5	1,0

Bei Gleichverteilung $\bar{x} = 30$.
Ginis Maß beträgt $R = 1 - 0,3 = 0,7$

Aufgabe 30

H_i	0,5	0,75	0,9	1,0
Q_i	0,25	0,5	0,75	1,0

Steigung ist jeweils q/h also $0,5/0,25 = 0,5$ und entsprechend 1, 1,67, 2,5.
Die Steigung nimmt also monoton zu.
 $D_G = 1 - (0,5 \cdot 0,25 + 0,25 \cdot 0,75 + 0,15 \cdot 1,25 + 0,1 \cdot 1,75) = 1 - 0,675 = 0,325$
Natürlich nicht schneiden.

Aufgabe 31

Nein, denn man betrachtet hier nur die Scheidungen eines Jahres und die durchschnittliche Verweildauer in der Ehe ist länger als ein Jahr.

Aufgabe 32

Demonstrationsbeispiel für die Vorlesung; zeigt die Abhängigkeit der Sterberate von der Altersstruktur.

Aufgabe 33

Zwischen 0 und 3 sind die Preise wie folgt gestiegen:
In A um 25%, in B um 15% und von 0 bis 6 bei A um 33,3% bzw. bei B um 18,3%.
Die durchschnittlichen Wachstumsfaktoren erhält man damit als
 $\sqrt[3]{1,25} = 1,0776$ also 7,76% und $\sqrt[3]{1,33} = 1,0487$ also 4,87% für Land A und entsprechend sind die durchschnittlichen jährlichen Wachstumsraten bei Land B 4,77% (über 3 Perioden) bzw. 2,845% (über 6 Perioden).

Aufgabe 34

Vorlesungsbeispiel für Scheinkorrelation: Quote der wenigstens einmal „Verunfallten“ ist bei den Männern 44,1% ($3122/7080 = 0,441$) und bei den Frauen nur 32,4%. Der Zusammenhang löst sich aber auf, wenn man die häufig Fahrenden (dann Männer und Frauen 52%) und die selten Fahrenden (Dann Männer und Frauen 25%) getrennt betrachtet.

Aufgabe 35

$$(1,02)^{12} = 1,26824 \quad (\text{also } 26,8\%)$$

$$(1,2)^{12} = 8,916 \quad \text{also } 791,6\%; \text{ nicht } 240\%$$

Aufgabe 36

Dracula: Wachstum mit konstanter Wachstumsrate (monatlich 200%)

a) $700000 = 3^t \rightarrow t = 12,25$ Monate (1 Jahr und eine Woche)

b) $60000000 = 3^t \rightarrow t = 16,3$ Monate

Aufgabe 37

$$(x+10)/x = 1,04 \rightarrow x = 250; \text{ also der Index ist von } 250 \text{ auf } 260 \text{ gestiegen.}$$

Aufgabe 38

a) von 0 bis 5 Zunahme von 2 bis 32, also $\sqrt[5]{32/2} = 1,741 \rightarrow 74,1\%$

b) konstanter Wachstumsfaktor 3 (wie Aufg. 36) also 200% statt 74%

c) $3^3 = 27$, also 260% (nicht $3 \cdot 200 = 600\%$)

d) $2 \cdot (27)^2 = 1458$

Aufgabe 39

a) 0,1, 0,3 und $r_G - r_K = 0,1 - 0,3 = -0,2$

b) $\exp(-0,2t) = 1/4$, also $t = \ln(0,25)/(-0,2) \rightarrow t = 6,93$

Aufgabe 40

Weniger als 10%, nämlich 9,09%, denn $\frac{1}{1,1} - 1 = -0,0909$

Aufgabe 41

Rentabilität zur Zeit t : $100/1000 = 0,1$ (10%), in t_{+1} aber $252/2000 = 0,126$ (also 12,6%).

Zunahme um 2,6 Prozentpunkte weil Kapitaleinsatz in rentablerer Abteilung (nämlich A, dort wo Rentabilität 16% bzw. 15% beträgt, während sie in B von 4% auf 3% gesunken ist) relativ gestiegen ist (Kapitalanteil von 50% auf 80% = $1600/2000$ gestiegen).

Aufgabe 42

Wachstumsfaktor bezogen auf 5-Minuten-Intervalle: 4 (Wachstumsrate 300%)

$$256 = 4^t \rightarrow t = 4, \text{ also } 4 \cdot 5 = 20 \text{ Minuten}$$

Aufgabe 43

Bei 8 Jahresintervallen $\sqrt[8]{1,542} = 1,05503$ also 5,56% jährlich.

Verdoppelung nach $t = \ln(2) / \ln(1,05563) = 12,8$ Jahren

Aufgabe 44

60, ver-6,67-facht, 158,2 %

Aufgabe 45

Wachstumsrate Schnöselpecht: $y'_s(t) = e^{\sqrt{t}} \left(\frac{1}{2} t^{-1/2} \right)$ (Kettenregel).

Also Wachstumsrate: $r_s(t) = y'_s(t) / y_s(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ monoton fallend positiv, strebt gegen Null;

laufend abnehmend, nur Papagei: $r_p(t) = \frac{4}{2t-1}$ kann auch größer als 100% sein.

r_p ist bei größerem t meist kleiner als r_s .

Aufgabe 46

Demonstrationsaufgabe für Dutrot Preisindex $P_{0t}^D = \overline{P}_t / \overline{P}_0$

Tomaten in kg: $\overline{P}_t = 4, \overline{P}_0 = 2,5 \rightarrow P_{0t}^D = 4 / 2,5 = 1,6$

Tomaten in Pfund: (halber Preis): $\overline{P}_t = 3, \overline{P}_0 = 1,75 \rightarrow P_{0t}^D = 1,7143$

1,6 ungleich 1,7143: Keine Kommensurabilität

Aufgabe 47

a) $P_{0t}^L = 10 / 7 = 1,4286$

b) $P_{0t}^P = 1,4 / 1,2 = 1,1667 < P_{0t}^L, Q^P = 1,4 / \frac{10}{7} = 0,98$

c,d) $0,8 \leq P_{0t}^P \leq 2$

Aufgabe 48

$$P_{0t}^L = 1,2; 1 \leq P_{0t}^P \leq 2$$

Aufgabe 49

a) $W_{0t} = 1344/1005 = 1,3373$ (also um 33,7%)

b) Preismesszahlen: 1,2; $1,0\bar{9}$; 1,2 Mengemesszahlen: 1; 2; 0,5

$$\tilde{P}_t = \sum p_t q_t / \sum q_t = 70,7368$$

c) Durchschnittswerte

$$\tilde{P}_0 = \sum p_0 q_0 / \sum q_0 = 47,8571$$

Messzahl der Durchschnittswerte $P_t/P_0 = 1,478$ ist kein brauchbarer Preisindex weil 1,478 größer als die größte Preismesszahl ist

d) Ausgabenanteile A:0,793, B:0,164, C:0,0398

e) $P_{0t}^L = 1,182$; $P_{0t}^P = 1,1687 < P_{0t}^L$

Aufgabe 50

$$W_{0t} = 1,1; Q_{0t}^L = 1,06 \rightarrow P_{0t}^P = 1,1/1,06 = 1,0377$$

also nicht $6\% + 4\% = 10\%$ sondern $3,77\%$ statt 4%

Aufgabe 51

$$P_{0t}^L = 1,2; W_{0t} = 1 \text{ natürlich möglich, wenn Mengen reduziert werden: } Q_{0t}^P = W_{0t} / P_{0t}^L = 0,833$$

Aufgabe 52

1,2 (also +20%)

Man beachte: Preise +25%, Mengen +20%, Werte +50%

Nicht aber: $45 = 25 + 20$

Aufgabe 53

$$150, \text{ denn } 2 / \frac{4}{3} = \frac{6}{4} = 1,5$$

Aufgabe 54

Lebenshaltungskostenindex

$$W_{0t} = P_{0t}^N = 12/12 = 1 \text{ (Nutzenindex)}, P_{0t}^L = 1,5; P_{0t}^P = \frac{2}{3}$$

normal ist $P_{0t}^P < P_{0t}^N < P_{0t}^L$

Aufgabe 55

Neuer Index ist das $900/600 = 1,5$ -fache des alten Index

alter Index	100	300	600	800	1200
neuer Index	150	450	900	1200	1800

Aufgabe 56

$$\bar{D} = 40, \bar{M} = 30, \sum MD = 120.000, \sum D = 400, \sum M = 300, \text{ also ist } \frac{1}{n} \sum DM - \bar{D}\bar{M} = 0$$

(Korrelation auch Null); Regressionsgeraden $\hat{M} = \bar{M} = \text{const}$, $\hat{D} = \bar{D} = \text{const}$

Aufgabe 57

- a) Nein (beide Folgerungen sind falsch). Wenn x Alter des Ehemannes und y Alter der Ehefrau bedeutet $r_{xy} \approx 1$ nicht, dass $\hat{y} = x$ ($\hat{y} = a + bx$ also müsste $a = 0$ und $b = 1$ sein) auch nicht, dass $(x_i - \hat{y}_i) = (1 - b)x_i - a \neq \text{const}$ die Differenz const
- b) Scheinkorrelation vermittelt durch das Alter

Aufgabe 58

$$S_{vw} = 0, \text{ folglich } W = \bar{W} = 700, V = \bar{V} = 6 \text{ (Korrelation } r = 0), s_V^2 = 4,8; s_W^2 = 40.000$$

Aufgabe 59

Alle Antworten sind falsch.

Aufgabe 60

a) $s_{xy} = \frac{1}{2}(16,4)^2$

b) $\hat{y} = 50 + \frac{1}{2}x$

c) Schlussfolgerung falsch, da kein deterministischer (funktionaler) Zusammenhang ist (r^2 ist nur $(0,5)^2 = 0,25$)

wenn $x = 75 < 100$ dann $y = 87,5 > x$

wenn $x = 130 > 100$ dann $y = 115 < x$

Aufgabe 61

B\C	3	6	9	12	Σ
3	0	0	0	1	1
9	1	0	0	1	2
12	1	2	1	0	4
18	3	1	1	0	5
Σ	5	3	2	2	12

Regressionsgeraden

$$\hat{x}_B = 18,046 - 0,7673 \cdot x_C$$

$$r_{BC} = -0,54997$$

$$r^2 = 0,3025 \text{ (30,25\% Bestimmtheit)}$$

$$\hat{x}_C = 11,473 - 0,3942 \cdot x_B$$

Regressionslinien

\bar{x}_C | wenn $x_B = \dots$

$$x_B = 3 \rightarrow (\bar{x}_C | x_B = 3) = 15$$

$$x_B = 9 \rightarrow 14$$

$$x_B = 12 \rightarrow 15$$

$$x_B = 18 \rightarrow 6$$

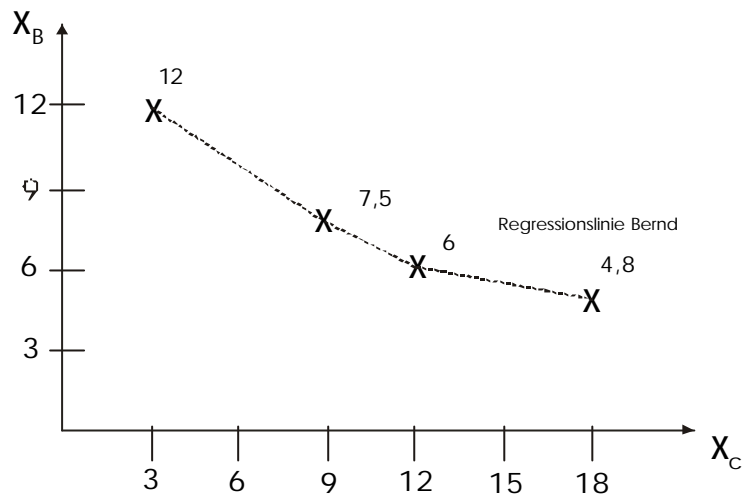
(nicht linear)

\bar{x}_B | wenn $x_C = \dots$

$$x_C = 3 \rightarrow (\bar{x}_B | x_C = \dots) = 15$$

weitere:

$$(\bar{x}_B | x_C = 9) = 7,5 ; (\bar{x}_B | x_C = 12) = 6 ; (\bar{x}_B | x_C = 18) = 4,8$$



Aufgabe 62

Randverteilung von x:

x	1	2	3	4	5
n_i	8	6	6	10	6

Randverteilung von y:

y	1	2	3	4	5
n_i	2	7	11	10	6

$$\sum n_i = \sum n_{ij} = 36$$

$$\bar{x} = 19/6 = 3,1\bar{6}$$

$$\bar{y} = 119/36 = 3,30\bar{5}$$

bedingte Mittelwerte

wenn x =	dann $\bar{y} x$	wenn y =	dann $\bar{x} y$
1	2,75	1	1,5
2	2,5	2	2,714
3	3,5	3	2,727
4	4	4	3,1
5	3,5	5	4,167

graphische Darstellung dieser bedingten Mittelwerte ist die (empirische) Regressionslinie. Die beiden Regressionslinien sind keine Geraden.

Aufgabe 63

$$\bar{y} | x = \dots 1,5; 2; 2,5$$

$$\bar{x} | y = \dots 8; 11,2 (=56/5); \text{ und } 13,3 (=40/3)$$

Die Regressionslinien sind nicht linear (wegen $x = 6$ statt $x = 5$), also keine Geraden. Sie haben aber eine positive Steigung.

Für die Kovarianz gilt $s_{xy} = 1,28$

$$\text{Harmonisches Mittel: } H = \frac{2}{\frac{1}{6} + \frac{1}{10}} = 7,5$$

Aufgabe 64

Demonstrationsbeispiel in der Vorlesung

Aufgabe 65

Gleitende 3-er Durchschnitte 50, 70, 90, ..., 290 also die Funktion $\tilde{K}_t = 30 + 20 \cdot t$ (eine Gerade). Der Trend mit der Methode der kleinsten Quadrate (lineare Regression) ist aber nicht diese Gerade, sondern $\hat{K}_t = 32,5 + 19,642857 \cdot t$

Aufgabe 66

t	1	2	3	4	5	6	7	8
y_t	15	20	25	30	29	31	39	38
\tilde{y}_t	-	20	25	28	30	33	36	-

Prognose mit exponentieller Glättung $\mathbf{a} = \frac{1}{5} = 0,2$

t	1	2	3	4	5	6	7	8
y_t	15	20	25	30	29	31	39	38
y_t^p	15	15	16	17,8	20,24	21,992	23,7936	26,835 ^x

^x Prognose für $t=9$

Beispiel:

$$y_3^p = \mathbf{a} \cdot y_2 + (1 - \mathbf{a}) \hat{y}_2 = 0,2 \cdot 20 + 0,8 \cdot 15 = 16$$

$$y_4^p = \mathbf{a} \cdot y_3 + (1 - \mathbf{a}) \hat{y}_3 = 0,2 \cdot 25 + 0,8 \cdot 16 = 17,8$$

$$y_5^p = \mathbf{a} \cdot y_4 + (1 - \mathbf{a}) \hat{y}_4 = 0,2 \cdot 30 + 0,8 \cdot 17,8 = 20,24$$

Aufgabe 67

gleiche Zahlen wie Aufgabe 66 (also GM = \tilde{y})

t	2	3	4	5	6	7
ΔU	0	0	2	-1	-2	3

Aufgabe 68

70, 60, 50, 40 Funktion (erster Wert $y = 85$ ist $t = 0$) $\tilde{y} = 80 - 10t$

Aufgabe 69

1800, 1800

Aufgabe 70

a)

125, 125, 125, 125, 125

die gleitenden Mittelwerte sind also eine Konstante (darin besteht der Witz der Aufgabe).

Bei einer Schätzung eines linearen Trends mit der Methode der kleinsten Quadrate erhält man aber nicht diesen Wert, sondern...

b)

124, 286 - 0,1786 t*

c)

123,145

Aufgabe 71

Fragestellung der Kombinatorik: 6 Schädlingsarten

a)

$$\binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \dots + \binom{6}{6} = 2^6 - \binom{6}{0} - \binom{6}{1} = 64 - 1 - 6 = 57$$

b)

$$\binom{6}{2} - 1 + \binom{6}{3} - 4 + \binom{6}{4} - 6 + \dots \text{ zu verringern um } \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 2^4 = 16$$

also um 16 Möglichkeiten; verbleiben

$$\begin{array}{ccc} \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} \end{array}$$

41 Möglichkeiten

Aufgabe 72

$$P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 \cap B_2)$$

a) Ziehen ohne Zurücklegen

$$P(B_1 \cap B_2) = \frac{4}{32} \cdot \frac{3}{31} = \frac{12}{992} = 0,012097$$

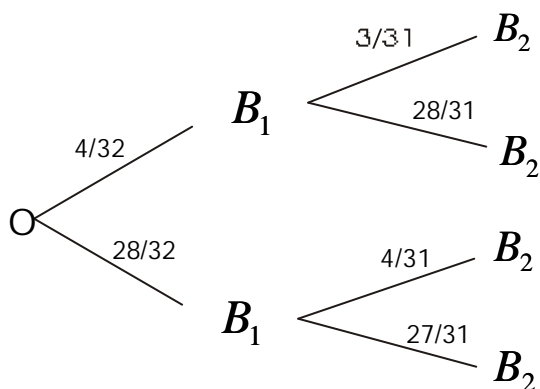
$$\Rightarrow P(B_1) = \frac{124}{992} = \frac{4}{32} = 0,125$$

$$P(B_1 \cap \bar{B}_2) = \frac{4}{32} \cdot \frac{28}{31} = \frac{112}{992} = 0,1129$$

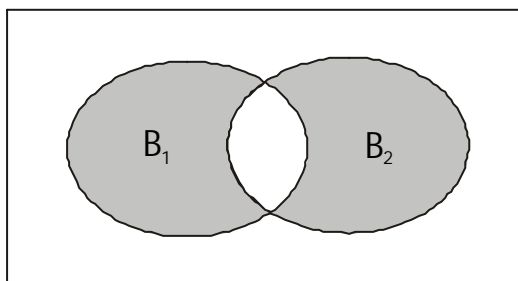
$$P(\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2) = \frac{28}{32} \cdot \frac{27}{31} = \frac{756}{992}$$

$$P(\bar{B}_1 \cap B_2) = \frac{28}{32} \cdot \frac{4}{31} = \frac{112}{992}$$

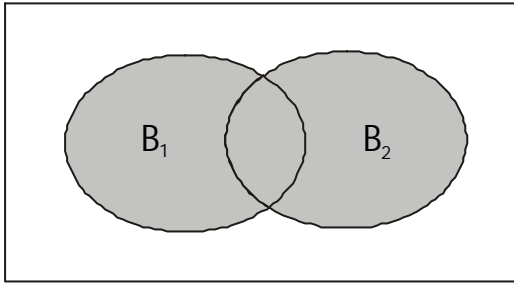
Die Summe aller dieser Wahrscheinlichkeiten ist 1, denn $12 + 112 + 756 + 112 = 992$



Die gesuchte Wahrscheinlichkeit



$$P(B_1 \cap \bar{B}_2) + P(\bar{B}_1 \cap B_2) = \frac{112 + 112}{992} = 0,2258$$

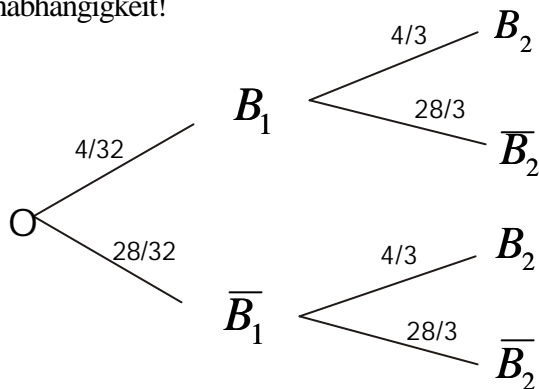


$$P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 \cap B_2) = \frac{212}{992} = 0,2137$$

Vereinigung $0,125 + 0,125 - 0,012097$

b) Ziehen mit Zurücklegen

Unabhängigkeit!



$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2)$$

$$P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 \cap B_2) = 0,234375$$

$$P(B_1) = \frac{4}{32}$$

$$P(B_2) = \frac{4}{32}$$

$$P(B_1 \cap B_2) = \left(\frac{4}{32}\right)^2$$

oder

$$P(B_1 \cup B_2) = P(B_1 \cap \bar{B}_2) \left[\frac{4}{32} \cdot \frac{28}{32} \right] + P(\bar{B}_1 \cap B_2) \left[\frac{28}{32} \cdot \frac{4}{32} \right] + P(B_1 \cap B_2) \left[\left(\frac{4}{32}\right)^2 \right]$$

Konzept der Unabhängigkeit bei ZmZ

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2)$$

oder: $P(B_2 | B_1) = P(B_2)$

Konzept der Unabhängigkeit bei ZoZ

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_2 | B_1) \cdot P(B_1)$$

beachte: $P(B_2 | B_1) \neq P(B_2)$

Aufgabe 73

$$P(A \cap B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}; \quad P(A) = \frac{1}{3}; \quad P(B) = \frac{1}{2}; \quad P(A \cup B) = \frac{4}{6}$$

Aufgabe 74

$$0,15 + 0,2 - 0,03 = 0,32$$

Aufgabe 75

Berühmtes historisches Beispiel:

- a) 4 Würfe mindestens eine 6: Berechnung der Gegenwahrscheinlichkeit

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0,51775 > 0,5$$

- b) keine Doppelsechs bei 1 Wurf mit 2 Würfeln: $1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$

gesuchte Wahrsch. also $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^2 = 0,491404 < 0,5$ (langfristig Verlust!)

Aufgabe 76

$R \subset S$ Teilmenge (Teilergebnis!)

$$P(R | \bar{S}) = 0, \quad P(R | S) > 0, \text{ also keine Unabhängigkeit}$$

$$P(S) = \frac{1}{365} \text{ an jedem Tag gleichwahrscheinlich } (>0, \text{ also kein unmögliches Ereignis})$$

Richtig ist nur „Teilereignis“

Aufgabe 77

a) $P(N) = P(N | K) \cdot P(K) + P(N | \bar{K}) \cdot P(\bar{K}) = 0,01 \cdot 0,6 + 0,85 \cdot 0,4 = 0,346$

b) $P(K \cap N) = P(N | K) \cdot P(K) = 0,01 \cdot 0,6 = 0,006$ (0,6%)

Aufgabe 78

S = eingeschlafen, G = Gespräch

$$P(S) = 0,75, P(G|S) = 0, P(G|\bar{S}) = 0,2$$

$$P(G) = P(G|S)P(S) + P(G|\bar{S})P(\bar{S}) = 0,2 \cdot 0,25 = 0,05 \text{ (5\%)}$$

Aufgabe 79

a) bei gleichen Teilen in Aktie A und C und ohne Aktie B:

$$a = c = \frac{1}{2} \rightarrow E(Z) = 150, V(Z) = \frac{1}{4} \cdot 25 + \frac{1}{4} \cdot 49 + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 5 \cdot 7 = 36, \text{ so dass die}$$

Standardabweichung $s_Z = 6$ ist.

bei gleichen Teilen für alle drei Aktien:

$$a = b = c = \frac{1}{3}: E(Z) = 160, V(Z) = 125,2/9 = 13,91 \rightarrow s_Z = 3,73$$

b) entscheidend ist die negative Korrelation r_{AB} und (im geringen Maße) auch r_{BC} .

Aufgabe 80

Geometrische Verteilung:

$$f(x) = q^x \cdot p$$

$$F(x) = 1 - q^{x+1} = P(X \leq x)$$

$$\text{gesuchte Wahrsch. ist } P(x > 5) = 1 - F(5) = 1 - \left[1 - \left(\frac{5}{6} \right)^6 \right] = \left(\frac{5}{6} \right)^6 = 0,3349$$

Aufgabe 81

Binomialverteilung $n = 30, p = \frac{1}{4}$ (Wahrsch., daß bei 2 Kindern beide Mädchen sind)

$$\binom{30}{20} \left(\frac{1}{4} \right)^{20} \left(\frac{3}{4} \right)^{10} = \frac{30 \cdot 29 \cdot \dots \cdot 21}{10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 1} (9,0946 \cdot 10^{-13}) \cdot 0,0563 = 0,0000015388 = 1,5388 \cdot 10^{-6}$$

Aufgabe 82

$$\text{a) genau 10 Aufgaben: } \binom{25}{10} \left(\frac{1}{4} \right)^{10} \left(\frac{3}{4} \right)^{15} = 0,04166$$

b) mindestens 10 Aufgaben: $\binom{25}{10} \left(\frac{1}{4}\right)^{10} \left(\frac{3}{4}\right)^{15} + \binom{25}{11} \left(\frac{1}{4}\right)^{11} \left(\frac{3}{4}\right)^{14} + \dots + \binom{25}{25} \left(\frac{1}{4}\right)^{25} \left(\frac{3}{4}\right)^0$

Anpassung durch Normalverteilung:

$$\left. \begin{aligned} \mu &= np = 25 \cdot \frac{1}{4} = 6,25 \\ s^2 &= npq = 4,6875 \\ Z &= \frac{10 - 6,25}{\sqrt{4,6875}} = 1,732 \rightarrow F(Z) = 0,95836 \\ \text{Wahrsch. also } &1 - 0,95836 = 0,04164 \text{ (1,64\%)} \end{aligned} \right\}$$

Aufgabe 83

Binomialverteilung $p = \frac{1}{8}, n = 5; x = 0, x = 1, x \leq 2$

keine : $\binom{5}{0} \left(\frac{1}{8}\right)^0 \left(\frac{7}{8}\right)^5 = 0,5129$

genaueine : $\binom{5}{1} \left(\frac{1}{8}\right)^1 \left(\frac{7}{8}\right)^4 = 0,36636$

höchstens zwei : $0,5129 + 0,36636 + \binom{5}{2} \left(\frac{1}{8}\right)^2 \left(\frac{7}{8}\right)^3 = 0,98395$

„mit Zurücklegen“ = Unabhängigkeit

Aufgabe 84

Modell einer Zufallsvariable bei Ziehen ohne Zurücklegen: Hypergeometrische Verteilung.
 $N = 10, M = 8$ (nur jede 5te ist „gut“), $n = 2, x = 2$

$$P(x = 2 | N, M, n) = \frac{\binom{8}{2} \binom{2}{0}}{\binom{10}{2}} = \frac{\frac{8 \cdot 7}{2} \cdot 1}{\frac{10 \cdot 9}{2}} = \frac{56}{90} = 0,62\bar{2}$$

mit $N = 20$:

$$P(x = 2 | N, M, n) = \frac{\binom{16}{2} \binom{4}{0}}{\binom{20}{2}} = 0,631$$

Aufgabe 85

Stichprobe $n = 4$, beobachteter Anteil von „Erfolgen“ $p = 1/4$. Bei $p = 1/4$ ist diese Stichprobe am Wahrscheinlichsten.

Likelihoodfunktion

$$L = \binom{4}{1} p^1 (1-p)^3 = 4p - 12p^2 + 12p^3 - 4p^4$$

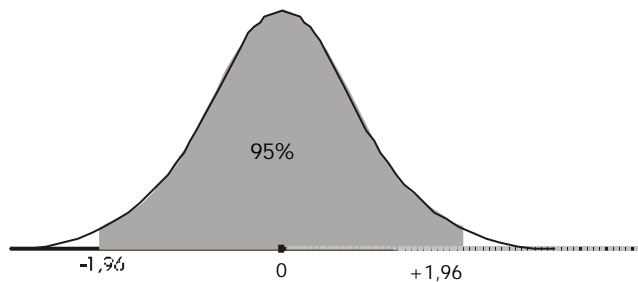
$$\text{Ableitung } \frac{dL}{dp} = 4(1 - 6p + 9p^2 - 4p^3) = 0$$

Man sieht, dass der Ausdruck in der Klammer verschwindet, wenn $p = 1/4$ gesetzt wird. Man erhält für L (Wahrsch. der konkreten Stichprobe, wenn p den Wert ... annimmt):

p	0,2	0,25	0,3
L	0,4096	0,421875	0,4116

Aufgabe 86

Stichprobenwerte $\bar{p} = 2/50 = 4/100 = 0,04$ (Ausschussanteil in der Stichprobe). In welchem Bereich liegt der wahre Ausschussanteil der Grundgesamtheit mit einer Sicherheit von 95 % (wahrer Anteil $p = ?$). Standardabweichung der Stichprobenverteilung ist



$$s_{\bar{p}} = \sqrt{\frac{pq}{n}} \text{ bei Ziehen mit Zurücklegen (ZmZ) bzw.}$$

$$s_{\bar{p}} = \sqrt{\frac{pq}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}} \text{ bei Ziehen ohne Zurücklegen (ZoZ).}$$

Der Unterschied ZmZ – ZoZ ist nicht bedeutsam, wenn $\frac{N-n}{N-1} \approx 1$ (hier ist

$$\frac{N-n}{N-1} = \frac{500-50}{499} = 0,901804 \rightarrow \text{kann noch berücksichtigt werden!)$$

Wenn p und $q = (1 - p)$ nicht bekannt, muß es durch den Stichprobenwert \bar{p} und $\bar{q} = 1 - \bar{p}$

ersetzt werden. Dann gilt: $s_p = \sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n-1} \cdot \frac{N-n}{N}} = 0,02658$.

Konfidenzintervall von:

$$\bar{p} - Z_a s_{\bar{p}} = 0,04 - 1,96 \cdot 0,02658 = -0,012 \text{ (also praktisch 0\% Ausschuß)}$$

$$\text{und bei } \bar{p} + Z_a s_{\bar{p}} = 0,04 + 1,96 \cdot 0,02658 = 0,0921.$$

Der wahre Ausschussanteil dürfte also mit einer Sicherheit von 95% zwischen 0 und 9,21% liegen. Bei größerer Sicherheit, etwa $1 - \alpha = 0,99$ ist $Z_\alpha = 2,5758$ und das Konfidenzintervall ist entsprechend breiter: $0,04 \pm 2,5758 \cdot 0,0258$, also von 0% bis 10,8476%.

Aufgabe 87

Das gleiche Problem als Aufgabe zum Signifikanztest formuliert:

Hypothese: $H_0 : p = p_0 = 0,01$ (Hypothese, dass wahrer Ausschussanteil in der Grundgesamtheit nur 1% ist! Wie wahrscheinlich ist dann ein Ausschussanteil von 4% in der Stichprobe?)

$$\text{Prüfgröße } Z = \frac{p - p_0}{s_p} = \frac{p - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n} \cdot \frac{N - n}{N - 1}}} = \frac{0,04 - 0,01}{\sqrt{\frac{0,01 \cdot 0,99}{50} \cdot \frac{450}{499}}} = \frac{0,03}{0,01336} = 2,451.$$

Diese Größe ist mit der dem vorgegeben Signifikanzniveau ($\alpha = 5\%$ einseitig) zu vergleichen: $Z = 1,6449 < Z_\alpha = 2,3263$.

Entscheidung: da $|Z| > |Z_\alpha| \rightarrow H_0$ verwerfen zugunsten von H_1 . Signifikanz auf dem 5% Niveau (bei $\alpha = 1\%$ einseitig ist $Z_\alpha = 2,3663$ dann $|Z| < |Z_\alpha|$: nicht signifikant auf 1%).

Aufgabe 88

a) $Z = (1 - 1,02)/0,008 = -2,5$. Wahrsch. mithin $1 - 0,9938 = 0,0062$ also 0,62%

b) Maschine kann auf einen kleineren Wert als 1,02 eingestellt werden, denn bei 1,02 ist Wahrsch. für Untergewicht nur 0,62%. Erlaubt ist aber 5%.

Also $(1 - \mu)/0,008 = -1,6449 \rightarrow \mu = 1,01316$.

Aufgabe 89

$$\text{a) } P\left(\bar{x} - Z_\alpha \cdot \frac{\hat{s}}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N - n}{N}} \leq \mu \leq \bar{x} + Z_\alpha \cdot \frac{\hat{s}}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N - n}{N}}\right) = 1 - \alpha \text{ mit } 1 - \alpha = 0,95$$

$Z_\alpha = 1,96$; $\hat{s} = 50$; $\bar{x} = 400$; $n = 100$ und $N = 10.000$ erhält man.

b) Mit $N = 90.000$ ist $\sqrt{\frac{N - n}{N}} = 0,999444$ also größer (näher bei 1 als im Fall a). Intervall wird breiter (aber äußerst geringfügig!)

c) Problem der Abschätzung des notwendigen Stichprobenumfangs (absoluter Fehler: $e = 20$)

$$e = Z \frac{s}{\sqrt{n}} \rightarrow n \geq \frac{Z^2 \cdot s^2}{e^2} = \frac{(1,96)^2 \cdot (50)^2}{(20)^2} = 24,01. \text{ (es reicht ein Stichprobenumfang von 25 aus!)}$$

Korrektur: Fehler ± 2 DM statt 20 DM, also $e = 2 \rightarrow \frac{(1,96)^2 \cdot (50)^2}{(2)^2} = 2401$.

Aufgabe 90

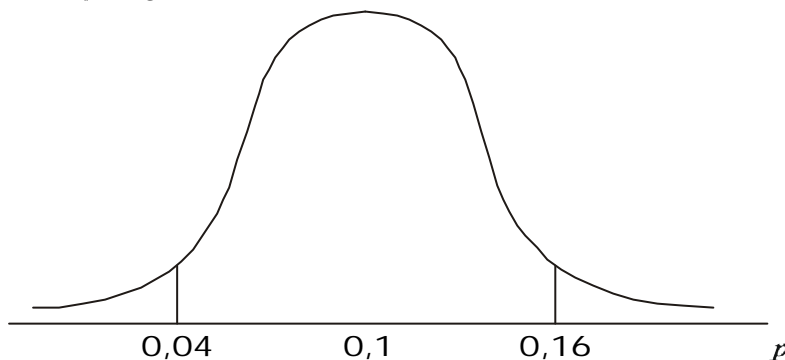
Demonstrationsbeispiel für Ein-Stichprobenproblem, homogener Fall

$H_0 : p = 0,1$ $H_1 : p > 0,1$ konkret $p = 0,5$

a) Wenn H_0 gilt, dann ist \bar{p} (Stichprobenausschußanteil) wie folgt verteilt

Stichprobenaanteil : $\bar{p} = 9/25 = 0,36 > p = p_0 = 0,1$

$$s_{\bar{p}} = \sqrt{\frac{0,1 \cdot 0,9}{25}} = 0,06$$



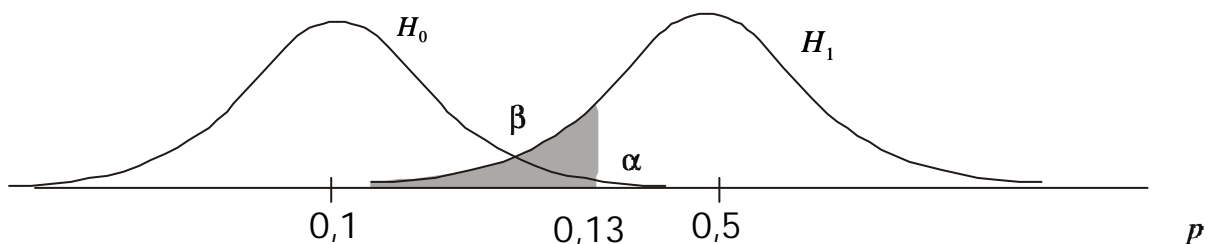
und damit ist $Z = \frac{\bar{p} - p}{s_{\bar{p}}} \sim N(0,1)$; $Z = \frac{0,36 - 0,1}{0,06} = 4,333$ viel größer als $Z_{\alpha} = 2$ (dann ist

$1 - \alpha = 0,9772$ einseitig), also H_0 ablehnen.

b) kritischer Bereich beginnt bei $Z = \frac{\bar{p}_c - p}{s_{\bar{p}}} = \frac{\bar{p}_c - 0,1}{0,06} = 2 \rightarrow \bar{p}_c = 0,22$ (beobachteter Wert $\bar{p} = 0,36$ liegt also im kritischen Bereich!)

Bestimmung des β -Fehlers (der Wahrsch. β) $Z_{\beta} = \frac{0,22 - 0,5}{\sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{25}}} = -2,8$.

Wahrsch. dann $1 - 0,99744 = 0,00256$ (0,256% ; α Wahrsch. : $1 - 0,9772$, also 2,28%)



c) Bestimmung eines 95% - Konfidenzintervalls:

95% zweiseitig bedeutet $Z = 1,96$ also $P = \left(\bar{p} - Z \sqrt{\frac{\bar{p} \bar{q}}{n-1}} \leq p \leq \bar{p} + Z \sqrt{\frac{\bar{p} \bar{q}}{n-1}} \right) = 1 - \alpha$.

$$Z \cdot \sqrt{\frac{\bar{p} \bar{q}}{(n-1)}} = 0,192$$

Das Intervall lautet also $0,16796 \leq p \leq 0,55204$.

Aufgabe 91

- a) $H_0 : p = 0,8$, $H_1 : p < 0,8$ (H_0 : preisunelastisches Verhalten; H_1 : preiselastisch)
 b) Fehler 1. Art: auf Gebührenerhöhung verzichten obgleich Kundschaft preisunelastisch reagiert hätte, also weiter gekauft hätte; Fehler 2. Art: Gebührenerhöhung durchführen obgleich Kundschaft ausweicht und weniger nachfragt, so dass Effekt der Gebührenerhöhung sogar negativ sein könnte.

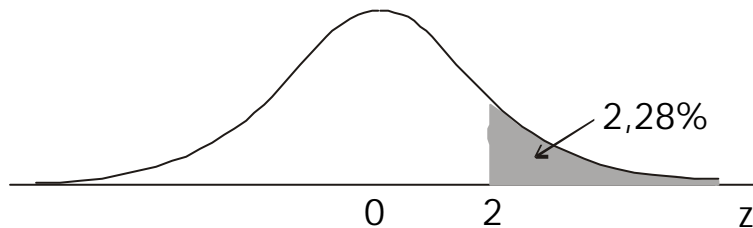
$$Z = \frac{0,78 - 0,8}{\sqrt{0,8 \cdot 0,2/900}} = -1,5. \text{ Signifikant auf dem 10\% Niveau aber nicht auf dem 5\% Niveau}$$

(weil $|Z| < |Z_\alpha|$).

Aufgabe 92

Korrekte Wahrscheinlichkeit für 40 oder mehr Würfe einer 6 ist nach der Binomialverteilung

$$\binom{180}{40} \left(\frac{1}{6}\right)^{40} \left(\frac{5}{6}\right)^{140} + \binom{180}{41} \left(\frac{1}{6}\right)^{41} \left(\frac{5}{6}\right)^{139} + \dots + \binom{180}{180} \left(\frac{1}{6}\right)^{180} \left(\frac{5}{6}\right)^0$$



Anpassung durch Normalverteilung mit $P(Z \geq 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$ (2,28%). Es handelt sich also wohl nicht um einen echten Würfel, weil die Wahrsch. $2,28\% < 5\%$.

Aufgabe 93

- a) $Z_\alpha = 2$ Konfidenzintervall : $440 \leq \mu \leq 460$
 b) $H_0 : p = 500$ (keine Reduktion), $H_1 : p < 500$ (Reduktion durch StVO). 5% einseitig \rightarrow

$$Z_\alpha = 1,6449 \rightarrow Z = \frac{(450 - 500)}{\left(\frac{50}{\sqrt{100}}\right)} = -10 \text{ signifikant}$$

Aufgabe 94

H_0 : Fallschirm gut (sicher). a - Fehler: H_0 ablehnen obgleich H_0 richtig.

Der gesuchte Fehler ist also der β -Fehler (H_0 gilt nicht [Fallschirm schlecht], wird aber gleichwohl angenommen)

Aufgabe 95

Demonstrationsbeispiel für die Vorlesung

Aufgabe 96

- Relative Häufigkeiten der Treffer $\bar{p}_A = 0,25$; $\bar{p}_B = 0,4$. Kann auch Zufall sein, in Wahrheit (in der Grundgesamtheit) also kein Unterschied; $n_A = 40$; $n_B = 50$. Gleiche Zahlen und gleiches Problem, wie Aufgabe 71 Teil b). Deshalb auch gleiches Ergebnis: Kein signifikanter Unterschied zwischen den Bewerbern obgleich Quoten 40% und 25%.
- Obgleich B der bessere Schütze als A ist, wird entschieden, dass beide gleich sein dürften (also z.B. das Los entscheiden soll)

Aufgabe 97

- bei homogener Fragestellung konservativ (pessimistisch) gerechnet mit $p(1-p) = \frac{1}{4}$ ergibt $n > \frac{z^2 p(1-p)}{e^2} = \frac{1,6449^2 \cdot 0,25}{0,01^2} = 6764,2$
- Verdoppelung der Genauigkeit (1/2 Prozent statt 1%) ergibt 27.056,96 also Vervierfachung des mindestens erforderlichen Stichprobenumfangs.

Aufgabe 98

$\alpha = 5\%$ einseitig bedeutet $Z_\alpha = 1,6449$

Teil 1: Zwei-Stichproben-Fall heterograd: $s_{\bar{x}_A - \bar{x}_B} = s \sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}} = 9 \cdot \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{9}} = 3,75$.

Prüfgröße $Z = \frac{(600 - 450)}{3,75} = 40 > 1,6449$: Hochsignifikanter Unterschied.

Teil 2: Ein-Stichproben-Fall: $H_0 : \mu_A = \mu_G = 685$. $x_A = 600$ muß dem nicht widersprechen!

Prüfgröße $Z = \frac{(600 - 450)}{\frac{9}{\sqrt{16}}} = -37,7 (< -1,96)$. Australopithecus hat also auch ein signifikant

kleineres Gehirnvolumen als der Gorilla.

Aufgabe 99

$n > \frac{(1,6449)^2 \cdot 0,3 \cdot 0,7}{(0,05)^2} = 227,3$ bei $\pm 1\%$ (also $e = 0,01$) erhält man 5.682 also 25-mal so viel wie die 227 zu befragenden Personen.

Aufgabe 100

Hier ist $\bar{x} = 6$.

a) $Z = \frac{6-30}{10} = \frac{-24}{10} = -2,4 \rightarrow F(Z) = 1 - 0,9918$

b) $Z = \frac{20-30}{10} = \frac{-10}{10} = -1,0 \rightarrow F(Z) = F(1,0) = 0,2420$

c) $s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \rightarrow Z = \frac{6-30}{\frac{10}{\sqrt{5}}} = \frac{-24}{4,472} = -5,366$; also äußerst unwahrscheinlich.

d) Richtige Lösung ist die zweite Antwort. Die dritte Antwort ist ganz falsch.