

Statistik Aufgabensammlung (gekürzte Fassung)

Übungsaufgaben zum Kurs "Statistik" von **Prof. Dr. Peter von der Lippe** bei der VWA Essen (diese Fassung der Aufgabensammlung ist gekürzt [21 statt 31 Seiten] und ohne Bilder)

Aufgaben, die durch Kürzung des Stoffes (Übergang von 8 Abendveranstaltungen zu nur noch 5 Abendveranstaltungen bei der VWA) nicht mehr relevant sind wurden einfach **gestrichen**. Aufgabenteile, die wegen der Kürzung des Stoffes nicht mehr relevant sind wurden grau unterlegt.

Da mir die Datei mit den Lösungen nur noch als pdf-Datei vorliegt konnte ich dort entsprechende Streichungen nicht vornehmen. Es sind bei der Datei "Lösungen" also auch Lösungen von Aufgaben enthalten, die hier gestrichen worden sind.

Wer Interesse an der ursprünglichen langen Fassung der Aufgabensammlung mit Bildern hat, kann diese von mir oder der VWA erhalten.

Teil 1: Aufgaben zur Deskriptiven Statistik

Aufgabe 3

Nennen Sie beispielhaft einige Merkmalsausprägungen und den Skalentyp (Nominal-, Ordinal-, Intervall-, Ratioskala) bei der Messung der folgenden Merkmale (Volkszählungsmerkmale):

Alter, Familienstand, Staatsangehörigkeit, Beruf, Stellung im Beruf, Schulbildung, Stellung zum Erwerbsleben, Wochenarbeitszeit.

Aufgabe 4

Im fünfköpfigen Vorstand der X-AG sitzen verdiente Männer im Alter von 48, 53, 53, 55 und 62 Jahren. Man plant eine Geschäftsreise nach Bangkok.

Das älteste Vorstandsmitglied kann jedoch leider nicht mitreisen, weil ihm sein Arzt wegen seines hohen Blutdrucks eindringlich von der weiten Reise abgeraten hat. Außerdem war seine Frau aufgrund ihrer in der Illustrierten gewonnenen Erkenntnisse dagegen. An seiner Stelle kann nun ein junger dynamischer Prokurist im Alter von 35 Jahren mitreisen. Wie ändern sich der Zentralwert und das arithmetische Mittel der Altersverteilung der reisenden Geschäftsleute?

Aufgabe 5

Ein Kraftwagen hat eine Strecke von 8 km zu fahren, wobei er die ersten 4 km mit 30 km/h, die zweiten 4 km aber mit 60 km/h fährt. Wie groß ist die Durchschnittsgeschwindigkeit?

Aufgabe 6

Jemand fährt eine Strecke von A nach B von 10 km mit 30 km/h. Er möchte die gleiche Strecke von B nach A so schnell zurückfahren, dass er einen "Schnitt" von 60 km/h hat (Durchschnitt für beide Strecken). Wie schnell muss er fahren?

Aufgabe 8

Schauspieler S (Rollenfach: jugendlicher Naturbursche) ist auf Tarzan-Filme spezialisiert. Gelegentlich spielt er auch in Krimis und Heimatfilmen mit. Sein Produzent führte die folgende Statistik:

Art des Films	Anzahl der Filme	darunter mit S
Tarzan	10	9
Krimis	12	2
Heimatfilme	8	1
Sex-Filme	82	0
Summe	112	12

- a) welcher Mittelwert und welche Art der graphischen Darstellung kann sinnvoll auf die Tabelle angewendet werden?
 b) Für das Merkmal "Art des Films" gilt (Richtiges ankreuzen)

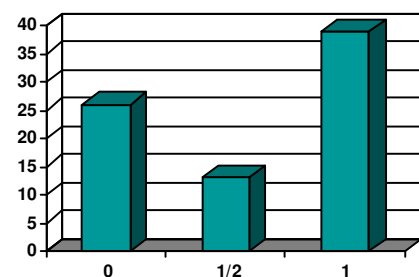
<input type="checkbox"/>	stetig	<input type="checkbox"/>	diskret	<input checked="" type="checkbox"/>	nominalskaliert
<input checked="" type="checkbox"/>	metrisch-skaliert	<input type="checkbox"/>	nichtnegativ	<input type="checkbox"/>	symmetrisch verteilt

Aufgabe 9

Der Angestellte A verdiene im Jahr ein Monatsgehalt von 2.400 Euro. Durch glückliche Umstände gelang es ihm, eine Gehaltserhöhung von 20% zu erhalten. Wegen schlechter Konjunkturlage wurde aber sein Gehalt im darauf folgenden Jahr wieder um 20% gekürzt. Wie viel verdient er jetzt? (Genauso viel wie zu Beginn?) Wie groß ist die durchschnittliche Wachstumsrate seines Einkommens? (Null Prozent?)

Aufgabe 11

Stultitia (= Torheit) und ihre Ziehmutter und Nympe Apaedia (= Beschränktheit), Tochter des Pan und Schutzgöttin der Statistiker, haben zusammen eine Volkszählung im Olymp veranstaltet. Sie zählten dabei 39 Götter, 13 Halbgötter (deshalb $x = \frac{1}{2}$) und 26 Nymphen (= niedrige Naturgötter) und ähnliche Dienstgrade. Gegen die folgende graphische Darstellung ihrer Ergebnisse sind gewichtige Einwendungen zu erheben! Welche?

**Aufgabe 12** (Demonstrationsbeispiel in der Vorlesung)

(Der optimale Standort des Stehgeigers von Budapest)

László Varga möchte den Bewohnern der Häuser A bis D der Bartók-Straße seine Sonate in d-moll op.125 zu Gehör bringen. Dabei wünscht der Tonkünstler, dass alle 25 Familien möglichst gleich gut die Gelegenheit haben, die Sonate zu hören und zu würdigen.

An welcher Stelle sollte sich Varga stellen, wenn die Straße wie folgt aussieht (Bild in der Vorlesung):

Gemessen vom Anfang der Straße stehen die Häuser an folgenden Stellen: A bei 0, B bei 20, C bei 50 und D bei 60 m. In den Häusern A und D wohnen jeweils 7 Familien, im Haus B 6 und im Haus C genau 5 Familien.

Man erkläre auch anhand dieser Aufgabe, was mit der "Schwerpunkt"-eigenschaft" des arithmetischen Mittels gemeint ist!

Aufgabe 13

Die 200 Beschäftigten einer Arbeitsstätte erhalten einen monatlichen Durchschnittslohn von 2.200 Euro. Aufgrund einer Lohnverhandlung soll das Monatsgehalt jedes Beschäftigten um 10% angehoben werden, und es soll ein einmaliges Urlaubsgeld in Höhe von 120 Euro gewährt werden. Wie groß ist das neue durchschnittliche Gehalt?

Aufgabe 14

Gegeben seien die folgenden Merkmalswerte 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 8. Man berechne die Varianz und die Standardabweichung.

Aufgabe 15

Schauspieler S (Rollenfach: Naturbursche, Tarzan) nahm für seine neun Tarzan-Filme folgende Gagen (in 1.000 DM) ein: 8, 7, 6, 6, 7, 8, 4, 5, 3. Bestimmen Sie den Zentralwert, das arithmetische Mittel \bar{x} und die Varianz s^2 .

Aufgabe 16

Gegeben seien drei klassierte Verteilungen (A, B, C)

Größenklasse	relative Häufigkeiten bei		
	A	B	C
0 bis unter 20	1/8	1/4	1/2
20 bis unter 40	3/4	1/2	0
40 bis unter 60	1/8	1/4	1/2

Welche Größenbeziehungen bestehen zwischen den drei Varianzen und Standardabweichungen? Versuchen Sie eine anschauliche (ausgehend von der graphischen Darstellung der Verteilungen) Interpretation des Ergebnisses!

Aufgabe 17

Vier Schüler A bis D haben in 3 Klassenarbeiten die folgenden Noten erreicht:

- A: 1, 2, 6
- B: 1, 3, 5
- C: 2, 3, 4
- E: 3, 3, 3

Sie haben alle den Notendurchschnitt 3, obgleich sie recht unterschiedlich gleichförmige Leistungen erbracht haben. Wie kann man dies durch ein Maß der Streuung für die vier Schüler zum Ausdruck bringen?

Aufgabe 19

Einer Statistik des Statistischen Landesamtes konnte man folgendes entnehmen über die Anzahl der Vampirbisse im Monat April 1989, gegliedert nach Städten:

BO: 120, BOT: 140, DO: 50, DU: 60, E: 20, MH: 35, OB: 130, RE: 75.

Bestimmen Sie den Zentralwert (Median), das arithmetische Mittel und die Varianz:

Aufgabe 20

Denn wer da hat, dem wird gegeben, dass er die Fülle habe, wer aber nicht hat, von dem wird genommen, das er hat" (Matth. 13, Vers 12)

Fünf Personen haben folgende Einkommen x vor Steuerabzug: 300 400 600 700 1000.

Durch eine unsoziale Steuergesetzgebung verbleibt ihnen *nach* Steuerabzug (bzw. bei Berücksichtigung von Steuervergünstigungen) noch ein verfügbares Einkommen in Höhe von y , berechnet nach folgender Formel:

$$y_i = \frac{3}{7}(x_i - \bar{x}).$$

Was gilt nun für den Mittelwert \bar{y} und die Varianz s_y^2 der Größe y

- Der Mittelwert von y ist kleiner als der von x , weil ja eine Steuer abgezogen wird (also $\bar{y} < \bar{x}$), die Varianz nimmt aber zu (also $s_y^2 > s_x^2$), weil die Steuergesetzgebung unsozial ist.
- Es gilt $\bar{y} = \bar{x} = 600$, und die Varianz wird aber gut doppelt so groß, und zwar genau $s_y^2 = (10/7)^2 s_x^2 = 2,0408 s_x^2$
- Die Varianz von x ist positiv und die von y ist negativ. Die Mittelwerte sind aber eigenartigerweise gleich und zwar 600.
- Alle Antworten a) bis c) sind falsch.

Aufgabe 21

Eine Autovermietung stellt fest, dass die vermieteten Wagen täglich im Durchschnitt 120 km bei einer Standardabweichung von 25 km zurücklegen. Mit welchen durchschnittlichen täglichen Einnahmen pro Wagen ist zu rechnen, wenn die festen Mietkosten pro Tag 30 Euro und die Kosten pro Kilometer 0,40 Euro betragen? Wie groß sind Varianz und Standardabweichung der täglichen Einnahmen pro Wagen?

Aufgabe 22

Ein Betrieb hat zwei Zweigniederlassungen (A und B). Für die Anzahl n der Beschäftigten, das Durchschnittseinkommen (E), Gewinn (G) und Kapital (K) gilt:

	Beschäftigte (n)	Einkommen (E)	Gewinn (G)	Kapital (K)
A	400	1560	300	2000
B	600	1720	800	2000

- Wie viele und welche Merkmale sind in dieser Tabelle dargestellt und wie kann man welches Merkmal geeignet graphisch darstellen?
- Was sind die Merkmalsausprägungen?
- Welche Größen sind absolute Häufigkeiten und welche sind Merkmalssummen?
- Wie groß ist das Durchschnittseinkommen der Beschäftigten im Gesamtunternehmen?
- Wie groß ist die Rentabilität (G/K) in den Zweigniederlassungen und im Gesamtunternehmen? (Interpretieren Sie das Ergebnis).

Aufgabe 23

Für den Umsatz x eines Wirtschaftszweiges sei die folgende Statistik gegeben:

Umsatzgrößenklasse von ... bis unter ... (in 1000 Euro)	Anzahl der Unterneh- men	Umsatz insgesamt	Mittelwert (mittlerer Umsatz)	Standardab- weichung
0 20	80	800	10	2
20 50	60	1800	30	8
50 100	40	3400	85	20
100 1000	20	4000	200	40

Wählen Sie eine geeignete graphische Darstellung dieser Zahlenergebnisse und berechnen Sie den Gesamt*-Mittelwert **und die Gesamtvarianz!**

* für die gesamte Branche

Aufgabe 24 (Auch Demo-Aufgabe in der Vorlesung)

In einem Studentenheim gäbe es ausschließlich Wohngemeinschaften für $x_i = 2, 3, 4$ und 6 Studenten mit den Häufigkeiten n_i :

x_i	n_i
2	40
3	30
4	25
6	5

Man stelle die Häufigkeitsverteilung graphisch dar und bestimme Mittelwert \bar{x} und Varianz s_x^2 dieser Verteilung sowie deren Schiefe

Aufgabe 31 (Demonstrationsbeispiel für den Struktureffekt)

Die Sterberate $m = D/L$ (oder "Todesrate" früher auch "Sterbeziffer" genannt, d.h. die Zahl der Gestorbenen je 1.000 Lebende) anglikanischer Geistlicher ist viel höher (0,55‰) als die der Bergarbeiter (0,15‰), wie die folgende Tabelle zeigt:

L_x = Lebende des Alters (der Altersklasse) x in 1000

D_x = Gestorbene des Alters (der Altersklasse) x

Altersklasse	Geistliche		Bergarbeiter	
	L_x	D_x	L_x	D_x
unter 50	100	10	900	90
über 50	900	540	100	60
insgesamt	1000	550	1000	150

Kann man aus den Angaben schließen, dass der Beruf des unter Tage arbeitenden Bergmanns "gesünder" ist als der des Geistlichen? Bestimmen Sie das Durchschnittsalter der Lebenden und der Gestorbenen der beiden Berufsgruppen (Klassenobergrenze 100 Jahre).

Aufgabe 32

Einer amerikanischen Statistik zufolge ergeben sich folgende Zahlen über die Unfallhäufigkeit von Männern und Frauen (aus dem Buch H. Zeisel, Say it with figures)

Autounfall	Männer	Frauen	Summe
wenigstens einmal	3.122	2.255	5.377
nie (0 mal)	3.958	4.695	8.653
Summe	7.080	6.950	14.030

Es gibt allerdings auch Daten für zwei Teilgesamtheiten

häufiges Fahren (mehr als 10.000 Meilen)

	Männer	Frauen	Summe
> 0 mal	2605	996	3601
0 mal	2405	919	3324
Summe	5010	1915	6925

seltenes Fahren (weniger als 10.000 Meilen)

	Männer	Frauen	Summe
> 0 mal	517	1259	1776
0 mal	1553	3776	5329
Summe	2070	5035	7105

Kann man aufgrund dieser Zahlen schließen, dass Frauen bessere (sicherere) Autofahrer sind als Männer?

Aufgabe 33

Es mögen die folgenden Zahlen gelten

Ehescheidungen 130 Tausend	Eheschließungen 400 Tausend
Wohnbevölkerung 60 Millionen	Bestand an Ehen 15 Millionen

Die Scheidungsquote (Ehescheidungen auf 1000 Einwohner) betrug demnach 2,16. Bedeutet dies, dass nur ca. 0,2% der Ehen vor dem Scheidungsrichter enden? (Begründung!)¹

Aufgabe 40

Ein Unternehmen bestehe aus zwei Abteilungen, A und B. Es gelte, die Rentabilität (Gewinn/Kapitaleinsatz) des Unternehmens im Zeitablauf zu beurteilen

Abteilung	Zeitraum t		Zeitraum t+1	
	Gewinn	Kapital*	Gewinn	Kapital*
A	80	500	240	1600
B	20	500	12	400

* in der Mitte des Zeitraums

- a) Man berechne die Rentabilität des Unternehmens für die Zeiträume t und t+1
- b) Die Rentabilität des Gesamtunternehmens ist gestiegen, weil

die Rentabilitäten der Abteilungen gestiegen sind	sich die Struktur des Kapitaleinsatzes verändert hat	beide Effekte eingetreten sind
---	--	--------------------------------

Aufgabe 46

Gegeben seien zur Basiszeit (0) und zur Berichtszeit (t) die Preise zweier Waren, wobei die Ware Tomaten jeweils bezogen ist auf ein Kilogramm

Ware	Preis p_{i0} (in 0)	Preis p_{it} (in t)
Tomaten (Salatware)	3	4
helles Mischbrot	2	4

Man berechne Durchschnittspreise \bar{p}_0 und \bar{p}_t sowie den von Dutot (1738) vorgeschlagenen Index \bar{p}_t/\bar{p}_0 . Wie ändert sich der Preisindex nach Dutot, wenn man die Tomatenpreise nicht auf der Basis von kg sondern von Pfund notiert?

Aufgabe 47

Diplom-Kaufmann K aus E und Gattin gehen leidenschaftlich gern ins Kino. Von Zeit zu Zeit schätzen sie etwas Bildendes im "Filmkunst", und sie lassen sich auch schon mal politisieren im

¹ Man ist doch sehr viel höhere Scheidungsquoten gewohnt. Woher kommt dann diese niedrige Zahl?

"Alternativkino". Die Ausgaben des Ehepaars für Kinobesuche sind von 1998 bis 2003 nominal um 40vH und real um 20vH gestiegen. Für die Eintrittspreise der Kinos gelte 1998 und 2003:

Nr.	Kino	1998	2003
1	Filmkunst FIKU	15	12
2	Alternativ AKI	9	12
3	Kolossal KOKI	12	24
4	Bahnhof BAKI	20	24

- Man berechne den Preisindex nach Laspeyres, wenn sich die Ausgabenanteile für Kinobesuche bei dem Ehepaar 1978 wie folgt verhalten: 1 : 3 : 2 : 1 (= Aufteilung der Ausgaben auf die vier Kinos).
- Berechnen Sie den Preis- und Mengenindex nach Paasche!
- Angenommen, es seien nur die oben mitgeteilten Preise bekannt und man kann nur davon ausgehen, dass K seine heimlichen Besuche im Bahnhofskino 1983 unterlässt und auch nicht mehr das Alternativkino aufsucht. Wie groß ist dann der Paasche Preisindex *mindestens*, und wie groß ist er *höchstens*?

Aufgabe 48

Um seinen Not leidenden staatlichen Dienstleistungsbetrieben finanziell auf die Sprünge zu helfen, plant ein Minister eine Gebührenerhöhung bei zwei von 200 Gebührenarten (A und B) und zwar um 50% (bei A) und um 100% (bei B). Die Ausgabenanteile für die Dienstleistungen A und B waren bei den Konsumenten bisher 10 bzw. 20%.

- Wie groß ist der Preisindex nach Laspeyres?
- Je nachdem, wie die Verbraucher reagieren, kann der Paasche Index zwischen ... und ... schwanken.

Aufgabe 49

Der Dipl. Kfm. K aus E hat sich selbständig gemacht. Bisher reiste er auf Spesen, jetzt kostet es ihn sein eigenes Geld. Deshalb interessiert ihn die Entwicklung der Preise für drei Güter, die sich wie folgt verändert hatten

Ware	Preise		Mengen	
	t = 0	t = 1	t = 0	t = 1
A Übernachtung	100	120	8	8
B Verpflegung	55	60	3	6
C Fahrtkosten	4	4,8	10	5

- Wie stark sind die Ausgaben gestiegen? Ist die Ausgabensteigerung ein sinnvolles Maß für die Veränderung des Preisniveaus?
- Berechnen Sie Preis- und Mengenmesszahlen der Waren A, B und C
- Zeigen Sie, dass die Durchschnittswerte um 47,8 vH gestiegen sind
- Wie groß sind die Ausgabenanteile zur Basiszeit?
- Berechnen Sie die Preisindizes nach Laspeyres und nach Paasche!

Aufgabe 50

Angenommen, das Sozialprodukt sei *nominal* (zu jeweiligen Preisen) um 10vH gestiegen, *real* (zu konstanten Preisen eines Basisjahres) aber nur um 6vH. Welchen Wert nimmt dann der Preisindex des Sozialprodukts² (ein Preisindex nach Paasche) an?

Aufgabe 51

Die *Preise* für die Lebenshaltung (Verbraucherpreise) steigen um 20%. Gleichwohl bleiben die Lebenshaltungskosten gleich. Ist das möglich? Wenn ja, wie?

Aufgabe 52

Der Private Verbrauch (aus der Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnung) habe sich nominal (zu jeweiligen Preisen) um 50% erhöht. Der Preisindex des Privaten Verbrauchs (ein Paasche Preisindex, 2000 = 100) "stehe auf" 125. Um wie viel hat sich der Private Verbrauch real (zu konstanten Preisen des Basisjahres 2000) erhöht?

Aufgabe 53

Zwischen 1980 und 2000 hat sich das wertmäßige Bruttosozialprodukt verdoppelt; das volumenmäßige (in Preisen von 1980) Sozialprodukt ist dagegen von 1980 bis 2000 nur um 1/3 gestiegen. Der "Preisindex des Sozialprodukts" 1980 = 100 beträgt somit 2000 (Richtiges ankreuzen):

	150 vH		166,67 vH		133,33 vH		66,67 vH
--	--------	--	-----------	--	-----------	--	----------

Aufgabe 54

Ein Haushalt habe eine Indifferenzkurve dergestalt, dass er sich bezüglich der Kombinationen $x_A = 1$ und $x_B = 4$ (zur Zeit $t = 0$) und $x_A = 4$ und $x_B = 1$ (zur Zeit $t = 1$) indifferent verhält. Für die Preise der beiden Güter möge zu den beiden Zeitpunkten gelten:

Gut	Preis p_{i0}	Preis p_{i1}
A	4	3
B	2	4

Berechnen Sie den Preisindex nach Laspeyres und nach Paasche sowie die Zunahme der Gesamtausgaben (Kostenindex)!

Aufgabe 56 (*Demonstrationsbeispiel für das Streudiagramm; modernere Fassung Aufg. 62*)

König Egon der XIII, auch der "Labile" genannt, hatte zwei Mätressen, die Pompadur (D) und die Pompamolll (M), die miteinander heftig um die Gunst des Königs konkurrierten. Dass sie jeweils verschiedene Seiten des empfindsamen Gemüts des Königs ansprachen und für ihn deshalb komplementär waren, steht seit der These des berühmten Historikers H in allen Lehrbüchern. H's

² jetzt "Nationaleinkommen" statt "Sozialprodukt". Man beachte auch, dass es in der amtlichen Statistik stets heißt vH, nicht v.H.

jüngerer Kollege h glaubt dies jedoch aufgrund einer seinerzeit von der Hofschranze S verfassten Notiz empirisch widerlegen zu können. Aus dieser Notiz geht hervor, wie Egon seine Freizeit (gemessen in Stunden) in den letzten 10 Wochen des Jahres 1742 auf die beiden Damen aufteilte:

Dur (D)	40	30	20	10	40	30	50	50	60	70
Moll (M)	30	10	30	40	20	30	50	30	40	20

Zeichnen Sie das Streudiagramm und berechnen Sie die Korrelation zwischen D und M, und folgern Sie daraus, ob H oder h Recht hat!

Aufgabe 57

- a) Bei einer Untersuchung lag der Korrelationskoeffizient r zwischen dem Alter des Ehemannes und dem der Ehefrau nahe bei +1. Bedeutet dies, dass:
- bei den meisten Ehepaaren Mann und Frau etwa gleich alt sind?
 - die Differenz zwischen dem Alter des Ehemannes und der Ehefrau bei den meisten Ehepaaren etwa gleich groß ist?
- b) Erfahrungsgemäß sterben mehr Menschen im Bett als im Zug oder in einem anderen Ort (selbst im gefährlichen Flugzeug sterben weniger Menschen). Folglich ist von allen Aufenthaltsorten das Bett der gefährlichste Ort, der unbedingt zu meiden ist. Kann man so schließen? Wenn nein: warum nicht?

Aufgabe 58

Die Korrelation (berechnet für eine Stichprobe von $n = 20$) zwischen den Punktzahlen X und Y von zwei Klausuraufgaben sei nur 0,224, so dass die Bestimmtheit r^2 nur 0,05 beträgt. Bedeutet dies, dass: (Bitte antworten Sie mit "richtig" bzw. "ja" (R) oder "falsch"/"nein" (F))

	R	F
nur 5% der Punkte genau auf der Regressionsgerade liegen und 95% oberhalb oder unterhalb der Regressionsgeraden		
nur bei einem von 20 Klausurteilnehmern ($1/20 = 0,05$) die Punktzahl der Aufgabe Y von der der Aufgabe X abwich		
nur bei einem von 20 Klausurteilnehmern die Punktzahl in der Aufgabe Y von der abwich, die aufgrund der Punktzahl in Aufgabe X zu erwarten war		

Aufgabe 59

Psychologen mögen festgestellt haben, dass ein reichhaltiges Warenangebot der Kaufkraft der Kundschaft förderlich sei, während gähnende Leere auf den Regalen eines Einzelhandelsgeschäfts im Allgemeinen nicht besonders anregend wirke. Zwischen dem Wert (in 1000 Euro) des Warensortiments (w) und den durchschnittlichen täglichen Verkäufen (v) bestehe folgender Zusammenhang:

Waren w	400	600	700	800	1000
Verkäufe v	4	6	10	6	4

Man zeichne das Streudiagramm und berechne die Regressionsgerade für V (abhängige Variable), also $\hat{v}_i = a + bx_i$,

Aufgabe 60 (Bild in der Vorlesung)

Einer fehlgeschlagenen Intrige bei Hofe hat es Graf Giselher von Gelsenkirchen zu verdanken, dass er in einem Burgverlies schmachtet. Statt vor dem Verwaltungsgericht Gelsenkirchen zu klagen, (diese neuzeitliche Denkweise war Giselher noch vollkommen fremd) machte er sich daran, die meterdicke Wand zu durchbohren. Es gibt Tage, an denen er $y = 1$, $y = 2$ und $y = 3$ Zentimeter der Wand wegschaben kann. Zwischen dem Zeitaufwand X des Schabens (in Stunden) und der Zentimeterleistung Y des Verdünnens der Wand bestehe - aufgrund von 10 Tagen Beobachtung, über die der Graf Aufzeichnungen machte - folgender Zusammenhang:

	$y = 1$ cm	$y = 2$ cm	$y = 3$ cm
$x = 6$ Std.	1	1	0
$x = 10$ Std.	1	2	1
$x = 15$ Std.	0	2	2

- a) Man bestimme und zeichne (Skizze) die empirische Regressionslinie zur Schätzung von y ! Die Regressionslinie verläuft (Richtiges ankreuzen)

<input type="checkbox"/>	linear	<input type="checkbox"/>	nichtlinear
--------------------------	--------	--------------------------	-------------

und die Korrelation r_{xy} ist

<input type="checkbox"/>	positiv	<input type="checkbox"/>	negativ
--------------------------	---------	--------------------------	---------

- b) Man bestimme die Kovarianz zwischen X und Y !
 c) Wenn der Graf 1 cm Wand einmal in 6 Stunden und einmal in 10 Stunden abschabt, braucht er dann im Mittel 8 oder 7,5 Stunden? Zeigen Sie, dass das harmonische Mittel in der Tat 7,5 ist!

Aufgabe 61

Der Student S glaubt wieder einmal, eine Recht-Klausur ganz astrein gelöst zu haben. Mit seiner Selbsteinschätzung (Variable X), die mehr oder weniger gefühlsmäßig und zufällig, weniger aus tiefer juristischer Einsicht erfolgt, liegt er zwar oft in der Tendenz ganz richtig. Die genaue Klausurnote (Y) erscheint ihm aber fast immer rätselhaft und unerklärlich. So wie es ihm geht, ergeht es jedoch auch seinen 35 Mitstudenten. Dass die Noten bei den Rechtsklausuren irgendwie mysteriös sind glauben inzwischen alle. Das zeigt sich auch bei der Gegenüberstellung von X und Y für alle 36 Studenten:

		Variable Y					
Variable X		1	2	3	4	5	Summe
1		1	2	3	2	0	
2		1	2	2	1	0	
3		0	1	2	2	1	
4		0	0	3	4	3	
5			2	1	1	2	
Summe							

Bestimmen Sie die Randverteilungen und deren Mittelwerte sowie die empirischen Regressionslinien.

Aufgabe 62 *Statistik als konkrete Lebenshilfe*

Nachdem Andrea (A) zwei Jahre mit Charlie (C) ging, haben sie sich `ne echt besitzhafte Identität aufgebaut, aus der sich A nun emanzipieren will. Sie ist jetzt mehr so auf Bernd (B) drauf, kann aber noch nicht total auf B einflippen. Und weil ihr bisheriger Typ C die Trennungsverarbeitung erst einmal konkret abgescheckt haben will und das, was zwischen A und B emotional so läuft noch nicht so auffangen kann, haben sie jetzt alle drei beschlossen, das Problem bis spätestens zum nächsten Jahr zu dritt ganz konkret aufzuarbeiten. Andrea teilte deshalb in den folgenden 12 Monaten ihre Zeit - sofern sie überhaupt einen Bock auf einen Typ hatte - auf B und C wie folgt auf:

Monat	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Charlie(x_C)	3	3	6	9	3	3	3	6	9	6	12	12
Bernd (x_B)	18	18	18	12	18	9	12	12	18	12	9	3

- a) Man bestimme die zweidimensionale Häufigkeitsverteilung von B und C sowie die Randverteilungen. Man erhält für die Standardabweichungen $s_C = 3,34$ und $s_B = 4,66$ sowie für die Kovarianz $s_{BC} = - 8,56$. Bestimmen Sie die Regressionsgeraden und den Korrelationskoeffizienten (r_{BC}).
- b) Bestimmen Sie die Regressionslinien.

Aufgabe 63

Es sei X der Intelligenzquotient (IQ) des Vaters und Y der des Sohnes. Psychologen fanden heraus, dass der IQ (praktisch in allen Generationen) mit Mittelwert 100 und Standardabweichung 16,4 symmetrisch verteilt ist, und dass die Korrelation zwischen dem IQ des Vaters und des Sohnes $r_{xy} = + 0,5$ ist:

- a) Man bestimme die Kovarianz und
- b) die Regressionsgerade $\hat{y} = a + bx$.
- c) Welcher IQ ist für den Sohn zu erwarten, wenn der Vater einen IQ von 75 (d.h. leichte Debität) und welche, wenn der Vater einen IQ von 130 (überragende Intelligenz) hat?
- d) Kann man aufgrund der Ergebnisse schließen, dass durch die Vererbung ein unaufhaltsamer Trend zum Mittelmaß besteht, so dass es nach einigen Generationen nur noch Personen mit einem IQ von 100 gibt (zu einem ähnlichen Schluss gelangten amerikanische Wirtschaftsforscher bei der langfristigen Analyse der Gewinne von 46 Unternehmen in dem Buch "The Triumph of Mediocrity in Business")?

Aufgabe 64 (Demonstrationsbeispiel mit Bild in der Vorlesung)

Der statistisch geschulte Diplom Kaufmann K aus E stellte die folgenden Zusammenhänge zwischen der Außentemperatur X (in Grad Celsius) und der Dauer seines Weges zum Arbeitsplatz Y (in Minuten) fest:

X	- 20	-10	0	10	20
Y	80	40	45	20	20

- a) Bestimmen Sie die Regressionsgerade $\hat{y} = a + bx$
- b) K braucht bei 35^0 Hitze nur Minuten zum Arbeitsplatz und bei -30^0 Kälte nur Minuten

c) Führen Sie die Berechnungen unter a und b auch durch für die folgende Variante der Aufgabe:

X	- 20	-10	0	10	20
Y	30	25	20	15	10

Aufgabe 65

Bekanntlich gibt es Fernsehkünstler, die es verstehen, junge Menschen zu begeistern. Andererseits ist jedoch das jugendliche Gemüt empfindsam und ungeduldig und es neigt zum Perfekten und zu raschem Wandel. Es überrascht daher nicht, dass die Mitgliederzahl (in 1000) des "von der Lippe Fan Clubs" (vdLFC) gewissen Schwankungen unterworfen ist, denn nicht alle vom Meister vorgetragene Songs konnten Gefallen finden. Für die Mitgliederzahl des vdLFC galten in den letzten 7 Monaten die folgenden Zahlen:

Monat	1	2	3	4	5	6	7
Mitglieder	15	20	25	30	29	31	39
gleit. Mit.							

Man berechne gleitende Mittelwerte zu je drei Monaten sowie

Aufgabe 66 (mehr zu diesem Thema vgl. Anhang, S. 21f)

Angenommen, das Ruhrgebiet sei, obgleich seine Kultur dem Vampirismus fremd gegenüberstehen mag, vom Grafen Dracula besucht worden. Aufgrund gewisser Eingewöhnungsschwierigkeiten schwankte jedoch die Aktivität des Grafen erheblich. Auch die von ihm durch Bisse zu Vampiren gemachten Einwohner waren nicht so produktiv, wie Dracula es erwartete. Das Statistische Landesamt NRW habe die folgenden Zahlen über Vampirbiss-Vorkommen der letzten 8 Monate ermittelt: ($t = 1$ bis $t = 8$): 15, 20, 25, 30, 29, 31, 39, 38.

- Man bestimme die gleitenden Mittelwerte (GM) zu je drei Werten sowie die Abweichungen der Ursprungswerte (AU) von den GM und
- einen Prognosewert für den neunten Monat mit der Methode des exponentiellen Glättens (mit $\alpha = 0,2$), sowie
- Messzahlen zur Basis $t = 2$.

Aufgabe 67

Der Kartenvorverkauf für das Konzert des berühmten Dirigenten D ergab in den ersten 15 Tagen die folgenden Werte ($t = 0, 1, \dots, 14$) für die Anzahl K_t der verkauften Karten:

40	50	60	100	110	120	160	170	180	230	240	280	290	300
----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

- Stellen sie die Zeitreihe K_t graphisch dar
- Berechnen und interpretieren Sie
 - gleitende 3-Tages-Durchschnitte der Zeitreihe K_t
 - einen linearen Trend $K_t = a + bt$ nach der Methode der kleinsten Quadrate!

Aufgabe 68

Der Umsatz (in 1000 Euro) der Firma X habe sich in den letzten 6 Monaten wie folgt entwickelt: 85, 68, 57, 55, 38, 27. Man berechne gleitende 3-Monatsdurchschnitte für den Umsatz. Die Werte liegen auf einer Geraden. Wie lautet diese?

Aufgabe 69

Angenommen, die Umsätze eines Unternehmens haben sich in den letzten sechs Quartalen wie folgt entwickelt:

Quartal	1	2	3	4	5	6
Umsatz	1800	1600	1900	2100	1400	2000

Berechnen Sie *zentrierte* gleitende Vier-Quartals-Durchschnitte!

Aufgabe 70 (Bild in der Vorlesung)

Die Hausfrau H wusste stets kulinarischen Genuss zu schätzen und entwickelte unterdessen ein Raumbedürfnis welches hienieden sonst nicht schicklich ist.

Sie trachtete deshalb hinfort danach, durch Schlankheitsmittel ihre Proportionen auf ein gefälligeres Maß zu reduzieren.

Dabei gebrach es ihr jedoch an der gebotenen Konsequenz, so dass ihr Gewicht y (in kg) stark schwankte und sich eine nachhaltige Reduktion nicht einstellen wollte, wie die folgenden Zahlen zeigen:

t	0	1	2	3	4	5	6
t^*	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3
y_t	120	130	125	120	130	125	120

Man bestimme

- Gleitende Durchschnitte zu jeweils 3 Perioden,
- einen linearen Trend mit der Methode der kleinsten Quadrate und
- einen Prognosewert für die Periode 7 mit dem Methode des exponentiellen Glättens ($\alpha = 0,2$)!

Teil 2: Aufgaben zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und induktiven Statistik**Aufgabe 71** (Aufgabe zur Kombinatorik, Bild in der Vorlesung)

Die Hausfrau H³ kann sich nicht damit abfinden, ihre Wohnung mit Ameisen (A), Schaben und Kakerlaken (K), Spinnen (S), Mäusen (M), Wanzen (W) und Ratten (R) teilen zu müssen. Sie versuchte deshalb zunächst ihren Mitbewohnern mit Universal-Schädlingsbekämpfern (Chemikalien, die $n > 1$ Ungezieferarten vernichten) zu Leibe zu rücken, ging dann jedoch zu einer Strategie des gezielten (artspezifischen) overkills über.

- Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür, dass ein Schädlingsbekämpfungsmittel von $n = 6$

³ Bild in der Vorlesung

Schädlingsarten mindestens $m = 2$ Arten vernichtet?

- b) Um wie viel ist die Anzahl zu verringern, wenn bedacht wird, dass kein Mittel existiert, das zugleich Ratten und Wanzen vernichtet?

Aufgabe 72

Bei einem Kartenspiel mit 32 Karten darf ein Spieler zweimal ziehen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er entweder im ersten oder im zweiten Zug einen Buben zieht

- a) bei Ziehen ohne Zurücklegen
b) bei Ziehen mit Zurücklegen?

Aufgabe 73

Es werde mit zwei Würfeln gewürfelt und die dabei zu betrachtenden Ereignisse seien

A = "der erste Würfel zeigt eine 5 oder eine 6"

B = "der zweite Würfel zeigt Zahlen zwischen 4 und 6"

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass entweder A oder B eintritt [oder beides], also $P(A \cup B)$?

Aufgabe 74

Die Kunden eines Kaufhauses kaufen im 1. Stock mit einer Wahrscheinlichkeit von $P(A) = 0,15$, im 2. Stock mit $P(B) = 0,2$ und sowohl im ersten als auch im zweiten Stock mit $P(A \cap B) = 0,03$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(A \cup B)$, dass ein Kunde entweder im ersten oder im zweiten Stock einkauft?

Aufgabe 76

Auf einer einsamen Insel sitzt der schiffbrüchige Diplom-Kaufmann K aus E. Dank seiner vorzüglichen Statistikausbildung ist er in der Lage, die Wahrscheinlichkeit dafür zu berechnen, dass er im Verlaufe des nächsten Jahres gerettet wird (Ereignis R), was jedoch voraussetzt, dass ein Schiff in Sichtweite vorbeifährt (S), was K an jedem Tag des Jahres für gleich wahrscheinlich hält, so dass gilt $P(S) = 1/365$. Für die Ereignisse R und S gilt (Richtiges ankreuzen):

<input type="checkbox"/>	R ist unabhängig von S	<input type="checkbox"/>	R ist unverträglich mit S
<input type="checkbox"/>	S ist ein unmögliches Ereignis	<input type="checkbox"/>	R ist ein sicheres Ereignis
<input type="checkbox"/>	R ist ein Teilereignis von S	<input type="checkbox"/>	R ist kein Zufallsereignis

Aufgabe 77 (Bild in der Vorlesung)

Der im Außendienst (Versicherungen!) beschäftigte Diplom Kaufmann K aus E ist leider sehr eifersüchtig, da seine Gattin Kontakt mit einem Nebenbuhler pflegt.

Die zu betrachtenden Ereignisse sind wie folgt definiert:

N = Nebenbuhler ist zu Hause, K = Dipl. Kfm. K ist zu Hause

Für die Wahrscheinlichkeiten gilt

$P(N K) = 0,01$	$P(N \bar{K}) = 0,85$	$P(K) = 0,6$
-----------------	-----------------------	--------------

Wie wahrscheinlich ist es, dass N im Hause ist und wie wahrscheinlich ist es, dass K in seinem Haus den Nebenbuhler N trifft?

Aufgabe 78 (Bild in der Vorlesung)

Der eifersüchtigen Hausfrau H gelingt es trotz verfeinerter Techniken der Befragung und Beeinflussung ihres Ehemannes E nicht, sich Klarheit über gewisse Vorgänge auf einer Geschäftsreise des E zu verschaffen.

Bei den allabendlichen Verhören schläft E mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,75 frühzeitig und stumm ein, ohne dass es zu einem klärenden Gespräch kommt. Sofern E nicht einschläft, besteht auch nur eine geringe Wahrscheinlichkeit von 0,2 dafür, dass es zu einem Gespräch kommt. Wie wahrscheinlich ist es, dass E einem Verhör seiner eifersüchtigen Gattin nicht ausweicht?

Aufgabe 79

(Wertpapiermischung, portfolio-selection)

Diplom-Kaufmann K aus E erwägt sein Vermögen in drei Wertpapieren A, B, C anzulegen. Er legt einen Teil a in Papier A, b in B und c in C an ($a + b + c = 1$). Als Maß der Gewinnträchtigkeit einer Anlage gilt der zu erwartende Kurswert $E(X)$ und als Maß des Risikos die Varianz $V(X) = \sigma_x^2$, bzw. Standardabweichung. Für die Kurse der drei Papiere gelte:

Erwartungswerte	Varianzen
$E(X_A) = 100$	$V(X_A) = 25$
$E(X_B) = 180$	$V(X_B) = 4$
$E(X_C) = 200$	$V(X_C) = 49$

Die Kurse korrelieren wie folgt miteinander

	A	B	C
A		$r_{AB} = -1$	$r_{AC} = +1$
B			$r_{BC} = -0,1$
C			

- a) Man bestimme Erwartungswert und Varianz der Größe $Z = aX_A + bX_B + cX_C$, wenn Diplom-Kaufmann K aus E sein Vermögen
- zu gleichen Teilen nur in den Papieren A und C investiert (also $a = c = 1/2$, $b = 0$)
 - zu je einem Drittel in den Papieren A, B und C investiert (also $a = b = c = 1/3$).
- b) Im zweiten Fall ist $E(Z)$ größer und $V(Z)$ erheblich kleiner als im ersten Fall, d. h. diese Wertpapieranlage (-mischung) ist sowohl ertragreicher als auch weniger riskant. Zeigen Sie, warum dieses Ergebnis, das ja auch mit der Erfahrung (Vorteile der Risikostreuung) im Einklang ist, zustande kommt.

Aufgabe 80

Wie wahrscheinlich ist es, ein Russisches Roulette (mit einem Trommelrevolver, der 6 Patronen faßt, aber nur mit einer geladen ist) a) genau 3 Runden und b) mehr als 5 Runden zu überleben (geometrische Verteilung!)?

Aufgabe 81 (Bild in der Vorlesung, Demonstrationsbeispiel für die Binomialverteilung)

Trotz der wegen seines Studiums bei der Verwaltungs- und Wirtschaftsakademie Essen nur spärlich bemessenen Freizeit ist der Bankangestellte B eifrig bemüht, sich körperlich zu ertüchtigen. Es ist ihm dabei nicht unwichtig, Anklang bei der Damenwelt zu finden. Dabei tritt jedoch das Problem auf, dass der spezifische Charme eines Buchhalters nicht alle Frauen zu überzeugen vermag. Es ist vielmehr so, dass nur bei jeder achten Frau Anzeichen zu verspüren sind, dass sie der Faszination des B etwas abgewinnen kann.

- a) Wie wahrscheinlich ist es, dass B bei 5 Versuchen (mit Zurücklegen)
- 1) bei keiner
 - 2) bei einer
 - 3) bei höchstens zwei
- Frauen Anklang findet?
- b) Welche Bedeutung hat die Formulierung "mit Zurücklegen" in diesem Zusammenhang?

Aufgabe 82

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, unter 30 Familien mit jeweils 2 Kindern 20 Familien zu finden, in denen beide Kinder Mädchen sind?

Aufgabe 83

Eine multiple Choice Klausur bestehe aus 25 Aufgaben mit jeweils 4 Antwortmöglichkeiten, wovon stets nur eine richtig ist und anzukreuzen ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Student durch bloßes Raten *genau* 10 Aufgaben richtig löst? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er *mindestens* 10 Aufgaben richtig löst?

Aufgabe 84 (Demonstrationsbeispiel für die hypergeometrische Verteilung)

Der alternde Playboy Z ist in den letzten Jahren nur 10 Frauen begegnet, bei denen er Anklang gefunden hat. Zwei von ihnen hat er geheiratet. Erfahrungsgemäß ist ihm nur bei jeder fünften Frau ein zufrieden stellendes Zusammenleben über längere Zeit möglich. Wie wahrscheinlich ist es, dass Z beide Male die "falsche" Frau geheiratet hat, wenn er seine Partnerwahl mehr oder weniger dem Zufall überlassen hat?

Ist die Wahrscheinlichkeit halb so groß, wenn Z *ceteris paribus* 20 statt 10 Frauen begegnet wäre? siehe Lippisches Theorem über den Nutzen der Monogamie!!

Aufgabe 85 (*small-sample Problem aus 1001-Nacht*)

Scheich Dschamschid beobachtete auf seinen letzten drei Flügen von Isfahan nach Mesched bereits mit großer Besorgnis die heftigen Streitereien zwischen seinen beiden Lieblingsfrauen Nahid und Mahnoz. Nachdem allerdings auf seinem vierten Flug eine der Damen in den fliegenden Teppich gebissen hatte (vor Wut über die andere), so dass dieser über der pers. Salzwüste abstürzte, was jedoch alle drei Personen überlebten, fragt sich der Scheich nun: Wie wahrscheinlich

ist ein Anteil von $p = 1/4$ von Abstürzen aus dem genannten Grunde bei Stichproben vom Umfang $n = 4$, wenn der wahre Anteil⁴ in der Grundgesamtheit $\pi = \dots$ ist?

Aufgabe 86 (Formulierung als Schätzproblem)

In einer Stichprobe von $n = 50$ Geräten (aus einer Produktionsserie von $N = 500$ Stück) befanden sich 2 unbrauchbare Geräte (so dass der Ausschussanteil in der Stichprobe $p = 2/50 = 4/100 = 0,04$ war). Der wahre Ausschussanteil in der Grundgesamtheit ist nicht bekannt.

Man bestimme ein symmetrisches 95%-Konfidenzintervall für den Ausschussanteil π in der Grundgesamtheit.

Aufgabe 87 (Formulierung als Testproblem)

In einer Stichprobe von $n = 50$ Geräten (aus einer Produktionsserie von $N = 500$ Stück) befanden sich zwei unbrauchbare Geräte.

Im Kaufvertrag wurde ein Ausschussanteil der Produktionsserie von 1% garantiert. Darf der Kunde die Abnahme der Serie verweigern, weil der Ausschussanteil in der Stichprobe 4% statt 1% beträgt?

Weitere Hinweise:

Die Abnahmekontrolle soll mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95% durchgeführt werden, d.h. mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit (einem Signifikanzniveau) von 5%, einseitiger Test, denn: $H_0: \pi = 0,01$ (Hypothese des Verkäufers) und $H_1: \pi > 0,01$ (Hypothese des Käufers).

Aufgabe 89

Eine Zuckerabfüllmaschine verpackt automatisch Ein-Kilo-Packungen von Zucker. Um die Arbeitsweise der Maschine zu kontrollieren, werden laufend Stichproben entnommen. Sie ergeben: einen Mittelwert von $\mu = 1,02$ kg und eine Standardabweichung von 0,008 kg. Es kann angenommen werden, dass die Gewinne normalverteilt sind.

- Wieviel Prozent der Packungen haben Untergewicht (< 1 kg)?
- Die Gewerbeaufsicht verlangt, dass höchstens 5% der Packungen Untergewicht haben dürfen. Berechnen Sie den kleinsten erlaubten Wert für den Mittelwert, wenn die Maschine diese Auflage erfüllen soll.

Aufgabe 90

In einer Gemeinde mit 10.000 Erwerbstätigen wurden durch eine Stichprobe im Umfang $n = 100$ folgende Werte für die Verteilung der Wochenverdienste festgestellt: $\bar{x} = 400$ Euro. Die Standardabweichung in der Grundgesamtheit sei bekannt; sie beträgt 50 Euro.

- Bestimmen Sie ein 95% symmetrisches Konfidenzintervall für μ .
- Wie würde sich das Intervall verringern oder vergrößern, wenn eine entsprechende Stichprobe in einer Gemeinde mit 90.000 Erwerbstätigen gezogen worden wäre?
- Angenommen N ist sehr groß (gegenüber n). Wie groß müsste der Stichprobenumfang n mindestens sein, um bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95% eine Stichprobenaussage

⁴ oder die Wahrscheinlichkeit eines solchen Ereignisses

mit einem absoluten Fehler von 20 Euro erzielen zu können?

Aufgabe 91 (Demonstrationsbeispiel für Ein-Stichprobentest, Bild in der Vorlesung)

Nachdem Diplom-Kaufmann K aus E einen Schnellimbiss eröffnete, widerfuhr ihm auch das Missgeschick, einen Juristen (J) zu Gast zu haben, der Tomatensuppe bestellte. Der Vorfall endete damit, dass sich K vor Gericht wegen versuchter Körperverletzung zu verantworten hatte. Dabei stellte sich heraus, dass unter 25 Tomatensuppen des K sogar 9 wegen einer Fliege für gewisse Gäste ungenießbar waren (so dass der Anteil "schlechter Stücke" $p = 9/25 = 0,36$ betrug).

Vor Gericht wurden zwei konkurrierende Hypothesen über die Wahrscheinlichkeit π dieses Ereignisses (Fliege) verfochten:

von K die Nullhypothese $H_0: \pi = 0,1$

von J die Alternativhypothese $H_1: \pi > 0,1$.⁵

- Entscheiden Sie über H_0 mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von $1 - \alpha = 0,9772^6$ (anders gefragt: ist $p = 0,36$ mit $\pi = 0,1$ verträglich?)
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit β für den Fehler 2. Art, bei welchem Wert von p beginnt der kritische Bereich?
- Bestimmen Sie ein 95% zweiseitiges Konfidenzintervall für π !

Aufgabe 92 (Bild in der Vorlesung)

In den Wäldern des Fürstentums Sylvania⁷ kam es vor dem Jahre 1649 doch schon hin und wieder mal zu unangenehmen Begegnungen (vgl. Bild). Die mittlere Anzahl derartiger Unfälle war $\mu = 500$ pro Monat und die Standardabweichung war 50 Unfälle pro Monat. Prinz Wanfried von Sylvania befahl deshalb einem Hofnarren eine Straßenverkehrsordnung (StVO) auszuarbeiten, mit vielen schönen Paragraphen. Sie trat 1649 in Kraft.

- Nach Inkrafttreten der StVO ermittelten die Statistiker folgende Daten für die Unfallhäufigkeit $\bar{x} = 450$ (die Standardabweichung sei bekannt mit 50). Man bestimme das symmetrische Konfidenzintervall bei einer Fehlerwahrscheinlichkeit von $\alpha = 0,0455$! Die Angaben beruhen auf einer Untersuchung von $n = 100$ Monaten (mehr als 8 Jahre).
- Es interessiert natürlich, ob durch Wanfrieds StVO nunmehr *signifikant* weniger Unfälle (Monatsdurchschnitte) vorkommen als früher. Formulieren Sie die Null- und Alternativhypothese und führen Sie den Test durch (mit $\alpha = 5\%$).

Aufgabe 93

Die Post des Landes x plant eine Gebührenerhöhung für eine ihrer Dienstleistungen, die bisher von 80 vH der Bevölkerung in Anspruch genommen wurde. Eine Stichprobe vom Umfang $n = 900$ ergab, dass bei der höheren Gebühr immerhin noch 78 vH der Bevölkerung diese Leistung nachfragen werden.

Die Post schließt daraus, dass sich die Nachfrager preisunelastisch verhalten und freut sich auf die Mehreinnahmen durch die Gebührenerhöhung:

⁵ bzw. konkret für Teil b dieser Aufgabe $\pi = 0,5$.

⁶ Der "krumme" Wert (statt 0,95) ist hier gewählt worden, weil dann $z = 2$ ist.

⁷ Nicht zu verwechseln mit Transsylvanien.

- Geben Sie in eigenen Worten an, welche Hypothesen sich in diesem Fall anbieten. Was ist hier die "Nullhypothese" H_0 und was die "Alternativhypothese" H_1 ?
- Was bedeutet {in eigenen Worten} in diesem Fall der Fehler 1. Art (α -Fehler) und was der Fehler 2. Art (β -Fehler)?
- Führen Sie den Test durch (einseitig $\alpha = 0,1$ [$z_\alpha = 1,2816$] und auch zum Vergleich einseitig $\alpha = 0,05$ [$z_\alpha = 1,6449$]).

Aufgabe 94 (Bild in der Vorlesung)

Beim Fallschirmspringen ist es bekanntlich von fundamentaler Bedeutung, dass sich der Fallschirm nach dem Absprung auch öffnet. Der Fabrikant F hat den Öffnungsmechanismus durch Stichproben überprüft. Er geht von der Hypothese aus, dass sich nur 0,0001% der Fallschirme im Falle eines Falles nicht öffnen (= Nullhypothese H_0). Der für die Sicherheit verantwortliche oberste Luftfahrtkommissar und der Chefjurist des Fabrikanten, der Garantieprozesse fürchtet, gehen jedoch davon aus, dass der Prozentsatz größer als 0,0001% ist.

Der Fehler, leichtfertig das Leben von Fallschirmspringern durch den Kauf und Einsatz schlechter Fallschirme aufs Spiel zu setzen ist in diesem Fall: (Richtiges ankreuzen)

<input type="checkbox"/>	der Fehler erster Art (Alpha-Fehler)	<input type="checkbox"/>	der Fehler zweiter Art (Beta-Fehler).
--------------------------	--------------------------------------	--------------------------	---------------------------------------

Aufgabe 95

Ein Würfel wurde 180 mal ausgespielt. Kann dabei 40-mal die "6" fallen? Es ist die Hypothese, dass es sich um einen echten Würfel handelt mit $\alpha = 5\%$ zu testen!

Aufgabe 96 (noch einmal Statistik als konkrete Lebenshilfe!)

Major v. X. (verarmter Adel) wünscht sich durch eine Heirat zu sanieren:

- Zwei gleichlautende Anzeigen in den Zeitungen A und B ergeben $n_A = n_1 = 50$ und $n_B = n_2 = 40$ Zuschriften, die als unabhängige Stichproben mit Zurücklegen aufzufassen sind). Aus den Zuschriften ging hervor, dass die Anteile $p_A = 0,5$ und $p_B = 1/8$ der heiratswilligen Damen begütert waren.

Unzufrieden mit dem Erfolg dieser Aktion erwägt v. X. eine neue Anzeige, in der seine Vorzüge und Absichten etwas deutlicher hervorgehoben werden sollen. Soll er seine neuerliche Aktion auf die Zeitung A konzentrieren? ($\alpha = 1\%$)

- Zu welcher Entscheidung würde X gelangen, wenn die Anteile $p_A = 0,4$ und $p_B = 0,25$ gewesen wären?

Aufgabe 97

Die Gemeinde G ist zu der richtigen Erkenntnis gelangt, dass man nicht durch korrupte Wahlmänner unfähige Sheriffs wählen lassen sollte, und dass auch in Fragen des Personalwesens ein Statistiker hilfreich sein kann. Sie beauftragte deshalb einen Statistiker, um aus den beiden Bewerbern A und B für das Amt des Sheriffs den besseren auszuwählen. Da es bei diesem Amt vor allem darauf ankommt, gut schießen zu können, andererseits aber auch ein guter Schuss ein Zufallstreffer sein kann, unternahm der Statistiker mit den beiden Bewerbern einen Schießwettbewerb. Die Ergebnisse waren:

Bewerber	Ziel wurde getroffen	Ziel wurde nicht getroffen	Anteil der Treffer
A	10	30	$1/4 = 0,25$
B	20	30	$2/5 = 0,4$

- Offenbar scheint B der bessere Schütze zu sein. Man möchte aber auch wissen, ob B signifikant besser schießt als A ($\alpha = 0,05$).
- Erklären Sie mit eigenen Worten, was in diesem Fall der Fehler 2. Art ist, und ob man die Wahrscheinlichkeit β hier klein oder groß wählen sollte!
- Was fällt Ihnen beim Vergleich der Zahlen in dieser Aufgabe mit Aufgabe 96 auf?

Aufgabe 98

Eine Untersuchung über die Gehirngröße (in cm^3) von 9 Ponginae und 16 Australopithecinae⁸ möge bei einer Standardabweichung (in der Grundgesamtheit) von $\sigma_P = \sigma_A = 9$ folgende Mittelwerte ergeben haben: $\bar{x}_P = 450$ (Ponginae) und $\bar{x}_A = 600$ (Australopithecinae)⁹

- Zwei Stichproben Problem*: Ist der Unterschied in der Gehirngröße zwischen diesen beiden menschlichen Vorfahren signifikant ($\alpha = 5\%$ einseitig)?
- Ein Stichproben Problem (eine Stichprobe mit $n_A = 16$)*: Ist anzunehmen, dass ein [heutiger] durchschnittlicher Gorilla (Gehirnvolumen 685 cm^3) ein signifikant größeres Gehirnvolumen als ein Australopithecus hat ($\alpha = 5\%$ einseitig)? $H_0: \mu_A = \mu_G = 685$ bei $\sigma_A = \sigma_G = 9$.

Aufgabe 99

- Bei einer Wahlumfrage (Stichprobe) möge die Schätzung des Anteils π der Wähler der Partei xyz vom wahren Wert höchstens absolut um 1 vH abweichen mit einer Wahrscheinlichkeit von 90%. Wie viele Personen sind zu befragen?
- Wie viele Personen müsste man befragen, wenn man mit gleicher Wahrscheinlichkeit einen Fehler von höchstens einem halbem Prozent in Kauf nehmen will?

Aufgabe 100

Es wird vermutet, dass etwa 30% der Studenten des Faches x ihr Studium ohne Examen abbrechen. Durch eine Stichprobe soll der genaue Prozentsatz mit einem Fehler von $\pm 5\%$ und einer Sicherheit von 90% festgestellt werden.

- Wie groß muss dann der Stichprobenumfang sein?
- Wie groß muss die Stichprobe sein, wenn der Fehler höchstens 1% sein soll?

Nachtrag: Einige Vampiraufgaben (vgl. auch Aufg. 66)

1) (**Wachstumsraten**) Der häufig von skurrilen Vorstellungen geplagte Statistiker L wird nach dem Besuch einer einschlägigen Filmvorführung den Alptraum nicht los, dass Graf Dracula von den Toten auferstehen könnte. Bekanntlich wird ja auch ein friedlicher Bürger durch den Biss eines Vampirs selbst zum Vampir. L geht davon aus, dass der "Durchschnittsvampir" pro Monat zwei Menschen das Blut aussaugt. Wie lange wird es dauern, bis nach Draculas Wiedererscheinen eine Bevölkerung vom Umfang

⁸ $n_P = 9$ und $n_A = 16$ sind als zwei unabhängige Stichproben aufzufassen.

⁹ Die Angaben entsprechen der Wirklichkeit (Nachforschung in Lexika). Bild in der Vorlesung

- einer Großstadt mit 700.000 Menschen
- der Bundesrepublik (alte Bundesländer) mit 60 Millionen Menschen)

vollständig vom Vampirismus befallen sein wird?

2) (**Häufigkeitsverteilung und Mittelwerte**) Bekanntlich hat das Ruhrgebiet ideale Bedingungen für die Ausbreitung des Vampirismus (geringe Entfernungen, nötige Infrastruktur, Ballung der Bevölkerung). Aus einer Statistik der durchschnittlichen (nächtlichen) Anfahrzeit eines Vampirs zum nächsten Opfer kann man die folgenden Zahlen entnehmen:

Fahrzeit(Minuten)	Anzahl der Opfer
0 bis unter 5	100
5 bis unter 10	400
10 bis unter 20	300
20 bis unter 60	150
über eine Stunde	50

Stellen Sie diese Daten geeignet graphisch dar mit Angabe der relativen Häufigkeiten! Bestimmen Sie das arithmetische Mittel und den Zentralwert (Median)!

3) (**Mittelwerte, Varianz**) Einer Statistik des Statistischen Landesamtes konnte man folgendes entnehmen über die Anzahl der Vampirbisse im Monat April 1989, gegliedert nach Städten:

BO: 120, **BOT:** 140, **DO:** 50, **DU:** 60, **E:** 20, **MH:** 35, **OB:** 130, **RE:** 75.

Bestimmen Sie den Zentralwert (Median), das arithmetische Mittel und die Varianz:

4) (**Korrelation**) Zu den Vorteilen des Ruhrgebiets unter dem Aspekt des Vampirismus gehört - wie erwähnt - auch die Ballung (Konzentration) der Wohnbevölkerung. Hierzu die folgenden Daten:

	BO	BOT	DU	E	MH	OB
Einwohner* (X)	380	120	500	590	170	220
Vampire (Y)	60	35	70	80	40	50

* in 1000

Bestimmen Sie den Korrelationskoeffizienten sowie die Regressionsgerade zur Schätzung von y mithilfe von x.

5) (**Preisindex**) Vom vampirstatistisch großer Bedeutung ist schließlich die Entwicklung der Preise für die Lebenshaltung eines städtischen (Großstadt in NRW) Ein-Personen-Vampirhaushalts mit mittlerem Einkommen 1790 = 100. Dabei kommt es dem Statistiker sehr entgegen, dass der Warenkorb eines Vampirhaushalts leider nicht sehr viel Abwechslung bietet und folglich nur aus drei Waren besteht, deren Preise sich wie folgt entwickelt hatten:

Jahr	Nahrungsmittel		Wohnen
	Blut	andere	(Tiefbau)
1790	12	40	200
1890	26	52	850
1990	82	68	12800

Es kann gar keine Frage sein, dass Verstädterung, Bodenspekulation und ähnliche Erscheinungen den für Vampire geeigneten Wohnraum in den letzten Jahrhunderten enorm verknappt und verteuert hatten, so dass die Ausgabenverhältnisse von 1790, wonach das Haushaltseinkommen im Verhältnis 3:1:2 auf die drei Ausgabenpositionen aufgeteilt wurde, kaum noch für die heutige Verbrauchsstruktur der Vampirhaushalte als repräsentativ gelten können. Man berechne gleichwohl den Verbraucherpreisindex für die Lebenshaltung eines Einpersonen Vampirhaushalts zur Basis 1790 = 100 für 1890 und 1990 nach der Formel von Laspeyres mit den obigen Daten!